Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Пупышев, К задаче трех частиц с парными взаимодействиями, обратно пропорциональными квадратам расстояний, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 268–287

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf496>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 14:41:52

© 2001 г.

В. В. Пупышев*

К ЗАДАЧЕ ТРЕХ ЧАСТИЦ С ПАРНЫМИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯМИ, ОБРАТНО ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМИ КВАДРАТАМ РАССТОЯНИЙ

Метод гипергармоник применяется для исследования трехчастичных уравнений Шредингера и Фаддеева с парными взаимодействиями, обратно пропорциональными квадратам расстояний. Точные решения таких уравнений строятся в виде произведения зависящей от гиперрадиуса функции Бесселя на конечную линейную комбинацию гипергармоник. Доказывается и исследуется критерий существования таких решений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Радиальное двухчастичное уравнение Шредингера с потенциалом $v(x) = cx^{-2}$ и угловым моментом b при положительной энергии e и достаточно большой константе c ,

$$e \geq 0, \quad c > c_b \equiv -\left(b + \frac{1}{2}\right)^2, \quad (1)$$

имеет только сингулярное на малых расстояниях x решение ψ^b (см., например, [1]). Это решение физически допустимо ($x\psi^b \rightarrow 0, x \rightarrow 0$):

$$\psi^b(x; e) \sim O(x^q) \rightarrow 0, \quad q \equiv -\frac{1}{2} + \sqrt{c + c_b} > 0, \quad x \rightarrow 0. \quad (2)$$

Функция ψ^b описывает рассеяние, причем при $c < c_b$ имеется и дискретный спектр, а основное состояние отвечает энергии $e = -\infty$. В этом состоянии частицы находятся в бесконечно малой окрестности их центра масс ($x = 0$), поэтому говорят, что происходит “падение” частиц в точку $x = 0$.

Взаимодействие, обратно пропорциональное квадрату расстояния, часто называют взаимодействием центробежного типа. В общем случае теорема существования и единственности физически приемлемых решений задачи трех и более частиц с парными взаимодействиями центробежного типа либо с парными взаимодействиями, ведущими себя

*Объединенный институт ядерных исследований, г. Дубна Московской обл., Россия.
E-mail: pupyshev@thsun1.jinr.ru

как такие взаимодействия лишь при малых или же больших расстояниях, не доказана [2]. Некоторые приемлемые решения такой задачи и достаточные для их существования условия найдены лишь в частном случае [3], а именно: в задаче трех тождественных частиц с S -волновыми парными взаимодействиями центробежного типа и полным угловым моментом, равным (см. [4]) или не обязательно равным (см. [5]) нулю.

В предыдущей работе [5] был предложен метод построения и доказательства критерия существования точных решений задачи трех тождественных частиц. Эти решения представимы в виде произведения зависящей от гиперрадиуса функции Бесселя на конечную линейную комбинацию трехчастичных гипергармоник. Данный метод является аналитическим и достаточно простым, так как в его рамках исходная задача трех тождественных частиц сводится к анализу на совместность и последующему решению конечных систем линейных уравнений. Поэтому и для дальнейшего развития теории Фаддеева, и для прикладных аналитических исследований представляется интересным обобщение этого метода для систем из трех не обязательно тождественных частиц с центральными парными взаимодействиями центробежного типа или же с конечными подсуммами операторных разложений таких взаимодействий по их собственным базисам из сферических функций. Такое обобщение – главная цель настоящей работы.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Символом (p_1, p_2, p_3) обозначим исследуемую систему трех *разных* частиц p_1, p_2 и p_3 с массами m_1, m_2 и m_3 . Стандартным образом [6] в ее шестимерном координатном пространстве $\mathcal{R}^6$ определим приведенные координаты Якоби $\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i$, $i = 1, 2, 3$. Объединим их в шестимерные векторы $\mathbf{r}_i = (\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i)$ с обычными гипersферическими координатами (r, Ω_i) [7], где $r \equiv (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – гиперрадиус, а $\Omega_i \equiv (\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i)$ – набор из пяти гипersферических углов: $\hat{x}_i$ и $\hat{y}_i$ – пары сферических углов векторов $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$, а $\varphi_i \equiv \arctg(y_i/x_i)$. В $\mathcal{R}^6$ существуют три ($i = 1, 2, 3$) декартовых ($\langle \mathbf{r}_i | = \langle \mathbf{x}_i, \mathbf{y}_i |$) и три соответствующих им гипersферических ($\langle \mathbf{r}_i | = \langle r_i, \Omega_i |$) координатных представления. Переход от представления $\langle \mathbf{r}_i |$ к другому представлению $\langle \mathbf{r}_k |$, $k \neq i$, называется кинематическим преобразованием (см. [3]) и характеризуется кинематическим углом

$$\gamma_{ki} \equiv g_{ki} \arctg \left(\frac{m_j(m_1 + m_2 + m_3)}{m_k m_i} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

По определению таких шести углов, если $(k, i) = (1, 2), (3, 1), (2, 3)$, то

$$g_{ki} = -g_{ik} = 1, \quad 0 \leq \gamma_{ki} \leq \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{(k,i)} \gamma_{ki} = \pi, \quad (4)$$

а значения $\gamma_{ki} = \pm\pi/2, \pm\pi/4, 0$ являются предельными. Например,

$$\begin{aligned} \gamma_{12} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_{23} \rightarrow 0, \quad \gamma_{31} \rightarrow \frac{\pi}{2}, & \quad \text{если} \quad \frac{m_1}{m_2} \rightarrow 0, \quad m_2 = O(m_3); \\ \gamma_{12} \rightarrow \frac{\pi}{4}, \quad \gamma_{23} \rightarrow \frac{\pi}{2}, \quad \gamma_{31} \rightarrow \frac{\pi}{4}, & \quad \text{если} \quad \frac{m_1}{m_2} \rightarrow \infty, \quad m_2 = m_3. \end{aligned} \quad (5)$$

Пусть I – единичный оператор, $\mathbf{l}_{x_i}$ и $\mathbf{l}_{y_i}$ – операторы угловых моментов, сопряженные векторам $\mathbf{x}_i$ и $\mathbf{y}_i$, а $\mathbf{l} \equiv \mathbf{l}_{x_i} + \mathbf{l}_{y_i}$ и $\mathbf{L}$ – операторы полного углового момента и гипермомента. Квадраты всех перечисленных операторов и оператор инверсии $\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i$ коммутируют с оператором кинематического преобразования $K(\gamma)$ [8]. Если $\gamma = \gamma_{ki}$, то $K(\gamma_{ki}) = P_{ik}P_{jk}$, где P_{ij} – оператор перестановки частиц p_i и p_j .

Свободный гамильтониан H_0 системы (p_1, p_2, p_3) в представлении $\langle \mathbf{r}_i | = \langle r, \Omega_i |$ имеет вид

$$H_0(\mathbf{r}_i) = -r^{-5} \partial_r (r^5 \partial_r) + r^{-2} \mathbf{L}^2(\Omega_i). \quad (6)$$

Для каждой пары (p_i, p_j) частиц p_i и p_j определим оператор взаимодействия V_k ($k = 1, 2, 3$) в его собственном декартовом представлении $\langle \mathbf{r}_k |$:

$$V_k(\mathbf{x}_k) \equiv c_k x_k^{-2} I_k^d, \quad I_k^d \equiv \sum_{b=0}^d P_k^b, \quad P_k^b \equiv \sum_{\beta=-b}^b |Y_{b\beta}(\hat{x}_k)\rangle \langle Y_{b\beta}(\hat{x}_k)|, \quad (7)$$

где c_k – ненулевая действительная константа, индекс b принимает целые значения, причем $b \leq d$, а $Y_{b\beta}$ – сферическая функция. Если b пробегает все значения от 0 до ∞ , т.е. $d = \infty$, то I_k^d – единичный оператор: $I_k^d = I$. Действительно, тогда I_k^d – сумма всех проекторов P_k^b на состояния частиц p_i и p_j с угловыми моментами $\ell_{x_k} = b$. В этом случае V_k – центральное взаимодействие ($V_k(\mathbf{x}_k) = V_k(x_k)$), действующее в его собственном гиперсферическом представлении $\langle \mathbf{r}_k, \Omega_k |$ как оператор умножения на функцию $c_k / (r^2 \cos^2 \varphi_k)$. В любом другом случае взаимодействие V_k – нецентральное, так как является подсуммой операторного разложения центрального взаимодействия $V_k(x_k)$ по его собственному базису из сферических функций и включено лишь в определенном числе парциальных волн. Например, при $b = d = 0$ это взаимодействие является S -волновым. В несобственном представлении $\langle r_i, \Omega_i |$, $i \neq k$, оператор V_k становится более сложным, так как функция $\cos^2 \varphi_k$ зависит от углов Ω_i и γ_{ki} :

$$V_k(\mathbf{x}_k(\mathbf{r}_i; \gamma_{ki})) = I_k^d \frac{c_k}{r^2 \cos^2 \varphi_k}, \quad \varphi_k = \varphi_k(\varphi_i, u, \gamma_{ki}), \quad (8)$$

$$\cos^2 \varphi_k = \cos^2(\gamma_{ki} - \varphi_i) + \frac{1}{2}(u - 1) \sin 2\gamma_{ki} \sin 2\varphi_i, \quad u \equiv \frac{\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{y}_i}{x_i y_i}. \quad (9)$$

Состояние $\langle \varepsilon |$ системы (p_1, p_2, p_3) характеризуется полным набором ε сохраняющихся квантовых чисел. При любых индексах b и d в представлениях взаимодействий (7) сохраняется полная энергия E этой системы, квадрат $\ell(\ell + 1)$ ее полного углового момента $\mathbf{l}$ и его третья проекция m , т.е. $E, \ell, m \in \varepsilon$. Если в этих представлениях $b = 0, 1, \dots, d = \infty$ или же b принимает только четные или только нечетные значения, то в силу соотношения $(P_{ij} - I)V_k(x_k) = 0$ или соответственно $P_{ij}Y_{b\beta}(\hat{x}_k) = (-1)^b Y_{b\beta}(\hat{x}_k)$ сохраняется и четность σ по отношению к инверсии $\mathbf{r}_i \rightarrow -\mathbf{r}_i$. В этих трех случаях $\varepsilon = (E, \ell, m, \sigma)$.

Решение Ψ^ε уравнения Шредингера для трехчастичного состояния $\langle \varepsilon |$

$$\left(H_0 + \sum_{k=1}^3 V_k - E \right) \Psi^\varepsilon = 0 \quad (10)$$

и сопоставленное этому решению формулой

$$\Psi^\varepsilon = \sum_{k=1}^3 \Psi_k^\varepsilon \quad (11)$$

решение $(\Psi_1^\varepsilon, \Psi_2^\varepsilon, \Psi_3^\varepsilon)$ системы уравнений Фаддеева [2]

$$(H_0 - E)\Psi_i^\varepsilon = -V_i \sum_{k=1}^3 \Psi_k^\varepsilon, \quad i = 1, 2, 3, \quad (12)$$

будем искать в классе $\mathcal{B}^\varepsilon$, состоящем из квадратично интегрируемых на единичной сфере S^5 в $\mathcal{R}^6$ функций, обладающих данным набором квантовых чисел ε . Для такого класса вполне определенные трехчастичные гипергармоники [6]

$$Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) = N_{Lab}(\sin \varphi_i)^a (\cos \varphi_i)^b P_n^{(a+\frac{1}{2}, b+\frac{1}{2})}(\cos 2\varphi_i) \mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}(\hat{y}_i, \hat{x}_i), \quad (13)$$

$$L = a + b + 2n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{l},$$

образуют полный и ортонормированный на S^5 угловой базис. Здесь N_{Lab} – известный нормировочный множитель, $P_n^{(a+1/2, b+1/2)}$ – полином Якоби и $\mathcal{Y}_{ab}^{\ell m}$ – бисферическая гармоника. В случае $\sigma \in \varepsilon$ индексы a и b подчиняются еще одному дополнительному условию: $(-1)^{a+b} = \sigma$.

Гипергармоники (13) – собственные функции операторов P_{jk} , $\mathbf{l}_{x_i}^2$, $\mathbf{l}_{y_i}^2$ и $\mathbf{L}^2$:

$$\begin{aligned} (P_{jk} - (-1)^b)Q &= 0, & (\mathbf{l}_{y_i}^2 - a(a+1))Q &= 0, \\ (\mathbf{l}_{x_i}^2 - b(b+1))Q &= 0, & (\mathbf{L}^2 - L(L+4))Q &= 0, \end{aligned} \quad Q \equiv Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad (14)$$

но не являются таковыми для оператора $K(\gamma_{ki})$. Этот оператор сохраняет квантовые числа $L, \ell(\ell+1), m, \sigma$, но не сохраняет числа $a(a+1)$ и $b(b+1)$:

$$K(\gamma_{ki})Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_i) \equiv Y_{La'b'}^{\ell m}(\Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki})) = \sum_{ab} \langle ab|K(\gamma_{ki})|a'b'\rangle_{L\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i). \quad (15)$$

Здесь и далее, если не оговорено специально, индексы a и b пробегают все допустимые при заданных L и ε значения. Матричные элементы оператора $K(\gamma)$ в случае $\gamma = \gamma_{ki}$ являются коэффициентами Рейнала–Реваи [9] и при любых $\gamma, \gamma' \in [-\pi/2, \pi/2]$ подчиняются следующим соотношениям симметрии, ортонормированности и правилу сумм [8]:

$$\langle a'b'|K(-\gamma)|ab\rangle_{L\ell} = (-1)^{b'+b} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell}, \quad (16)$$

$$\sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(-\gamma)|a''b''\rangle_{L\ell} = \delta_{a'a''} \delta_{b'b''}, \quad (17)$$

$$\langle a'b'|K(\gamma + \gamma')|a''b''\rangle_{L\ell} = (-1)^L \sum_{ab} \langle a'b'|K(\gamma)|ab\rangle_{L\ell} \langle ab|K(\gamma')|a''b''\rangle_{L\ell}. \quad (18)$$

3. МЕТОД

Поставим задачу следующим образом: в случае взаимодействий (7) доказать в классе $\mathcal{B}^\varepsilon$ критерий существования и сформулировать метод построения всех решений уравнения Шредингера (10) типа

$$\Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i; p^2) = r^{-2} Z_p(z) F^\varepsilon(\Omega_i; p^2), \quad z \equiv r\sqrt{E}, \quad (19)$$

$$F^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=s}^t \sum_{ab} {}^i B_{Lab}^\ell Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad (20)$$

где s – минимально возможное при данном ε значение гипермомента, $t < \infty$, а все коэффициенты ${}^i B_{Lab}^\ell$ зависят от значений константы p^2 .

Исследуемый случай парных взаимодействий центробежного типа (7) является исключительным: только такие взаимодействия зависят от гиперрадиуса таким же образом, как и единственное действующее на переменные Ω_i слагаемое $r^{-2} \mathbf{L}^2(\Omega_i)$ свободного гамильтониана (6). Поэтому после умножения уравнения Шредингера (10), записанного в представлении $\langle r, \Omega_i |$, на r^2 получается уравнение

$$(r^{-3} \partial_r (r^5 \partial_r) + r^2 E) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i) = \left(\mathbf{L}^2(\Omega_i) + \sum_{k=1}^3 I_k^d c_k \sec^2 \varphi_k \right) \Psi^\varepsilon(\mathbf{r}_i), \quad (21)$$

в левой части которого все операторы действуют только на один аргумент r , а в правой части – на все остальные переменные Ω_i . Дифференциальные уравнения, обладающие таким свойством, могут иметь факторизованные решения, которые строятся методом разделения переменных [10]. Применим этот метод к уравнению (21): подстановкой (19) сведем его к двум уравнениям, связанным посредством неизвестной пока постоянной p^2 разделения переменных r и Ω_i . Первое уравнение – хорошо изученное при всех комплексных z и p уравнение Бесселя [11] с пока не определенным p :

$$(z^2 \partial_z^2 + z \partial_z + z^2 - p^2) Z_p(z) = 0, \quad (22)$$

а второе уравнение можно интерпретировать как трехчастичное уравнение Шредингера на $\mathcal{S}^5$ с параметром $p^2 - 4$ в качестве энергии:

$$\left(\mathbf{L}^2(\Omega_i) + \sum_{k=1}^3 I_k^d c_k \sec^2 \varphi_k - (p^2 - 4) \right) F^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = 0. \quad (23)$$

Поставленная задача частично решена: из уравнения Шредингера (10) определена функциональная зависимость его искомого решения (19) от r .

Аналитическое исследование всех решений уравнения (23) представляется очень сложной задачей по трем причинам: в этом уравнении содержится свободный параметр p^2 , число независимых переменных $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \varphi_i$, равное пяти, достаточно велико, более того, зависимость (9) функций $\cos^2 \varphi_k$ с $k \neq i$ от аргументов Ω_i не простая. Все переменные можно разделить, применив к обсуждаемому уравнению (23) метод гипергармоник.

Подставим ряд (20) с пока не определенным t в это уравнение. Полученное уравнение спроецируем на гиперсферический базис (13). Таким образом выведем, вообще говоря, бесконечную однородную систему линейных уравнений для неизвестных коэффициентов ${}^iB_{Lab}^\ell$. Потенциальная часть матрицы этой системы содержит интегралы

$$c_k \int_{S^5} d\Omega_i (Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i))^* I_k^d \sec^2 \varphi_k Y_{L'a'b'}^{\ell m}(\Omega_i), \quad k = 1, 2, 3,$$

которые с помощью формул (15) и известного представления [11] полинома $P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(q)$ переменной $q \equiv \cos 2\varphi_i$ в виде конечного ряда по целым степеням $(1 \pm q)$ сведем к конечным суммам табличных интегралов [12]. В итоге каждый исходный интеграл представится конечной суммой, содержащей коэффициенты Рейнала–Реваи и гипергеометрические ряды ${}_3F_2$ от комбинаций индексов L, a, b, a' и b' . Из-за столь сложной зависимости потенциальных матричных элементов от пяти индексов аналитическое исследование системы уравнений для коэффициентов ${}^iB_{Lab}$ представляется невозможным.

Первопричина того, что методом гипергармоник не удалось свести уравнение (23) к более простой задаче, такова: это уравнение, как и исходное уравнение Шредингера (10), содержит сумму трех взаимодействий и допускает запись только в одном координатном представлении, которое всегда оказывается несобственным для двух парных взаимодействий, что и приводит к сложным потенциальным матрицам. В отличие от уравнения Шредингера (10) каждое уравнение фаддеевской системы (12) содержит только одно взаимодействие и по определению записывается в собственном для этого взаимодействия координатном представлении. Поэтому уравнения Фаддеева более удобны для построения точных решений задачи трех частиц с любыми парными взаимодействиями, чем отвечающее им уравнение Шредингера. Приведенные ниже построения еще раз подтверждают этот известный факт [2].

Чтобы продолжить построение функций (19), необходимо определить постоянную p , индекс t и коэффициенты ${}^iB_{Lab}^\ell$ ряда (20). Для этого перейдем к уравнениям Фаддеева (12). Так как в искомой функции (19) переменные r и Ω_i разделены, то ее фаддеевские компоненты имеют вид

$$\Psi_i^\varepsilon(\mathbf{r}_i; p^2) = r^{-2} Z_p(z) F_i^\varepsilon(\Omega_i; p^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad (24)$$

а функция F^ε представляется суммой своих фаддеевских компонент F_k^ε :

$$F^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = \sum_{k=1}^3 F_k^\varepsilon(\Omega_k(\Omega_i; \gamma_{ki}); p^2). \quad (25)$$

Используя представления (24) и (25) и тот факт, что Z_p – решение уравнения (22), выводим из исходных уравнений Фаддеева (12) в $\mathcal{R}^6$ уравнения Фаддеева на S^5 :

$$\cos^2 \varphi_i (\mathbf{L}^2(\Omega_i) + 4 - p^2) F_i^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = -c_i I_i^d \sum_{k=1}^3 F_k^\varepsilon(\Omega_k; p^2), \quad i = 1, 2, 3. \quad (26)$$

Для углового анализа этой системы представим искомые функции F_i^ε рядами по их *собственным* гиперсферическим базисам с пока неизвестными постоянными t и $B_{Lab}^{i\ell}$:

$$F_i^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = \sum_{L=s}^t \sum_{ab} B_{Lab}^{i\ell} Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (27)$$

Выведем два вспомогательных соотношения. Подставим ряды (20) и (27) в равенство (25). Затем, применяя правило (15), получим первое соотношение – связь между коэффициентами разложений функции $F^\varepsilon(\mathbf{r}_i; p^2)$ и ее компонент $F_k^\varepsilon(\mathbf{r}_k; p^2)$:

$${}^i B_{Lab}^\ell = B_{Lab}^{i\ell} + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{L\ell} B_{La'b'}^{k\ell}. \quad (28)$$

Для вывода второго соотношения – разложения по гипергармоникам произведения $\cos^2 \varphi_i Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ – используем представление (13) и положим $q \equiv \cos 2\varphi_i$ и $\cos^2 \varphi_i = (1+q)/2$. Затем по известной формуле [11] представим функцию $q P_n^{(a+1/2, b+1/2)}(q)$ с индексом $n = (L-a-b)/2 \neq 0$ линейной комбинацией двух полиномов $P_{n\pm 1}^{(a+1/2, b+1/2)}(q)$, а в оставшемся случае $n = 0$ – произведением числового множителя на полином $P_1^{(a+1/2, b+1/2)}(q)$. Учтем также, что по определению индекса s при данном ε не существует гипергармоник с индексами гипермомента $L < s$. В итоге получим искомое и ключевое для дальнейших построений представление

$$\cos^2 \varphi_i Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i) = \sum_{L'=L_-(L)}^{L+2} C_{L'L}^{ab} Y_{L'ab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad (29)$$

где $L_-(L) \equiv L - 2(1 - \delta_{Ls})(1 - \delta_{L, a+b})$, $L = a + b + 2n$ и

$$C_{LL}^{ab} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(b-a)(a+b+1)}{(L+1)(L+3)} \right), \quad C_{LL'}^{ab} = C_{L'L}^{ab}, \quad (30)$$

$$C_{L, L-2}^{ab} = \frac{1}{4} \left(\left(1 - \frac{a+b}{L} \right) \left(1 + \frac{a+b}{L+2} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 - \left(\frac{a-b}{L+1} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Оно означает, что оператор умножения на функцию $\cos^2 \varphi_i$ отображает гипергармонику $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ в линейную комбинацию гипергармоник с теми же самыми индексами a и b и индексами гипермомента $L, L+2$ в случае $L = s$ или $L = a+b$ и индексами $L, L \pm 2$ во всех остальных случаях.

Приступим к угловому анализу системы (26) в самом общем случае трех центральных взаимодействий (7), когда $I_k^d = I$, $k = 1, 2, 3$. Каждое ($i = 1, 2, 3$) уравнение этой системы преобразуем следующим образом: подставим в него искомые ряды (27), затем применим формулы (14), (28) и (29), приведем подобные члены и получившееся соотношение спроецируем на собственные для исследуемого уравнения базисные гипергармоники $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ с любыми допустимыми при данном ε индексами L, a и b . Упорядочим

полученные линейные уравнения для искомых коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$. Сначала скомбинируем L -блоки, составив каждый L -блок из уравнений для коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$, $i = 1, 2, 3$, полученных проецированием всех трех уравнений (26) на гипергармоники с одним и тем же L , но всеми возможными при таком L индексами a и b ($L = a + b + 2n$, $n = 0, 1, \dots$). Число $N_{L\epsilon}$ всех возможных пар таких индексов конечно. Внутри каждого L -блока, состоящего из $3N_{L\epsilon}$ уравнений, сначала запишем все $N_{L\epsilon}$ уравнений для коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$, порожденных проецированием на гипергармоники с одним и тем же индексом L первого ($i = 1$) уравнения системы (26), затем второго ($i = 2$) и, наконец, третьего ($i = 3$). Упорядоченные таким образом L -блоки ($L = s, s + 2, \dots, t + 2$) запишем в порядке возрастания индекса L . Для сокращения записи используем символы $B_{Lab}^{i\ell}$ линейных комбинаций (28) искомых коэффициентов $B_{Lab}^{i\ell}$. В итоге первые L -блоки с $L = s, s + 2, \dots, t - 2$ дадут незамкнутую систему уравнений

$$\sum_{L'=L_-(L)}^{L_+(L)} ((L' + 2)^2 - p^2) C_{L'L}^{ab} B_{L'ab}^{i\ell} + c_i B_{Lab}^{i\ell} = 0, \quad (31)$$

где $L_+(L) = L + 2$, а предел $L_-(L)$ – такой же, как в суммах (29). Предпоследний L -блок ($L = t$) составят уравнения

$$(t^2 - p^2) C_{t-2,t}^{ab} B_{t-2,ab}^{i\ell} + ((t + 2)^2 - p^2) C_{tt}^{ab} B_{tab}^{i\ell} + c_i B_{tab}^{i\ell} = 0, \quad (32)$$

а последний L -блок ($L = t + 2$) – незацепляющиеся по индексам i, a и b уравнения

$$((t + 2)^2 - p^2) C_{t,t+2}^{ab} B_{tab}^{i\ell} = 0. \quad (33)$$

Этим незацепляющимся уравнениям всегда удовлетворяют нулевые значения всех коэффициентов $B_{tab}^{i\ell}$. В этом случае уравнения (32) совместны только при всех нулевых значениях $B_{t-2,ab}^{i\ell}$, так как все коэффициенты $C_{L'L}^{ab}$ (см. формулы (30)) положительные, по той же причине система (31) имеет только тривиальное решение. Рассматриваемая система (33) имеет нетривиальные решения ($B_{tab}^{i\ell} \neq 0$ хотя бы при одной тройке индексов i, a и b) тогда и только тогда, когда $p^2 = (t + 2)^2$. При таком подразумеваемом далее всюду соотношении последний L -блок ($L = t - 2$) системы (31) не содержит неизвестных $B_{tab}^{i\ell}$. Поэтому в этой системе далее полагаем $L_+(L) = L + 2(1 - \delta_{L,t-2})$, а соотношения (32) переписываем в виде уравнений, определяющих неизвестные $B_{tab}^{i\ell}$ через неизвестные $B_{t-2,ab}^{i\ell}$:

$$\begin{aligned} c_i B_{tab}^{i\ell} &= c_i \left(B_{tab}^{i\ell} + \sum_{k \neq i} \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{ki}) | a'b' \rangle_{t\ell} B_{ta'b'}^{k\ell} \right) = \\ &= 4(t + 1) C_{t,t-2}^{ab} B_{t-2,ab}^{i\ell}. \end{aligned} \quad (34)$$

Исследуем на совместность полученную совокупность систем (31) и (34). Возможны всего два случая: все коэффициенты $B_{t-2,ab}^{i\ell}$ нулевые или хотя бы один из них не равен нулю.

Пусть все коэффициенты $B_{t-2,ab}^{i\ell}$ нулевые. Тогда система (34) становится однородной. Подставим в нее произвольные коэффициенты $B_{tab}^{2\ell}$ и $B_{tab}^{3\ell}$, а все коэффициенты $B_{tab}^{1\ell}$ выберем так, чтобы заведомо удовлетворялись все уравнения с индексом $i = 1$:

$$B_{tab}^{1\ell} = - \sum_{k=2}^3 \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{k1}) | a'b' \rangle_{t\ell} B_{ta'b'}^{k\ell}, \quad \forall B_{tab}^{k\ell}, \quad \forall a, b. \quad (35)$$

Затем, применяя формулы (4) и (16)–(18), сведем все полученные таким образом соотношения к тождествам типа $0 = 0$. Следовательно, однородная система, отвечающая системе (34), всегда имеет нетривиальные решения типа (35). Значит, по известной теореме линейной алгебры [13] матрица $\mathbf{M}^t$ этой системы всегда вырождена ($\det \mathbf{M}^t = 0$).

Если все коэффициенты $B_{t-2,ab}^{i\ell}$ нулевые, то из системы (31) следует, что все коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ с $L < t - 2$ также равны нулю. Поэтому трехкратные ряды (27) вырождаются в суммы по индексам a и b с неоднозначно определенными коэффициентами (35):

$$F_i^\varepsilon(\Omega_i; p^2) = \sum_{ab} B_{tab}^{i\ell} Y_{tab}^{\ell m}(\Omega_i), \quad i = 1, 2, 3. \quad (36)$$

При любых таких коэффициентах в сумме (20) все коэффициенты (28) равны нулю, а сама сумма – тривиальная функция: $F^\varepsilon \equiv 0$. Следовательно, найденные нетривиальные решения (36) уравнений Фаддеева (26) – ложные решения [3].

Пусть теперь хотя бы один из коэффициентов $B_{t-2,ab}^{i\ell}$ не равен нулю. Тогда система (34) несовместна как неоднородная система с вырожденной матрицей $\mathbf{M}^t$.

Итак, в случае центральных взаимодействий (7) уравнение Шредингера (10) никогда не имеет нетривиальных решений типа (19), (20), а уравнения Фаддеева (12) имеют ложные решения, заданные формулами (24), (35) и (36).

Исследуем теперь случай нецентральных взаимодействий: $I_i^d \neq I$, $i = 1, 2, 3$, на $\mathcal{S}^5$.

Пусть все три взаимодействия V_k – последовательные ($b = 0, 1, \dots, d < \infty$) конечные подсуммы разложения оператора I по соответствующим сферическим базисам. Тогда оператор I_i^d является единичным для всех гипергармоник $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ с индексом $b \leq d$ и эквивалентен оператору умножения на нуль для всех остальных гипергармоник тех же аргументов.

Пусть в искомым рядах (20) и (27) максимальное значение t гипермомента настолько мало, что в представлении $t = a + b + 2n$, где $n = 0, 1, \dots$, все возможные при данном ε и всех допустимых n значения b не превышают d . Тогда на линейной оболочке гипергармоник $Y_{Lab}^{\ell m}(\Omega_i)$ с $L = s, \dots, t$ оператор I_i^d эквивалентен единичному оператору. Поэтому в результате проецирования уравнений (26) на все такие гипергармоники получатся системы (31) и (32), в которых индексы a' , b' , a и b будут принимать, как и в выше рассмотренном случае ($d = \infty$), все допустимые определением гипергармоник (13) значения. Индексы a и b в проекциях (33) уравнений (26) на гипергармоники $Y_{t+2,ab}^{\ell m}$ окажутся ограниченными условием $b \leq d$. Оно никак не повлияет ни на анализ системы (31)–(33) описанным выше способом, ни на окончательные выводы об отсутствии в рассмотренном случае нетривиальных решений (19), (20) уравнения Шредингера (21).

Теперь предположим, что в искомых рядах (20) и (27) значение t настолько велико, что хотя бы для одной пары слагаемых a и $2n$ в сумме $t = a + b + 2n$ индекс b может превышать d . Тогда матричные элементы

$$\int_{S^5} d\Omega_i (Y_{tab}^{\ell m}(\Omega_i))^* I_i^d Y_{tab'}^{\ell m}(\Omega_i)$$

равны единице при $b' = b \leq d$ и нулю при $b' \neq b$ или $b' = b > d$. Поэтому проецированием уравнений (26) на весь базис (13) получатся уравнения

$$((L+2)^2 - p^2) B_{Lab}^{i\ell} = 0, \quad L = s, s+2, \dots, t, \quad b > d$$

и уравнения (31)–(33), в которых индексы a' , b' , a и b подчиняются дополнительным к перечисленным в формулах (13) условиям $b', b \leq d$. Удовлетворим эти уравнения, положив $B_{Lab}^{i\ell} = 0$ при всех $L \leq t$ и $b > d$. Из равенств (33) с $b < d$ опять получаем $p^2 = (t+2)^2$. Теперь в рядах (20), (27) и суммах (28) индексы b' и b не превышают d , а значения индексов a' и a также оказываются ограниченными условиями треугольника.

Если, несмотря на дополнительные ограничения на индексы, матрица $\mathbf{M}^t$ системы (34) вырожденна, то, как и в случае центральных взаимодействий, имеются только ложные решения (35), (36) уравнений Фаддеева (26). Если же благодаря этим ограничениям $\det \mathbf{M}^t \neq 0$, то возможны два случая: матрица $\mathbf{A}^t$ системы (31) вырожденна или невырожденна. Пусть $\det \mathbf{A}^t \neq 0$, тогда эта система имеет лишь тривиальное решение, и поэтому такое же решение имеет система (34). Если же $\det \mathbf{A}^t = 0$, то система (31), а значит, и система (34) имеют нетривиальные решения.

Итак, если в случае нецентральных взаимодействий, заданных формулами (7), в которых $b = 0, 1, \dots, d < \infty$, выполняются условия

$$p^2 = (t+2)^2, \quad t > d, \quad \det \mathbf{A}^t = 0, \quad \det \mathbf{M}^t \neq 0, \quad (37)$$

а коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ удовлетворяют системам (31) и (34), то функция Ψ^ε , заданная формулами (19), (20) и (28), – точное решение уравнения Шредингера (21).

Докажем, что эти же условия являются и необходимыми. Пусть функция Ψ^ε типа (19), (20) удовлетворяет уравнению Шредингера (21). Дословно повторим вывод соотношения $p^2 = (t+2)^2$ и систем (31), (34). Теперь коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ удовлетворяют этим системам по определению. Так как однородная система (31) имеет решение, то ее матрица $\mathbf{A}^t$ вырожденна. Неоднородная система (34) тоже имеет решение. Следовательно, $\det \mathbf{M}^t \neq 0$, что, как было показано, возможно только при $t > d$.

Исследуем доказанный критерий существования (37) точных решений. Элементы матрицы $\mathbf{A}^t$ и $\mathbf{M}^t$ систем (31) и (34) зависят от параметров c_1, c_2, c_3 взаимодействий и от кинематических углов – функций (3) двух отношений масс частиц, например m_1/m_3 и m_2/m_3 . Поэтому условие $\det \mathbf{M}^t \neq 0$ может выполняться при любых ненулевых параметрах c_1, c_2 и c_3 , но не при всех отношениях масс частиц, а равенство $\det \mathbf{A}^t = 0$ может быть справедливым только при определенных отношениях масс частиц и значениях этих параметров.

Пусть $N_{L\varepsilon}^d$ — число гипергармоник $Y_{Lab}^{\ell m}$ с индексами $b \leq d$ и любыми допустимыми при таких b индексами a . Так как каждый L -блок системы (31) содержит $N_{L\varepsilon}^d$ уравнений, то матрица $\mathbf{A}^t$ имеет размерность

$$N = 3 \sum_{L=s}^{t-2} N_{L\varepsilon}^d$$

и является ленточной матрицей с шириной ленты $3N_{t-2,\varepsilon}^d$. Ее детерминант удобно представить полиномом степени N по целым степеням аргумента q — одного из параметров c_1, c_2, c_3 взаимодействий (7), с коэффициентами C_n , зависящими от двух других параметров и двух отношений масс частиц. Массу одной из частиц можно принять за единицу масс. При нашем выборе $q = c_2$ и $m_3 = 1$ получается характеристическое уравнение

$$\det \mathbf{A}^t = \sum_{n=0}^N C_n(c_1, c_3, m_1, m_2) c_2^n = 0, \quad (38)$$

а анализ условия $\det \mathbf{A}^t = 0$ сводится к исследованию всех его действительных нулей $c_2(c_1; c_3, m_1, m_2)$ как функций аргумента c_1 и параметров c_3, m_1, m_2 , причем параметры m_1 и m_2 берутся лишь такие, при которых $\det \mathbf{M}^t(m_1, m_2) \neq 0$.

Итак, случай взаимодействий (7) с индексом суммирования $b = 1, 2, \dots, d < \infty$ полностью рассмотрен. Все остальные случаи, когда индекс b пробегает произвольную, но конечную последовательность ($b \leq d < \infty$), можно исследовать тем же способом и показать, что независимо от выбора такой последовательности сформулированный выше критерий остается в силе.

До сих пор три частицы считались разными. Для полноты стоит рассмотреть и два оставшихся случая тождественных частиц.

Пусть две из трех частиц, для определенности p_2 и p_3 , тождественные. Тогда $m_2 = m_3$, $c_2 = c_3$ и согласно определениям (3) $\gamma_{12} = \gamma_{31}$, а на решение Ψ^ε уравнения Шредингера (10) и его три фаддеевские компоненты Ψ_k^ε накладываются известные условия перестановочной симметрии [2]:

$$\Psi^\varepsilon = \pm P_{23} \Psi^\varepsilon; \quad \Psi_1^\varepsilon = \pm P_{23} \Psi_1^\varepsilon, \quad \Psi_2^\varepsilon = \pm P_{23} \Psi_3^\varepsilon, \quad \Psi^\varepsilon = \Psi_1^\varepsilon + (I \pm P_{23}) \Psi_2^\varepsilon. \quad (39)$$

Здесь и далее, где не оговорено, берется знак плюс или минус, если p_2 и p_3 бозоны или соответственно фермионы. Свойства перестановочной симметрии (14) гипергармоник и условия (39) порождают дополнительные ограничения на коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ рядов фаддеевских компонент (27) и комбинаций (28): $B_{Lab}^{1\ell} = 0$ при всех L, a и нечетном (четном) b , если p_1 и p_2 — бозоны (фермионы) и в любом случае $B_{Lab}^{2\ell} = B_{Lab}^{3\ell}$ при всех L, a и b . Из-за таких условий системы (31) и (34) упрощаются: в них индекс i принимает теперь не три, а два значения ($i = 1, 2$), при $i = 1$ индексы b' и b только четные (нечетные),

если p_2, p_3 – бозоны (фермионы), а комбинации (28) вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} {}^1B_{1Lab}^\ell &= B_{Lab}^{1\ell} + ((-1)^b \pm 1) \sum_{a'b'} (-1)^{b'} \langle ab | K(\gamma_{12}) | a'b' \rangle_{L\ell} B_{La'b'}^{2\ell}, \\ {}^2B_{Lab}^\ell &= \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{12}) | a'b' \rangle_{L\ell} B_{La'b'}^{1\ell} + \\ &\quad + B_{Lab}^{2\ell} \pm (-1)^b \sum_{a'b'} \langle ab | K(\gamma_{23}) | a'b' \rangle_{L\ell} {}^2B_{La'b'}^{2\ell}. \end{aligned} \quad (40)$$

Пусть теперь все три частицы тождественные. Тогда при любых $i, k = 1, 2, 3$ верны равенства $m_i = m_k$, $c_i = c_k$, $|\gamma_{ki}| = \pi/3$. Условия симметрии [2]

$$\Psi^\varepsilon = \pm P_{ki} \Psi^\varepsilon; \quad \Psi_i^\varepsilon = \pm P_{ki} \Psi_k^\varepsilon, \quad \Psi^\varepsilon = (I \pm P_{12} \pm P_{23}) \Psi_i^\varepsilon, \quad i \neq k = 1, 2, 3, \quad (41)$$

будут выполняться для искомой функции (19), если в рядах (20), (27) и суммах (28) положить $B_{Lab}^{1\ell} = B_{Lab}^{2\ell} = B_{Lab}^{3\ell}$ при всех L, a и b , а индексы b' и b брать четные или нечетные, если три частицы – бозоны или фермионы соответственно. Тогда в системах (31) и (34) индекс i будет принимать лишь одно значение ($i = 1$), индексы b' и b подчинятся тем же условиям четности, а формулы (28) примут совсем простой вид:

$${}^1B_{Lab}^\ell = \sum_{a'b'} \left(\delta_{aa'} \delta_{bb'} + 2 \left\langle ab \left| K\left(\frac{\pi}{3}\right) \right| a'b' \right\rangle_{L\ell} \right) B_{La'b'}^{1\ell}. \quad (42)$$

Учет описанных ограничений на коэффициенты $B_{Lab}^{i\ell}$ и индексы не вносит ничего существенного в анализ систем (31) и (34), а значит, и в его окончательные выводы: уравнение Шредингера (21) не имеет факторизованных точных решений (19), (20) с перестановочной симметрией (39) или (41) в случае центральных взаимодействий и обладает такими в случае нецентральных взаимодействий при условиях (37).

4. ПРИМЕРЫ

Для пояснения предложенного метода проанализируем самый простой случай. Пусть все взаимодействия S -волновые, а полный угловой момент равен нулю.

Так как $d = 0$ и $\ell = 0$, то полный угловой базис образуют гипергармоники Y_{L00}^{00} , индексы s, a', b', a и b могут принимать всюду только нулевые значения, а L и t – всегда четные числа: $L = 2(n-1)$, $t = 2(m-1)$, где m и n натуральные. Для всех искомых и известных коэффициентов с такими индексами удобно ввести сокращенные обозначения:

$$\begin{aligned} B_n^i &\equiv B_{Lab}^{i\ell}, \quad {}^iB_n \equiv {}^iB_{Lab}, \\ K_n(\gamma_{ki}) &\equiv \langle 00 | K(\gamma_{ki}) | 00 \rangle_{L0} = \frac{\sin 2n\gamma_{ki}}{n \sin 2\gamma_{ki}}. \end{aligned} \quad (43)$$

Тогда искомые функции (19) и (24) примут вид

$$\Psi^\varepsilon(r, \varphi_i; 4m^2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} r^{-2} Z_{2m}(z) \sum_{n=1}^m {}^iB_n \frac{\sin 2n\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}, \quad (44)$$

$$\Psi_i^\varepsilon(r, \varphi_i; 4m^2) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} r^{-2} Z_{2m}(z) \sum_{n=0}^m B_n^i \frac{\sin 2n\varphi_i}{\sin 2\varphi_i}. \quad (45)$$

Коэффициенты (30) с $a = 0$ и $b = 0$ не зависят от L, L' : $C_{LL}^{00} = 1/2$, а $C_{L,L\pm 2}^{00} = 1/4$. Поэтому последовательными подстановками (43) и

$$B_n^i = \frac{X_n^i}{n^2 - m^2}, \quad n = 1, 2, \dots, m-1; \quad X_m^i = B_m^i \quad (46)$$

в определения (28), (40), (42) и системы (31) и (34), соответствующие рассматриваемой перестановочной симметрии, получаем более удобные для анализа систему матричных уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^1 \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2 &= 0, \\ \mathbf{X}_{n-1} + \mathbf{D}^n \mathbf{X}_n + \mathbf{X}_{n+1} &= 0, \quad n = 2, 3, \dots, m-2, \\ \mathbf{X}_{m-2} + \mathbf{D}^{m-1} \mathbf{X}_{m-1} &= 0, \end{aligned} \quad (47)$$

и соответственно одно матричное уравнение

$$\mathbf{M}^t \mathbf{X}_m = -\frac{\mathbf{X}_{m-1}}{4}. \quad (48)$$

Систему (47) можно представить и одним матричным уравнением

$$\mathbf{A}^t \mathbf{X} = 0, \quad \mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{m-1})^T, \quad (49)$$

где $\mathbf{A}^t$ – блочно-трехдиагональная матрица. Блоки ее главной диагонали – матрицы $\mathbf{D}^n$, а все блоки нижней и верхней диагоналей – единичные матрицы.

Если все частицы разные, то в полученных уравнениях (47) и (48) все столбцы новых неизвестных коэффициентов X_n^i и матрицы трехмерные:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2, X_n^3)^T, \quad n = 1, 2, \dots, m, \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2}, \quad D_{ik}^n = (D_{ii}^n - 2)K_n(\gamma_{ki}); \\ M_{ii}^t &= c_i, \quad M_{ik}^t = c_i K_m(\gamma_{ki}), \quad k \neq i = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (50)$$

Если частицы p_2 и p_3 – тождественные бозоны, то из условия симметрии $B_{Lab}^{2\ell} = B_{Lab}^{3\ell}$ следует, что $X_n^2 = X_n^3$ при всех n , поэтому все столбцы и матрицы становятся двухмерными:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n &\equiv (X_n^1, X_n^2)^T, \quad n = 1, 2, \dots, m, \\ D_{ii}^n &= 2 + \frac{c_i}{n^2 - m^2}(1 + \delta_{i2}K_n(\gamma_{23})), \quad D_{ik}^n = \frac{c_i}{n^2 - m^2}(1 + \delta_{k2})K_n(\gamma_{12}); \\ M_{ii}^t &= c_i(1 + \delta_{i2}K_m(\gamma_{23})), \quad M_{ik}^t = c_i(1 + \delta_{k2}K_m(\gamma_{ki})), \quad k \neq i = 1, 2. \end{aligned} \quad (51)$$

Если p_1, p_2, p_3 – тождественные бозоны, то из-за условий симметрии ($X_n^i = X_n^k$ при любых i, k, n) все столбцы и матрицы уравнений (47) и (48) являются одномерными:

$$\mathbf{X}_n \equiv X_n^1, \quad \mathbf{D}^n = 2 + \frac{c_2}{n^2 - m^2} \left(1 + 2K_n \left(\frac{\pi}{3} \right) \right); \quad \mathbf{M}^t = c_2 \left(1 + 2K_m \left(\frac{\pi}{3} \right) \right). \quad (52)$$

Опишем наиболее экономный способ решения системы (47), основанный на известном методе прямой и обратной подстановок и удобный для операторного накопления [14]. Сначала все столбцы $\mathbf{X}_n$, начиная со второго, последовательно выражаем через первый столбец:

$$\mathbf{X}_2 = -\mathbf{D}^1 \mathbf{X}_1, \quad \mathbf{X}_3 = (\mathbf{D}^2 \mathbf{D}^1 - \mathbf{I}) \mathbf{X}_1, \dots \quad (53)$$

Таким образом исходную систему (47) или (49) сколь угодно большой, но конечной размерности сводим к уравнению

$$\mathbf{G}^t \mathbf{X}_1 = 0. \quad (54)$$

По построению размерность его матрицы $\mathbf{G}^t$ не превышает трех, а характеристическое уравнение (38) эквивалентно уравнению

$$\det \mathbf{G}^t = 0. \quad (55)$$

После того как найден корень c_2 этого уравнения и соответствующее ему решение $\mathbf{X}_1$ уравнения (54), все остальные столбцы $\mathbf{X}_n$, $n = 2, \dots, m-1$, последовательно вычисляем по формулам (53).

Как известно [15], матрицы $\mathbf{M}^t$ с элементами (50) или (51) вырождены при $t = 0, 2$ и невырождены при $t = 4, 6, \dots$. Следовательно, если $t = 4, 6, \dots$, а параметры c_1, c_2, c_3 взаимодействий удовлетворяют уравнению (55), то функции (44) и (45) будут нетривиальными точными решениями соответствующих уравнений (10) и (12). Как пример исследуем уравнение (55) в случае $t = 4$, когда $m = t/2 + 1 = 3$ и $\mathbf{G}^4 = \mathbf{I} - \mathbf{D}^2 \mathbf{D}^1$.

4.1. Три разные частицы. Характеристическое уравнение (55) является квадратным:

$$\det \mathbf{G}^4 = A c_2^2 + B c_2 + C = 0; \quad (56)$$

$$\begin{aligned} A &\equiv 15 + 2(t_1^2 - 1)c_1 + 2(t_3^2 - 1)c_3, \\ B &\equiv 2(t_1^2 - 1)c_1^2 + 2(t_3^2 - 1)c_3^2 - 390 - \\ &\quad - 2(16t_1^2 + 5t_1 - 36)c_1 - 2(16t_3^2 + 5t_3 - 36)c_3 + \\ &\quad + \frac{2}{3}(4(t_1^2 + t_2^2 + t_3^2) + t_1 + t_2 + t_3 - 12)c_1 c_3 - \\ &\quad - \frac{2}{3}(\cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{31}) + \cos 2(\gamma_{12} - \gamma_{23}) + \cos 2(\gamma_{31} - \gamma_{23}))c_1 c_3, \\ C &\equiv 15(c_1^2 + c_3^2) + 2((t_2^2 - 1)(c_1 + c_3) - 16t_2^2 - 5t_2 + 36)c_1 c_3 - \\ &\quad - 390(c_1 + c_3) + 1800, \\ t_1 &\equiv \cos 2\gamma_{12}, \quad t_2 \equiv \cos 2\gamma_{31}, \quad t_3 \equiv \cos 2\gamma_{23}, \end{aligned}$$

и поэтому может иметь не более двух действительных решений: $c_2 = c_2^+$ и $c_2 = c_2^-$. Их исследование начнем с предельных случаев (5).

При $m_1 = 0$ в исследуемом уравнении (56) $t_1, t_2 = -1$, $t_3 = 1$, поэтому $A = 15$ и при любом c_3 дискриминант $D = B^2 - 4AC > 0$. Значит, имеются два разных ($c_2^+ \neq c_2^-$) непрерывных по c_1 и не зависящих от m_2 решения:

$$c_2^\pm(c_1; c_3, 0, m_2) = -\frac{5}{3}c_1 - c_3 + 13 \pm \frac{1}{3}(16c_1^2 - 156c_1 + 441)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $m_1 = \infty$ и $m_2 = m_3$, то при любом c_3 в точке $c_1 = c_1^s \equiv 15/2$ коэффициент $A = 15 - 2c_1$ обращается в нуль, но всегда $B \neq 0$ и $D > 0$. Поэтому решение c_2^+ терпит разрыв второго рода в точке c_1^s , а решение c_2^- непрерывно:

$$c_2^\pm(c_1; c_3, m_1, m_2) = -\frac{B^2}{2A} \left(1 \pm \text{sign}(c_1^s - c_1) \left(1 - 4\frac{AC}{B^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right). \quad (57)$$

Рассмотрим все оставшиеся случаи, когда $m_1, m_2 \in (0, \infty)$. Теперь в отличие от случая $m_1 = \infty$ положение нуля c_1^s функции A зависит от c_3 ,

$$c_1 = c_1^s \equiv \frac{15 + 2(t_3^2 - 1)c_3}{2(1 - t_1^2)},$$

но $B \neq 0$ и $D > 0$ всегда, поэтому существуют два разных решения (57), причем решение c_2^+ терпит разрыв в точке $c_1 = c_1^s$, а решение c_2^- — всюду непрерывная функция.

Для наглядного представления всех характерных особенностей семейства решений $c_2^\pm$ на рис. 1 в координатной плоскости (c_1, c_2) изображены графики функций $c_2^\pm$ при одинаковых $m_1 = 2$ и $m_2 = 4$, но разных c_3 , равных -2 и $+2$. Перечислим главные особенности функций $c_2^\pm$. График решения c_2^+ всегда имеет горизонтальную, $c_1 = c_1^s$, и вертикальную,

$$c_2 = c_2^s \equiv \frac{15 + 2(t_2^2 - 1)c_3}{2(1 - t_1^2)},$$

асимптоты, пересекающиеся в точке (c_1^s, c_2^s) , лежащей на прямой

$$c_2 = \frac{1 - t_2^2}{1 - t_1^2} c_1 + \frac{15}{2}(t_2^2 - t_1^2).$$

При любых фиксированных m_1, m_2 и c_3 выполняются неравенства $c_2^+ < c_2^s$, если $c_1 < c_1^s$, и $c_2^+ > c_2^s$, если $c_1 > c_1^s$. Поэтому если c_3 возрастает или убывает, то точка (c_1^s, c_2^s) смещается по этой прямой вниз или соответственно вверх; таким же образом при изменении c_3 смещаются и графики функций $c_2^\pm$. Следовательно, при любых массах и параметре c_3 для любого c_1 найдутся два значения $c_2 = c_2^\pm$ такие, что соответствующие им две функции (44) с индексом $m = 3$ будут точными решениями уравнения Шредингера (21). В трехчастичных состояниях, описываемых такими всюду регулярными волновыми функциями, ни при каких $E \geq 0$, c_1, c_3 и $c_2 = c_2^\pm$ не происходит “падения” частиц ни в точку тройного ($r = 0$), ни в точки парных ($x_k = 0$, $k = 1, 2, 3$) столкновений. Из определений коэффициентов (56) и формул (57) следует, что $c_2^- \rightarrow \infty$ при

Рис. 1. Функции $c_2^\pm(c_1; c_3, m_1, m_2)$ при $m_1 = 2$, $m_2 = 4$, $c_3 = -2$ (сплошные линии) и при $c_3 = 2$ (штриховые).

$c_1 \rightarrow -\infty$ и любом c_3 . Значит, даже если условие (1) при $c = c_1$ и $b = 0$ не выполняется ($c_1 < -1/4$) и две частицы p_2 и p_3 в отсутствие третьей “падают друг на друга”, то в трехчастичной системе (p_1, p_2, p_3) их “падение” в состоянии с волновой функцией (44) предотвращается отталкивающим взаимодействием между частицами p_1 и p_3 . В этом смысле сильное притяжение ($c_1 \rightarrow -\infty$) в одной паре частиц компенсируется соответствующим ($c_2 = c_2^- \rightarrow \infty$) сильным отталкиванием в другой паре частиц, и асимптотическое поведение корня c_2^- характеристического уравнения (56) интуитивно понятно. Поведение корня c_2^+ при $c_1 \rightarrow c_1^s - 0$ выглядит необычно. В этом случае (см. рис. 1) бесконечно сильное притяжение ($c_2 = c_2^+ \rightarrow -\infty$) в паре (p_1, p_3) компенсируется *конечными* ($c_1 < c_1^s$, $c_3 < \infty$) отталкиваниями в других парах частиц.

4.2. Две частицы – тождественные бозоны. Теперь, в отличие от предыдущего случая, всегда $m_2 = m_3$ и $c_2 = c_3$. Поэтому уравнение (55) более простое:

$$\det \mathbf{G}^4 = A c_2^2 + B c_2 + C = 0;$$

$$\begin{aligned} A &\equiv 12t_1^2, & B &\equiv 4((2t_1^2 - t_1 + 2)c_1 - 24t_1^2 - 15), \\ C &\equiv 3(c_1^2 - 6)(c_1 - 20), & t_1 &\equiv -(1 + m_1)^{-1}, \end{aligned} \quad (58)$$

а его действительные решения $c_2 = c_2^\pm(c_1; m_1)$ зависят от одного аргумента c_1 и одного параметра m_1 . Анализ всех таких решений начнем с предельных случаев (5).

При $m_1 = 0$ в уравнении (58) $t_1 = 1$, $A > 0$ и $D = B^2 - 4AC > 0$ для любых c_1 . Поэтому его решения разные и нелинейные по c_1 :

$$c_2^\pm(c_1; 0) = -\frac{5}{6}c_1 + \frac{13}{2} \pm \frac{1}{6}(16c_1^2 - 156c_1 + 441)^{\frac{1}{2}}. \quad (59)$$

Если $m_1 = \infty$, то $A = 0$, а единственное решение терпит разрыв при $c_1 = c_1^s = 15/2$:

$$c_2(c_1; \infty) = \frac{3}{4} \frac{(c_1 - 6)(c_1 - 20)}{15 - 2c_1}. \quad (60)$$

В особом случае $m_1 = 3/5$ дискриминант D – полный квадрат переменной c_1 , поэтому оба решения – линейные функции аргумента c_1 :

$$c_2^+ \left(c_1; \frac{3}{5} \right) = -\frac{6}{25}c_1 + \frac{24}{5}, \quad c_2^- \left(c_1; \frac{3}{5} \right) = -\frac{8}{3}c_1 + 16. \quad (61)$$

При любых c_1 и $m_1 \neq 0, 3/5, \infty$ дискриминант $D > 0$, поэтому имеются два различных нелинейных по аргументу c_1 решения:

$$\begin{aligned} c_2^\pm(c_1; m_1) &= \frac{(t_1 - 2t_1^2 - 2)c_1 + 24t_1^2 + 15}{6t_1^2} \pm \frac{1}{6t_1^2} [4(t_1^4 - t_1^3 - t_1 + 1)c_1^2 + \\ &\quad + 6(8t_1^3 - 16t_1^4 + 13t_1^2 + 5t_1 - 10)c_1 + 9(64t_1^4 - 40t_1^2 + 25)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (62)$$

с соответствующими асимптотиками при $c_1 \rightarrow \pm\infty$:

$$c_2^\pm(c_1; m_1) \sim \alpha^\pm c_1, \quad \alpha^\pm \equiv \frac{1}{6t_1^2} \left((t_1 - 2t_1^2 - 2) \pm 2(1 - t_1)\sqrt{t_1^2 + t_1 + 1} \right). \quad (63)$$

Найденное семейство (59)–(62) всех решений уравнения (58) обладает особыми свойствами: $c_2^+(20; m_1) = c_2^-(6; m_1) = 0$ при всех m_1 , но значения $c_2^\pm$ при $c_1 = 0$ зависят от m_1 :

$$c_2^\pm(0; m_1) = \frac{1}{6t_1^2} (24t_1^2 + 15 \pm 3(64t_1^4 - 40t_1^2 + 25)^{\frac{1}{2}}).$$

Благодаря этим свойствам семейства и его непрерывности по параметру m_1 при любых c_1 в координатной плоскости (c_1, c_2) графики всех решений c_2^- пересекают ось абсцисс в точке $(6, 0)$, а графики всех решений c_2^+ – в точке $(20, 0)$, график

Рис. 2. Функции $c_2^{\pm}(c_1; m_1)$ при $m_1 = 0$ (сплошные линии) и при $m_1 = \infty$ (штриховые).

решения $c_2^{+}(c_1; m_1)$ или $c_2^{-}(c_1; m_1)$ при любом $m_1 \in (0, \infty)$ проходит между графиками соответствующих предельных решений $c_2^{\pm}(c_1; 0)$ и $c_2^{\pm}(c_1, \infty)$ (см. рис. 2).

В рассматриваемом случае, в отличие от предыдущего случая трех разных частиц, выражения для коэффициентов B_n^i рядов (45) настолько компактные, что их стоит вывести в явном виде. При $c_2 = c_2^{\pm}$ оба уравнения двумерной системы (54), т.е. системы

$$(\mathbf{I} - \mathbf{D}^2 \mathbf{D}^1) \mathbf{X}_1 = 0,$$

линейно зависимы. Поэтому элемент X_1^1 искомого столбца $\mathbf{X}_1 = (X_1^1, X_1^2)^T$ можно задать любым числом, кроме нуля, затем исключить из этой системы первое уравнение, а второе разрешить относительно X_1^2 . Потом по формулам (53) нетрудно найти столбец $\mathbf{X}_2 = -\mathbf{D}^1 \mathbf{X}_1$, затем вычислить столбец $\mathbf{X}_3$ как решение системы (48) при $m = 3$ и, наконец, с помощью соотношений (46) определить все коэффициенты B_n^i . При выборе $X_1^1 = -8$ получаются два набора B_n^{i+} и B_n^{i-} коэффициентов B_n^i , отвечающих решениям

$c_2 = c_2^\pm$ уравнения (58), причем $B_1^{1\pm} = -1$, а

$$\begin{aligned} B_1^{2\pm} &= \frac{c_2^\pm}{2f^\pm} (c_1 - 10 + 2t_1(t_1 c_2^\pm - 2)), \\ B_2^{1\pm} &= \frac{4}{5f^\pm} (10(6 - c_2^\pm) + t_1(c_1 + 2t_1(c_2^\pm - 8))c_2^\pm), \\ B_2^{2\pm} &= \frac{2c_2^\pm}{5f^\pm} (10 - c_1 - 2t_1(c_2^\pm - 8)), \\ B_3^{1\pm} &= \frac{15}{8g^\pm} ((8t_1^2(t_1^2 - 1) + 3)c_2^\pm B_2^{1\pm} + (1 - 4t_1^2)c_1 B_2^{2\pm}), \\ B_3^{2\pm} &= \frac{15}{16g^\pm} ((1 - 4t_1^2)c_2^\pm B_2^{1\pm} + 3c_1 B_2^{2\pm}); \\ f^\pm &\equiv (c_1 - 10)(c_2^\pm - 6) + 2t_1^2 c_2^\pm (c_2^\pm - 8), \quad g^\pm \equiv (1 - t_1^2)^2 c_1 c_2^\pm. \end{aligned}$$

Как было показано, при любых массах и для любого значения c_1 найдутся два значения $c_2 = c_3 = c_2^\pm$ такие, что соответствующие им две функции (44) с индексом $m = 3$ и коэффициентами $B_n^{1\pm}$ будут точными решениями уравнения Шредингера (21). Так как в асимптотиках (63) коэффициенты пропорциональности $\alpha^\pm$ отрицательные, то такие регулярные решения существуют даже при сколь угодно сильном притяжении ($c_1 \rightarrow -\infty$) в паре частиц p_2, p_3 и соответствующем ему достаточно сильном отталкивании ($c_2 = c_3 = c_2^\pm \sim \alpha^\pm c_1 > 0$) в двух других парах частиц. Следовательно, даже если условие (1) при $c = c_1$ и $b = 0$ не выполняется ($c_1 < -1/4$) и два бозона p_2 и p_3 в отсутствие третьей частицы p_1 “падают друг на друга”, то в трехчастичной системе, содержащей эти же бозоны, их “падение” в состоянии (44) предотвращается отталкивающими взаимодействиями с третьей частицей.

4.3. Три тождественных бозона. Теперь $m_k = 1$ и $c_k = c_2$ при всех $k = 1, 2, 3$. Поэтому характеристическое уравнение (55) имеет вид $c_2 - 4 = 0$. Его корни $c_2 = 4$ отвечают коэффициенты $B_1^1 = 1$, $B_2^1 = -4/5$ и $B_3^1 = -1$.

Случай трех тождественных бозонов подробно описан в работе [5]. Дополним ее важными замечаниями, справедливыми при любом $t = 2(m - 1)$.

Матрица $\mathbf{A}^t$ системы (49) является трехдиагональной и симметричной матрицей с диагональными элементами (52). Эта матрица имеет диагональное преобладание, если $c_2 \leq 0$. Поэтому все корни $c_2^1, \dots, c_2^{m-1}$ характеристического уравнения (55) действительные и положительные.

Если, последовательно полагая $n = 1, 2, \dots, m$, вычислять детерминанты d_n главных миноров порядка n матрицы $\mathbf{A}^t$ разложением по элементам их последних строк, то получится рекуррентная цепочка равенств

$$d_1 = \mathbf{D}^1, \quad d_2 = \mathbf{D}^2 d_1 - 1, \quad d_n = \mathbf{D}^n d_{n-1} - d_{n-2}, \quad n = 3, \dots, m-1; \quad \det \mathbf{A}^t = d_{m-1},$$

согласно которой $d_{m-2} \neq 0$, если $\det \mathbf{A}^t = 0$. Следовательно, только два уравнения системы (49) для искоемых коэффициентов X_n^1 могут быть линейно зависимыми. Значит, все корни $c_2^1, \dots, c_2^{m-1}$ разные.

Итак, если в системе трех тождественных бозонов взаимодействия притягивающие ($c_2 < 0$), то функция типа (44) не может быть точным решением уравнения Шредингера (21), а в противном случае для любого $t = 4, 6, \dots$ существуют $m - 1 = t/2$ разных значений $c_2 > 0$, при которых такие функции – точные решения.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основной результат работы – доказательство критерия существования точных решений (19), (20) уравнения Шредингера (21) с нецентральными взаимодействиями (7) и полное описание метода построения этих решений и их фаддеевских компонент. Последние можно использовать как эталонные для тестов алгоритмов численного решения уравнений Фаддеева.

Основные физические выводы таковы. Все решения (2) двухчастичного уравнения Шредингера с потенциалом центробежного типа сингулярны в точке парного столкновения. Присутствие третьей частицы радикально изменяет ситуацию: при условиях (37) существуют всюду регулярные решения трехчастичного уравнения Шредингера с парными взаимодействиями того же типа. Из примеров следует, что даже если условие “падения” выполняется в выбранной паре частиц, то для системы трех частиц при вполне определенных параметрах взаимодействий в других парах частиц такого “падения” не происходит.

Список литературы

- [1] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
- [2] С. П. Меркурьев, Л. Д. Фаддеев. Квантовая теория рассеяния для систем нескольких частиц. М.: Наука, 1985.
- [3] В. В. Пупышев. ЭЧАЯ. 1999. Т. 30. С. 1562.
- [4] Y. Avishai. J. Math. Phys. 1975. V. 16. P. 1491.
- [5] V. V. Pupyshov. Phys. Lett. A. 1989. V. 140. P. 151.
- [6] Р. И. Джибути, Н. Б. Крупеникова. Метод гиперсферических функций в квантовой механике нескольких тел. Тбилиси: Мецниереба, 1984.
- [7] Н. Я. Виленкин. Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1965.
- [8] В. В. Пупышев. ЯФ. 1999. Т. 62. С. 1955.
- [9] J. Raynal, J. Revai. Nuovo Cimento. A. 1970. V. 68. P. 612.
- [10] Э. Камке. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
- [11] М. Абрамовиц, И. Стиган. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979.
- [12] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. Интегралы и ряды. Специальные функции. М.: Наука, 1983. С. 581.
- [13] П. Ланкастер. Теория матриц. М.: Наука, 1978.
- [14] В. В. Воеводин. Вычислительные основы линейной алгебры. М.: Наука, 1977.
- [15] В. В. Пупышев. Физические и ложные слагаемые центральных парных взаимодействий. Препринт Р4-2000-136. Дубна: ОИЯИ, 2000.

Поступила в редакцию 18.I.2001 г.