Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Б. Саакян, Производство энтропии по упрощенной динамике в системах спиновых стекол, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 288–308

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf497>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 12:04:38

© 2001 г.

Д. Б. Саакян*

ПРОИЗВОДСТВО ЭНТРОПИИ ПО УПРОЩЕННОЙ ДИНАМИКЕ В СИСТЕМАХ СПИНОВЫХ СТЕКОЛ

В моделях спиновых стекол упраздняется условие экстремума по одному из параметров порядка. Из имеющегося выражения для статсуммы выводится эффективный гамильтониан для этого параметра и соответствующая энергия. Релаксация системы рассматривается как обмен энергий между степенями свободы, связанными с медленным параметром порядка, и остальной частью системы. Уже на этом уровне без спецификации временной динамики можно указать на точки стекольного захвата в фазовом пространстве исходя лишь из статических решений. Предлагается феноменологическая упрощенная динамика, которая имеет в состоянии равновесия обычное (в статике) решение.

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы возрос интерес к динамике моделей спиновых стекол и биополимеров [1], [2]. Для исследования динамики моделей среднего поля был разработан подход, в котором усреднение по случайным константам связи производилось методом континуального интегрирования [3]–[5]. При этом получалась система интегродифференциальных уравнений для корреляторов и функций отклика. В рамках суперсимметричного полевого подхода исходная ланжевенова динамика для спинов приводит к континуально-интегральному представлению корреляторов. Переход к неэргодической фазе можно провести, анализируя уравнения для динамических параметров порядка.

В данной статье предлагается принципиально новый, упрощенный (и, как следствие, несколько огрубленный) подход к динамике среднеполевых моделей спинового стекла. Фактически в данном подходе состояние системы в каждый момент описывается на языке статических параметров порядка, возникающих при исследовании статики задачи. Свободная энергия рассматривается как функция этих параметров (вместо бесконечного числа спинов). В точке равновесия все параметры порядка определяются из условия экстремума. Предлагается ввести временную иерархию и соответственно сделать

*Ереванский физический институт, Ереван, Армения

один параметр порядка медленным. При оптимизации свободной энергии по остальным параметрам порядка вычисляется их значение, и свободная энергия превращается в функцию от медленного параметра порядка. Для этого (медленного) параметра порядка можно определить соответствующую энергию. Поскольку известна полная энергия, то можно вычислить энергию и остальной (быстрой) части системы.

Пусть при решении среднеполевой модели для статсуммы получается следующее представление:

$$Z = \int dm Z(m, \beta) \equiv \int dm e^{\ln Z(m, \beta)}. \quad (1)$$

Параметру порядка можно сопоставить гамильтониан

$$-\frac{\ln Z(m, \beta)}{\beta}. \quad (2)$$

Тогда, наряду с полной энергией всей системы

$$-E_{\text{tot}} = \frac{d}{d\beta} \ln Z(m, \beta), \quad (3)$$

можно определить также энергию, связанную с параметром m ,

$$-E_m = \frac{f(m, \beta)}{\beta}, \quad f(m, \beta) = \ln Z(m, \beta). \quad (4)$$

Если в ходе релаксации изолировать данную систему, то будет происходить своеобразный обмен теплотой между быстрыми и медленными степенями свободы. (Обычно теплообмен происходит между разными телами.)

Ниже в этом разделе дается описание основной идеи данной статьи: как из статической картины делать выводы о возможных стекольных точках перехода в процессе динамики. Для этого не требуется никакой конкретизации динамики. Требуется всего лишь знание временной иерархии в процессе релаксации, когда некоторый параметр порядка медленно релаксирует. Вводится также некая общая упрощенная динамика, сохраняющая общую энергию системы. Во втором разделе рассматривается p -спиновая модель без магнитного поля при нарушении репличной симметрии. В третьем разделе рассматривается динамика p -спинового стекла в магнитном поле в реплично-симметричной фазе. В четвертом разделе изучена модель спинов с квадратичным взаимодействием, когда динамические константы имеют температуру, отличную от температуры спинов. Сначала приводятся статические формулы для этой модели с частичным размораживанием констант. В отличие от стандартного рассмотрения свободное распределение констант включается в меру интегрирования. Полученные формулы достаточны для нахождения точек стекольного захвата. Для определения динамики рассмотрена модель двуспинового стекла, предполагающая существование реплик при обратных температурах β и β_0 . В приложениях приведены детали вычислений.

Пусть среднеполевое решение модели, помимо параметра m , описывается еще и параметром q (связанным с быстрым движением). Через бесконечное время система окажется в устойчивой точке

$$\frac{d}{dm} f(m, \beta) = 0. \quad (5)$$

Будем считать, что система изолирована, так что

$$dE_{\text{tot}} = 0. \quad (6)$$

Нашей конечной целью является вычисление теплообмена между двумя частями системы при фиксированных значениях параметров m, β . После этого можно описать релаксацию любых величин. Оказывается, что уже на этом уровне (в предположении, что текущее состояние системы описывается через неравновесный медленный параметр q) можно найти критерии для определения точек захвата (состояние типа стекла) в фазовом пространстве. Если в какой-то точке, наряду с условием (6), будет выполняться дополнительное условие

$$dE_m = 0, \quad (7)$$

то система замерзнет в этой точке (вдали от равновесия). Для такой точки получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} \frac{\partial f}{\partial m} = \frac{\partial^2 f}{\partial \beta \partial m} \left(\frac{\partial f}{\partial \beta} - \frac{f}{\beta} \right). \quad (8)$$

При наличии k параметров порядка будем иметь

$$\det A = 0, \quad (9)$$

где матрица

$$A = \begin{pmatrix} f''_{\beta\beta} & f''_{m\beta} & f''_{q_1\beta} & \cdots & f''_{q_k\beta} \\ \beta f''_{\beta\beta} - f'_\beta & f'_{m\beta} & f'_{q_1\beta} & \cdots & f'_{q_k\beta} \\ f''_{q_1\beta} & f''_{q_1 m} & f''_{q_1 q_1} & \cdots & f''_{q_1 q_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f''_{q_k\beta} & f''_{q_k m} & f''_{q_k q_1} & \cdots & f''_{q_k q_k} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Полученные уравнения возникают как естественное расширение статики без какой-либо спецификации динамики. В рамках ланжевеновой динамики [3]–[5] условие неустойчивости появляется также при обращении гессиана в нуль.

Построим феноменологическую динамику для параметра m . Пусть переменная m удовлетворяет уравнению Ланжевена [5] при обратной температуре β ,

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d \ln Z(m, \beta)}{dm} + \eta(t), \quad (11)$$

где

$$\langle \eta(t) \eta(t') \rangle = \frac{2}{\beta_0} \delta(t - t').$$

Для модели случайных энергий в спин-стекольной фазе имеем [6], [7]

$$\ln Z(m, \beta) = \frac{\beta^2 m}{4} + \frac{\ln 2}{m}, \quad (12)$$

где m является параметром Паризи при нарушении репличной симметрии. В парамагнитной фазе $m = 1$. Если первоначально было некоторое распределение $P(m)$ для переменной m , то оно будет эволюционировать в соответствии с уравнением для броуновской частицы

$$\frac{\partial P(m, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 P(m, t)}{\partial m^2} - \frac{\partial \left[\frac{\partial H}{\partial m} P(m, t) \right]}{\partial m}. \quad (13)$$

Здесь мы ограничиваем изменение m областью $0 < m < 1$. Ввиду простоты задачи можно было бы прямо исследовать это уравнение для описания релаксации, во всяком случае для медленных релаксационных процессов. Недостаток ланжевеновой динамики состоит в несохранении полной энергии системы. Мы же хотим описать релаксацию в изолированной системе (с сохранением энергии).

Будем постулировать следующее уравнение для эволюции функции $g(m, \beta)$ от параметров порядка:

$$\tau \frac{dg}{dt} = g''_{mm}(m, \beta) + g'_m(m, \beta) f'_m(m, \beta_0). \quad (14)$$

Усредняя правую часть этого выражения по распределению (1) при $\beta = \beta_0$, имеем

$$\int dm e^{f(m, \beta)} (g''_{mm}(m, \beta) + g'_m(m, \beta) f'_m(m, \beta)) = 0, \quad (15)$$

где, как и ранее,

$$f(m, \beta) = \ln Z(m, \beta).$$

В формуле (15) $Z(m, \beta)$ – статсумма при фиксированном значении параметра порядка m . Второе слагаемое в правой части (14) является простейшим выражением от производных функций $f(m)$, $g(m)$. Оно однозначно определяет первый член в правой части (14). Если мы добавим ко второму слагаемому выражения типа $g''f'$, $g'f''$, то получим дополнительно в сумме лишь члены g''' , $g''f'$. Таким образом, выражение (14) является простейшим из возможных.

Величину β_0 находим из условия

$$-\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = f'''_{\beta mm}(m, \beta) + f''_{m\beta} f'_m(m, \beta_0) = 0. \quad (16)$$

Установив значение β_0 , можно вычислить

$$-\frac{dE_m}{dt} = \frac{f''_{mm}(m, \beta) + f'_m(m, \beta) f'_m(m, \beta_0)}{\beta}. \quad (17)$$

Нас интересует изолированная система с $E_{\text{tot}}(m, \beta) = \text{const}$. Найдем на линии $E_{\text{tot}} = \text{const}$ точку $(m + \delta m, \beta + \delta \beta)$ такую, что

$$E_m(m + dm, \beta + d\beta) = E_m(m, \beta) + dt \frac{dE_m}{dt}. \quad (18)$$

Это означает, что за время dt система сдвигается из точки (β, m) в точку $(\beta + \delta\beta, m + \delta m)$. Повторяя многократно эту процедуру, получаем эволюцию переменных $m(t), \beta(t), \beta_0(t)$.

2. p -СПИНОВОЕ СФЕРИЧЕСКОЕ СТЕКЛО

Рассмотрим среднеполевую модель p -спинового стекла с гамильтонианом

$$H = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p} s_{i_1} \dots s_{i_p} \quad (19)$$

и непрерывными спинами s_i ,

$$\sum_{i=1}^N s_i^2 = N. \quad (20)$$

Здесь

$$M = \frac{N!}{p!(N-p)!}$$

констант $j_{i_1, \dots, i_p}$ имеют нормальное распределение с дисперсией

$$\overline{j_{i_1, \dots, i_p}^2} = \frac{N}{2M}. \quad (21)$$

Решение данной модели получено в статье [8]. Мы приведем лишь необходимые нам формулы из этой статьи. Свободная энергия выражается через параметры порядка m, q соотношением

$$f(\beta, m, q) = \frac{\beta^2}{4} [1 - (1 - m)q^p] + \frac{1}{2m} \ln(1 - q + mq) + \frac{m-1}{2m} \ln(1 - q). \quad (22)$$

Варьирование по q приводит к уравнению

$$\frac{\beta^2}{2} q^{p-2} = \frac{1}{(1-q)(1-q+mq)}, \quad (23)$$

по m — к уравнению

$$\frac{\beta^2}{2} q^p = \frac{1}{m^2} \ln \frac{1-q+mq}{1-q} - \frac{1}{m} \frac{q}{1-q+mq}. \quad (24)$$

Вдали от равновесия можно не учитывать уравнение (23). Для энергий E_{tot}, E_m получаем

$$-E_{\text{tot}} \equiv E = \frac{\beta}{2} [1 - (1 - m)q^p], \quad (25)$$

$$-E_m = \frac{\beta}{4} [1 - (1 - m)q^p] + \frac{1}{2m\beta} \ln(1 - q + mq) + \frac{m-1}{2m\beta} \ln(1 - q). \quad (26)$$

Точке стекольного захвата соответствует система уравнений

$$dE_{\text{tot}} = 0, \quad dE_m = 0, \quad (27)$$

из которой следует, что

$$\begin{aligned} \frac{4q^{-(p-2)}}{\beta^3} d\beta + (q - q^2) dm + \left[2q(1 - m) + m + \frac{2(p-2)q^{-(p-1)}}{\beta^2} \right] dq &= 0, \\ (1 - (1 - m)q^p) d\beta + \beta q^p dm - p\beta(1 - m)q^{p-1} dq &= 0, \\ \left\{ \frac{1}{4} [1 - (1 - m)q^p] - \frac{1}{2m\beta^2} \ln(1 - q + mq) - \frac{m-1}{2m\beta^2} \ln(1 - q) \right\} d\beta + \\ + \left\{ \frac{\beta q^p}{4} - \frac{1}{2m^2\beta} \ln \frac{1 - q + mq}{1 - q} + \frac{q}{2m\beta^2(1 - q + mq)} \right\} dm &= 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Последнее уравнение получено дифференцированием уравнения (22). Выразим теперь величины m, β через q, E :

$$q^{p-2}(1 - q)(1 - q + mq) \frac{\beta^2}{2} = \frac{(1 - q^p + mq^p)^2}{2E^2}, \quad (29)$$

$$2E^2 q^{p-2}(1 - q)(1 - q + mq) = (1 - q^p)^2 + m^2 q^{2p} + 2(1 - q^p)mq^p, \quad (30)$$

$$m^2 q^{2p} + 2mq^{p-1}[q(1 - q^p) - E^2(1 - q)] + (1 - q^p)^2 - 2E^2 q^{p-2}(1 - q)^2 = 0. \quad (31)$$

Параметр m находим из последнего уравнения. Для определения обратной температуры β рассмотрим систему уравнений

$$\beta^2(1 - q + mq) = \frac{2}{(1 - q)q^{p-2}}, \quad (32)$$

$$\beta(1 - q^p + mq^p) = 2E. \quad (33)$$

Имеем

$$\beta m = \frac{2E}{q^p} - \frac{(1 - q^p)\beta}{q^p}, \quad (34)$$

откуда следует, что

$$\beta^2(1 - q) + \beta q \left[\frac{2E}{q^p} - \frac{(1 - q^p)\beta}{q^p} \right] - \frac{2}{(1 - q)q^{p-2}} = 0, \quad (35)$$

$$\beta^2 \left[(1 - q) - \frac{1 - q^p}{q^{p-1}} \right] + \frac{2\beta E}{q^{p-1}} - \frac{2}{(1 - q)q^{p-2}} = 0. \quad (36)$$

Функцию $\beta(E, q)$ определяем из последнего уравнения. Чтобы найти β_0 , необходимо решить уравнение

$$f_{\beta mm}'''(\beta, m) + f_{\beta m}'(\beta, m)f_m'(\beta_0, m) = 0. \quad (37)$$

Имея значение β_0 , можно вычислить dE_m/dt по формуле (18). В приложении А приведены все необходимые формулы.

3. МОДЕЛЬ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Рассмотрим теперь p -спиновую сферическую модель в магнитном поле

$$H = - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p} s_{i_1} \dots s_{i_p} + h \sum_i s_i. \quad (38)$$

Изучим для простоты реплично-симметричный случай. Нас интересует статсумма $Z(\beta, M)$ при фиксированной намагниченности M . Ограничение

$$\sum_i s_i = NM \quad (39)$$

приводит к интегрированию в фазовом пространстве

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dh^0 \exp \left[-h^0 \left(\sum_i s_i - MN \right) \right]. \quad (40)$$

Вычислим среднюю статсумму для n копий нашей системы ($n \rightarrow 0$). Введем для всех пар индексов α, β тождество

$$\begin{aligned} 1 &= \int dq_{\alpha\beta} \delta \left(q_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \sum_i s_i^\alpha s_i^\beta \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} dq_{\alpha\beta} d\lambda_{\alpha\beta} \exp \left[\frac{1}{2} N \lambda_{\alpha\beta} \left(q_{\alpha\beta} - \frac{1}{N} \sum_i s_i^\alpha s_i^\beta \right) \right], \end{aligned} \quad (41)$$

тогда получим для статсуммы гамильтониана (38) при связи (39) выражение

$$\begin{aligned} &\left\langle \prod_{\alpha=1}^n \frac{1}{2\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_{\alpha\alpha} \exp \left[i \lambda_{\alpha\alpha} \left(\frac{1}{N} \sum_i s_i^2 - 1 \right) \right] \times \right. \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \int dh_\alpha^0 \exp \left[\sum_{\alpha=1}^n h_\alpha^0 \left(\sum_i s_i - MN \right) - \right. \\ &\quad \left. \left. - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p} s_{i_1}^\alpha \dots s_{i_p}^\alpha + nhM \right] \right\rangle_j. \end{aligned} \quad (42)$$

Гауссово интегрирование в (42) по константам j дает с учетом (41)

$$\begin{aligned} &\exp N \left(n + \sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha\beta}^p \right) \frac{\beta^2}{4} + \sum_{\alpha\beta} \frac{\lambda_{\alpha\beta}}{2} \left(N q_{\alpha\beta} - \sum_i s_i^\alpha s_i^\beta \right) + \\ &\quad + \sum_\alpha \left[\sum_i s_i^\alpha h_\alpha^0 s_i^\alpha + M(h - h_\alpha^0) \beta \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Здесь $q_{\alpha\beta}$ является спин-спиновым коррелятором, $\lambda_{\alpha\beta}$ — сопряженная к нему лагранжева переменная, h^0 получено из связи для намагниченности. Интегрирование по s_i дает

$$\begin{aligned} &\exp N \left(n + \sum_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha\beta}^p \right) \frac{\beta^2}{4} + \sum_{\alpha\beta} \lambda_{\alpha\beta} \frac{N}{2} q_{\alpha\beta} - \frac{N}{2} \text{Tr} \ln \lambda + \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_\alpha \sum_i \lambda_{\alpha\beta}^{-1} h_\alpha^0 h_\beta^0 + M \beta^0 (h - h_\alpha^0), \end{aligned} \quad (44)$$

где λ обозначает матрицу $\lambda_{\alpha\beta}$. В рамках репличной симметрии имеем

$$q_{\alpha\alpha} = 1, \quad q_{\alpha \neq \beta} = q, \quad h_\alpha^0 = h^0. \quad (45)$$

Дифференцирование выражения (44) по λ приводит к равенству

$$q_{\alpha\beta} = \lambda_{\alpha\beta}^{-1}. \quad (46)$$

Для матрицы

$$q_{\alpha\beta} = (1 - q)\delta_{\alpha\beta} + q \quad (47)$$

имеется одно собственное значение $(1 - q)$ и $(n - 1)$ собственных значений, равных $1 + n(1 - q)$. Окончательно получаем

$$\frac{\ln Z(\beta, M)}{N} = \frac{\beta^2(1 - q^p)}{4} + \frac{\ln(1 - q)}{2} + \frac{q}{2(1 - q)} + \frac{\beta^2(h^0)^2(1 - q)}{2} - h^0\beta M + \beta h M. \quad (48)$$

Вспомогательная переменная h^0 была введена в (40). Условие седловой точки по h^0 имеет вид

$$M = \beta h^0(1 - q). \quad (49)$$

Дифференцирование по q дает

$$M^2 = q - \frac{\beta^2 p(1 - q)^2 q^{p-1}}{2}. \quad (50)$$

Для полной энергии получаем выражение

$$-E_{\text{tot}} \equiv E = Mh + \frac{\beta(1 - q^p)}{2}. \quad (51)$$

Теперь рассмотрим M как медленный параметр порядка. С константами j связана энергия, которую будем обозначать через E_j ,

$$-E_j = \frac{\beta(1 - q^p)}{4} + \frac{\ln(1 - q)}{2\beta} + \frac{q}{2\beta(1 - q)} - \frac{M^2}{2(1 - q)} + Mh. \quad (52)$$

Преобразуя уравнения (49)–(51), получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} p\beta^2 &= \frac{2(M^2 - q)}{(1 - q)^2 p q^{p-1}}, \\ M &= \frac{E}{h} - \frac{\beta(1 - q^p)}{2h}, \\ M^2 - q &= \frac{E^2 - E\beta(1 - q^p)\beta + \frac{1}{4}\beta^2(1 - q^p)^2}{h^2} - q, \end{aligned} \quad (53)$$

из которой следует квадратное уравнение для $\beta = \beta(E, q)$,

$$\beta^2 \left[1 + \frac{(1 - q^p)^2}{2ph^2(1 - q)^2 q^{p-1}} \right] - \frac{2E(1 - q^p)\beta}{ph^2(1 - q)^2 q^{p-1}} + \frac{2(E^2 - qh^2)}{ph^2(1 - q)^2 q^{p-1}} = 0. \quad (54)$$

Из уравнения (51) имеем

$$M = \frac{E}{h} - \frac{\beta(1 - q^p)}{2h}. \quad (55)$$

Запишем уравнение для точки стекольного захвата. Оно соответствует обращению в нуль детерминанта следующей системы уравнений:

$$\begin{aligned} h dM + \frac{1-q^p}{2} d\beta - \frac{\beta p q^{p-1}}{2} dq &= 0, \\ 2M dM + p\beta(1-q)^2 q^{p-1} d\beta + \left[-1 + \frac{\beta^2}{2} p(p-1)(1-q)^2 q^{p-2} - \beta^2 p(1-q) q^{p-1} \right] dq &= 0, \\ -\frac{M dM}{(1-q)^2} + \left[\frac{(1-q^p)}{4} - \frac{\ln(1-q)}{2\beta^2} - \frac{q}{2(1-q)\beta^2} \right] d\beta &= 0. \end{aligned}$$

Для вычисления полной динамики необходимо решить уравнение

$$\frac{dE}{dt} = E''_{MM} + E'_M f'_M(\beta_0) = 0 \quad (56)$$

и подставить найденное значение β_0 в соотношение

$$\frac{dE_j}{dt} = [f''_{MM}(\beta) + 2f''_{Mq}(\beta)q'_M + f'_M(\beta)f'_M(\beta_0)] \frac{1}{\beta}. \quad (57)$$

В приложении Б приведены все необходимые вычисления.

4. СТЕКЛО КАК СИСТЕМА ИЗ СПИНОВ И МЕДЛЕННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНСТАНТ

4.1. p -Спиновое частично размороженное стекло. Рассмотрим теперь модель p -спинового сферического стекла, когда константы взаимодействия подобно спинам являются динамическими переменными, только более медленными, чем спины. Таким образом можно рассматривать термодинамику спинов при фиксированных константах. Случай, когда спины и константы имеют разные температуры, был рассмотрен при описании частичного закалывания в работах [9]–[11]. В отличие от этих работ у нас константы не имеют собственного гамильтониана. Гауссово интегрирование для них рассматривается всего лишь как мера интегрирования. Это спасает модель от появления бесконечной энтропии в ходе интегрирования.

При рассмотрении моделей с непрерывными переменными j и гамильтонианом $H(j)$ можно определить статсумму как

$$Z = \int D(j) \exp(-\beta H(j)),$$

где $D(j)$ – мера интегрирования, соответствующая кратности энергетической конфигурации в случае дискретных переменных. В нашем случае для меры интегрирования в пространстве констант возьмем

$$\begin{aligned} D(j) &= \exp(h(j)) \prod_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} dj_{i_1, \dots, i_p} \sqrt{\frac{2M}{N\pi}}, \\ h(j) &= -\frac{2N}{M} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p}^2, \end{aligned} \quad (58)$$

где общее число констант $j_{i_1, \dots, i_p}$ есть $M = N!/(p!(N-p)!)$. Для описания методами статистической физики модели с быстрыми спинами при обратной температуре β и медленными константами при обратной температуре β_j имеем [5] представление для статсуммы

$$Z = \int D(j) \left[\text{Tr}_{s_i} \exp \left(- \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p} s_{i_1} \dots s_{i_p} \right) \right]^n, \quad (59)$$

где

$$n = \frac{\beta_j}{\beta}. \quad (60)$$

В выражении (59) выполняется усреднение статсуммы для n копий данной системы спинов с гамильтонианом взаимодействия (19). Можно определить [11] полную энергию системы и энергию, связанную с константами j , с помощью соотношений

$$-E_{\text{tot}} = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(n, \beta), \quad -E_j = \frac{\partial}{\partial \beta} \ln Z(n, \beta). \quad (61)$$

Мы опять разлагаем полную энергию системы на две части, соответствующие константам и спинам. Когда система изолирована, движение происходит вдоль линии $E_{\text{tot}} = \text{const}$,

$$dE_{\text{tot}}(\beta, n) \equiv \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial n} dn = 0. \quad (62)$$

Если существует точка, где имеет место еще и уравнение

$$dE_j(\beta, n) \equiv \frac{\partial E_j}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial E_j}{\partial n} dn = 0, \quad (63)$$

то наша система захватывается в этой (стекольного типа) точке. Для такой точки имеем уравнение

$$\frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial \beta} \frac{\partial E_j}{\partial n} - \frac{\partial E_j}{\partial \beta} \frac{\partial E_{\text{tot}}}{\partial n} = 0. \quad (64)$$

Определим некую упрощенную динамику по аналогии с предложенной в разделе 1. Главным является определение потока энергии между спинами и константами при фиксированных значениях β, n . Имея выражение для такого потока, мы можем вычислить любые релаксационные процессы в рамках допущения, что константы взаимодействуют только со спинами через тепловой обмен, а спины могут напрямую взаимодействовать с внешним миром.

Опять зададим динамику. Для любой функции $g(\beta, j)$ и ее среднего

$$G(\beta, j) = \langle g(\beta, j) \rangle \quad (65)$$

предлагается динамическое уравнение

$$\frac{dG}{dt} = \left\langle \sum_k (g''_{j_k j_k}(\beta, j) + g'_{j_k}(\beta, j) f'_{1, j_k}(\beta_0, j)) \right\rangle, \quad (66)$$

где t – время, а усреднение взято по распределению $D(j)Z^n(j)$. Здесь

$$f_1(\beta, j) = f_0(\beta, j) + h(j), \quad f_0(\beta, j) = \ln Z(\beta, j). \quad (67)$$

Для E_{tot} , E_j имеем представления [8], следующие из (59),

$$-E_{\text{tot}} = \int D(j) f'_{0,\beta}(\beta, j), \quad -E_j = \int D(j) \frac{f_0(\beta, j)}{\beta}. \quad (68)$$

Полная энергия получена как усредненная энергия взаимодействия спинов, а энергия E_j получена из выражения (59), рассматриваемого как статсумма для констант. С учетом формул (66)–(68) сохранение полной энергии приводит к уравнению

$$\left\langle \sum_k (f'''_{0,\beta j_k j_k}(\beta, j) + f''_{0,\beta j_k}(\beta, j) f'_{1,j_k}(\beta_0, j)) \right\rangle = 0. \quad (69)$$

Здесь усреднение производится по $\exp(f_1(\beta, j))$, поэтому это уравнение исчезает при $\beta = \beta_0$. Таким образом, выбор первого члена в (69) определяет форму и второго члена. Решив уравнение (69), можно найти эффективный параметр β_0 как функцию от n , β , а затем вычислить эволюцию E_j ,

$$-\frac{d}{dt} E_j = \frac{1}{\beta} \left\langle \sum_k (f''_{0,j_k j_k}(\beta, j) + f'_{0,j_k}(\beta, j) f'_{1,j_k}(\beta_0, j)) \right\rangle. \quad (70)$$

Благодаря тому что мы рассмотрели $D(j)$ только как меру интегрирования, оба члена в правой части (69) теперь имеют одинаковый порядок величины.

4.2. Статика для стекла с двуспиновым взаимодействием. В случае $p = 2$ свободная энергия для n копий спинов из (19) имеет вид [4]

$$f = n \frac{1 + \ln 2\pi}{2} + \frac{\beta^2}{4} [(n^2 - n)q^2 + n] + \frac{n \ln(1 - q)}{2} + \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{nq}{1 - q} \right). \quad (71)$$

Для нахождения значений параметра q надо найти точку экстремума этого выражения. Имеется тривиальное решение $q_1 = 0$. Другие решения получаются из уравнения

$$(1 - n)q^2 + (n - 2)q + 1 - \frac{1}{\beta^2} = 0 \quad (72)$$

и имеют вид

$$q_{2,3} = \frac{2 - n \pm \sqrt{(n - 2)^2 - 4(1 - n)(1 - \beta^2)}}{2(1 - n)}. \quad (73)$$

При высоких температурах система находится в парамагнитной фазе с $q = 0$. При уменьшении температуры система переходит в спин-стекольную фазу с решением q_2 . Для $n < 2$ переход происходит при $\beta_c = 1$, при $n > 2$ точка перехода сдвигается. Для энергий получаем из выражений (68)

$$\begin{aligned} -E_{\text{tot}}(q, n, \beta) &= \frac{\beta}{2} [(n - 1)q^2 + 1], \\ -E_j(q, n, \beta) &= \frac{\ln(1 + \ln 2\pi)}{2\beta} + [(2n - 1)q^2 + 1] \frac{\beta}{4} + \frac{\ln(1 - q)}{2\beta} + \frac{q}{2\beta(1 - q + nq)}. \end{aligned} \quad (74)$$

Для определения точки стекольного захвата необходимо обратить в нуль детерминант системы уравнений

$$\begin{aligned}
& [(n-1)q^2 + 1] d\beta + \beta q^2 dn + \beta(n-1)2q dq = 0, \\
& \left\{ - \left[\ln(1 + \ln 2\pi) + \frac{q}{1-q+nq} + \ln(1-q) \right] \frac{1}{\beta^2} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{(2n-1)q^2 + 1}{2} \right\} d\beta + \left\{ \beta q^2 - \frac{q^2}{\beta(1-q+nq)^2} \right\} dn + \\
& \quad + \left\{ (2n-1)\beta q - \frac{1}{\beta(1-q)} + \frac{1}{(1-q+nq)^2\beta} \right\} dq = 0, \\
& 2 \frac{d\beta}{\beta^3} - (q^2 - q) dn + [2q(1-n) + n-2] dq = 0.
\end{aligned} \tag{75}$$

Здесь первые два уравнения соответствуют сохранению энергий, последнее – есть дифференциальная форма уравнения (72). Для решения уравнения (70) надо уметь усреднять по распределениям j величины вида $Z^n(j, \beta) f(j, \beta_0)$. Для этого рассмотрим решение модели с $(m+n)$ репликами при разных температурах.

4.3. Решение модели с $(m+n)$ репликами при разных температурах. Нам надо вычислить среднее $\langle \ln Z(j, \beta_0) \rangle$ с распределением $D(j) \sim Z^n(j, \beta)$ для j . С учетом представления

$$\ln Z = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{Z^m - 1}{m}$$

придется рассмотреть модель с $(m+n)$ репликами при $m \rightarrow 0$. При вычислении динамики по уравнению (70) понадобятся корреляторы между спинами из двух наборов s^α ($1 \leq \alpha \leq n$), s^β ($1 \leq \beta \leq m$),

$$s = \langle s_\alpha s_\beta \rangle, \quad r = \langle s_\gamma s_\delta \rangle, \quad 1 \leq \gamma \leq m. \tag{76}$$

Нас интересует среднее

$$\left\langle \exp \left[\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p \leq N} j_{i_1, \dots, i_p} \left(\beta \sum_{\alpha=1}^n s_{i_1}^\alpha \dots s_{i_p}^\alpha + \beta \sum_{\beta=1}^m s_{i_1}^\beta \dots s_{i_p}^\beta \right) \right] \right\rangle. \tag{77}$$

Использование в ходе интегрирования по j , s тождества

$$1 = \frac{N}{4\pi} \int_{-i\infty}^{i\infty} d\lambda_{q\delta} dq_{\gamma\delta} \exp \left\{ \frac{N}{2} \lambda_{\gamma\delta} \left(q_{\gamma\delta} - \frac{1}{N} \sum_i s_\gamma^i s_\delta^i \right) \right\} \tag{78}$$

приведет после интегрирования по j к выражению

$$\begin{aligned}
\langle Z^n(j, \beta) Z^m(j, \beta_0) \rangle = \exp \left\{ N \frac{\beta^2}{4} \sum_{\alpha_1, \alpha_2} q_{\alpha_1 \alpha_2}^p + N \frac{\beta_0^2}{4} \sum_{\beta_1, \beta_2} r_{\beta_1 \beta_2}^p + \right. \\
\left. + N \frac{\beta_0 \beta}{2} \sum_{\beta, \alpha} S_{\alpha, \beta}^p + \frac{N}{2} \lambda_{\gamma\delta} \left(Q_{\gamma\delta} - \sum_i s_\gamma^i s_\delta^i \right) \right\}.
\end{aligned} \tag{79}$$

Здесь $Q_{\gamma\delta}$ – спин-спиновый коррелятор. Интегрирование по s квадратичного по s слагаемого в экспоненте приводит к выражению [4]

$$\exp\left\{N \ln 2\pi - \frac{N}{2} \text{Tr} \ln \lambda\right\}. \quad (80)$$

Варьирование экспоненты (79) по $\lambda_{\alpha\beta}$ с учетом (80) дает уравнение

$$Q_{\gamma\delta} = -\lambda_{\gamma\delta}^{-1}. \quad (81)$$

У нас имеется $(m+n)$ реплик. Выберем индекс γ , $1 \leq \gamma \leq n$, как соответствующий индекс α из n -репличного набора, а $n < \delta \leq n+m$ как соответствующий индекс β из набора m реплик. Введем следующий анзац для $Q_{\gamma\delta} \equiv \hat{Q}$,

$$\hat{Q} = \bar{Q} + S. \quad (82)$$

Матрица $\bar{Q}$ состоит из двух диагональных квадратных блоков $\bar{q}$, $\bar{r}$, соответственно, $n \times n$ и $m \times m$, а S – прямоугольная матрица $n \times m$. Параметризуем эти матрицы через параметры порядка q, r, s ,

$$\begin{aligned} \bar{q} &= (1-q)\delta_{\alpha_1\alpha_2} + q, \\ \bar{r} &= (1-r)\delta_{\beta_1\beta_2} + r, \\ S_{\alpha\beta} &= s. \end{aligned} \quad (83)$$

У этих матриц диагональные элементы одинаковы, вне диагонали все элементы также равны друг другу. Такой же вид и у обратных матриц,

$$\bar{q}^{-1} = \frac{\delta_{\alpha_1\alpha_2}}{1-q} - \frac{q}{(1-q)(1-q+nq)}. \quad (84)$$

В ходе вычисления среднего (79) получим в экспоненте сумму соответствующих выражений для случая m и n реплик и слагаемое, пропорциональное s^2 . Перекрестные члены возникают еще при вычислении слагаемого

$$-\frac{N}{2} \text{Tr} \ln \lambda \equiv \frac{N}{2} \text{Tr} \ln \hat{Q}.$$

Рассматривая в этом выражении разложение по степеням недиагональной матрицы S и используя формулы

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln(1+X) &\approx \text{Tr} X - \frac{1}{2} \text{Tr} X^2, \\ \bar{Q}^{-1} \bar{S} &= s \bar{q}_{\alpha\beta}^{-1} P_{\beta a} + s \bar{r}_{ab}^{-1} P_{b\alpha}, \end{aligned} \quad (85)$$

получим для перекрестных членов в выражении $(N/2) \text{Tr} \ln \hat{Q}$ (матрица P является проектором с единичными ненулевыми элементами) формулу

$$\frac{1}{4} \text{Tr} \bar{Q}^{-1} \bar{S} \bar{Q}^{-1} \bar{S} = \frac{mns^2}{2(1-r)(1-q+nq)}. \quad (86)$$

Имея эту формулу, получаем для статсуммы с $(m + n)$ копиями (79) выражение

$$\begin{aligned} \ln \langle Z^n(\beta_0) Z^m(\beta) \rangle = & \frac{(1 + \ln 2\pi)(m + n)}{2} + \frac{\beta_0^2[(n^2 - n)q^2 + n]}{4} + \frac{\beta^2[(m^2 - m)q^2 + m]}{4} + \\ & + \frac{\beta_0 \beta m n s^2}{4} + \frac{n}{2} \ln(1 - q) + \frac{1}{2} \ln \left[1 + \frac{nq}{1 - q} \right] + \\ & + \frac{m}{2} \ln(1 - r) + \frac{mr}{2(1 - r)} - \frac{m n s^2}{2(1 - r)(1 - q + nq)}. \end{aligned} \quad (87)$$

Последнее выражение является суммой двух выражений типа (71) и вычисленного нами выражения (86).

Найдем параметры порядка из условия экстремума. Уравнение для q не изменилось (нас интересует предел $m \rightarrow 0$):

$$\frac{\beta_0^2(n^2 - n)q}{2} - \frac{n}{2(1 - q)} + \frac{n}{2(1 - q)(1 - q + nq)} = 0. \quad (88)$$

Приведем его к более удобному виду

$$\frac{1}{\beta_0^2} = (1 - q)(1 - q + nq). \quad (89)$$

Параметр r найдем из условия экстремума (87) по s ,

$$\beta \beta_0 - [(1 - r)(1 - q + nq)]^{-1} = 0, \quad (90)$$

$$\beta_0(1 - q) = \beta(1 - r). \quad (91)$$

Для вычисления производной от свободной энергии по r необходимо рассмотреть только члены

$$-\frac{1}{4} m \beta^2 r^2 + \frac{mr}{2(1 - r)} - \frac{m n s^2}{2(1 - r)(1 - q + nq)}$$

в соотношении (87). Дифференцирование по r дает уравнение

$$-\frac{1}{2} m \beta^2 r + \frac{mr}{2(1 - r)^2} - \frac{m n s^2}{2(1 - r)^2(1 - q + nq)} = 0 \quad (92)$$

или

$$n s^2 = (1 - q + nq) r [1 - \beta^2(1 - r)^2] = (1 - q + nq) r [1 - \beta_0^2(1 - q)^2] = nq \left[1 - \frac{\beta}{\beta_0}(1 - q) \right]. \quad (93)$$

Окончательно получаем

$$s^2 = q \left[1 - \frac{\beta}{\beta_0}(1 - q) \right]. \quad (94)$$

Необходимо также помнить, что имеется и тривиальное решение

$$s = 0. \quad (95)$$

Для свободной энергии получаем с учетом формул (89), (91), (94), что

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{1}{m} \ln \frac{\langle Z^n(\beta) Z^m(\beta_0) \rangle}{\langle Z^n(\beta) \rangle} = \frac{(1 + \ln 2\pi)}{2} + \frac{\ln(1-r)}{2} + \frac{r}{2(1-r)} + \frac{\beta^2(1-r^2)}{4}. \quad (96)$$

Используя (91), (94), находим для соответствующих производных уравнения

$$\frac{\partial s}{\partial n} = \frac{1}{2s} \left[1 - \frac{\beta}{\beta_0} + \frac{2\beta q}{\beta_0} \right] \frac{\partial q}{\partial n}, \quad (97)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta} = \frac{1}{2s} \left[1 - \frac{\beta}{\beta_0} + \frac{2\beta q}{\beta_0} \right] \frac{\partial q}{\partial \beta} - \frac{q(1-q)}{\beta_0}. \quad (98)$$

Этот набор уравнений описывает одну моду движения. При малых β_0 , когда $\beta_0 < \beta(1-q)$, имеем другие уравнения

$$q = 0, \quad r = 0, \quad s = 0. \quad (99)$$

Займемся изучением динамики. Имеем эффективный гамильтониан $f_1(j, \beta)$. Используя формулы, следующие из определения $f_0 = \ln Z(\beta, j)$,

$$\sum_k f''_{0,j_k j_k}(\beta, j) = \beta^2(1-q^2), \quad (100)$$

$$\sum_k f''_{0,j_k j_k}(\beta, j) f''_{0,j_k j_k}(\beta_0, j) = \beta^2 s^2, \quad (101)$$

получаем

$$-\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \sum_k f'''_{0,\beta j_k j_k}(j, \beta) + f''_{0,\beta j_k}(j, \beta)(h'_{j_k} + f'_{0,j_k}(\beta_0)), \quad (102)$$

$$-\beta \frac{dE_j}{dt} = \frac{1}{\beta} \left[\sum_k f'_{0j_k j_k}(j, \beta) + f'_{0j_k}(j, \beta)(h'_{j_k} + f'_{0,j_k}(\beta_0)) \right]. \quad (103)$$

Для краткости мы обозначили $j_k = j_{i_1, \dots, i_p}$. Таким образом, условие $dE_{\text{tot}}/dt = 0$ приводит к уравнению

$$-\frac{dE_{\text{tot}}}{dt} = \left[2\beta(1-q^2) - 2\beta^2 q \frac{\partial q}{\partial \beta} + \beta_0 s^2 + 2\beta\beta_0 \frac{\partial s}{\partial \beta} \right] M - \frac{4M}{N} \left[\beta f''_{\beta\beta} + f'_{\beta} \right] = 0. \quad (104)$$

Теперь можно вычислить ток

$$-\frac{dE_j}{dt} = [\beta(1-q^2) + \beta_0 s^p] M - \frac{4M}{N} f'_{\beta}. \quad (105)$$

Имея это выражение, можно исследовать различные релаксационные процессы, поскольку все термодинамические величины выражаются через параметры порядка. В рассмотренной модели существуют три температуры: две – для статики (β , $n\beta$) и одна – для динамики (β_0). Очень интересна ситуация, когда статика рассматривается в парамагнитной фазе, а динамика – в фазе спинового стекла.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что статика среднеполевых моделей позволяет естественным образом ввести некую феноменологическую динамику. Мы ввели подходящий набор параметров порядка, связанную с ним энергию и рассмотрели процесс релаксации как теплообмен между быстрыми и медленными переменными. Имеется возможность найти фазовый переход в динамике. При написании уравнения (14) мы предположили лишь гладкость распределения.

Приведен также сравнительный анализ полученных результатов с предложенным недавно подходом к изучению стекольной динамики, основанным на условии маргинальности [12]. Позднее этот подход был расширен в рамках суперсимметричного формализма [13]. Условие маргинальности допускает существование “окна времени”, когда стекольная система не успела еще термализоваться полностью, но близка к стационарному состоянию. Это выражается в уравнениях квазистационарного состояния, полученных в рамках ланжевеновой динамики. Выше описана более общая постановка задачи без предположения конкретной динамики. За это, однако, нам пришлось заплатить дальнейшим упрощением динамики. С учетом того, что сама ланжевенова динамика является лишь одной из возможных (она слишком сложна в стекольных системах), предложенная в этой работе динамика также имеет право на существование.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Динамика при нарушении репличной симметрии в p -спиновой сферической модели

Нам нужны переменные E''_{mm} , E'_m , f''_{mm} , f'_m . Для их вычисления удобно работать с парой переменных (q, m) , а затем перейти к паре (β, m) . Определим производные

$$\beta d\beta = \left[\frac{1}{(1-q)^2(1-q+mq)q^{p-2}} + \frac{1-m}{(1-q)(1-q+mq)^2q^{p-2}} - \frac{p-2}{(1-q)(1-q+mq)q^{p-1}} \right] dq, \quad (\text{A.1})$$

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = \frac{2}{\beta \left[\frac{1}{1-q} + \frac{1-m}{1-q+mq} - \frac{p-2}{q} \right]}. \quad (\text{A.2})$$

С их помощью находим, что

$$\frac{\partial^2 q}{\partial \beta \partial m} = - \frac{\left[\frac{1}{(1-q)^2} + \frac{(1-m)^2}{(1-q+mq)^2} + \frac{p-2}{q^2} \right] \frac{\partial q}{\partial m} \frac{2}{\beta} + \frac{\left[\frac{1}{1-q+mq} + \frac{(1-m)q}{(1-q+mq)^2} \right] \frac{2}{\beta}}{\left[\frac{1}{1-q} + \frac{1-m}{1-q+mq} - \frac{p-2}{q} \right]^2 \beta}. \quad (\text{A.3})$$

Для вычисления $\partial q / \partial m$, $\partial^2 q / \partial m^2$ рассмотрим сначала $\partial m / \partial q$, $\partial^2 m / \partial q^2$, используем формулы

$$q'_m = \frac{1}{m'_q}, \quad q''_{mm} = - \frac{m''_{qq}}{(m'_q)^3}. \quad (\text{A.4})$$

Соотношение (32) можно переписать в виде

$$m = 1 - \frac{1}{q} + \frac{2}{(1-q)q^{p-1}\beta^2} \quad (\text{A.5})$$

и получить

$$m'_q = \frac{1}{q^2} + \frac{2}{(1-q)^2 q^{p-1} \beta^2} - \frac{2(p-1)}{(1-q)q^p \beta^2}, \quad (\text{A.6})$$

$$m''_{qq} = -\frac{2}{q^3} + \frac{4}{(1-q)^3 q^{p-1} \beta^2} + \frac{2p(p-1)}{(1-q)q^{p+1} \beta^2} - \frac{4(p-1)}{(1-q)^2 q^p \beta^2}. \quad (\text{A.7})$$

Для производных от энергий $E \equiv -E_{\text{tot}}$ имеем

$$E'_m = \frac{\beta q^p}{2} - \frac{(1-m)p\beta q^{p-1}}{2} q'_m + f''_{qm} q'_\beta + f''_{qq} q'_\beta q'_m + f'_q q''_{\beta m}, \quad (\text{A.8})$$

$$E''_{mm} = p\beta q^{p-1} q'_m - \frac{(1-m)p(p-1)\beta q^{p-2}}{2} (q'_m)^2 - \frac{(1-m)\beta q^{p-1}}{2} q''_{mm} + f'''_{qmm} q'_\beta + \\ + 2f'''_{qqm} q'_\beta q'_m + f'''_{qqq} q'_\beta (q'_m)^2 + 2f''_{qm} q''_{\beta m} + f''_{qq} (q'_\beta q''_{mm} + q''_{m\beta} q'_m). \quad (\text{A.9})$$

Нас интересует эволюция данной системы вдоль траектории

$$E \equiv -E_{\text{tot}} = \text{const.}$$

Для этого случая имеем

$$f'_m = -\frac{\beta^2 q^p}{4} - \frac{1}{2m^2} \ln \frac{1-q+mq}{1-q} + \frac{q}{2m(1-q+mq)}, \quad (\text{A.10})$$

$$f'_\beta = \frac{\beta}{2} [1 - (1-m)q^p], \quad (\text{A.11})$$

$$f'_q = \frac{p(1-m)\beta^2 q^{p-1}}{4} - \frac{1-m}{2m(1-q+mq)} + \frac{1-m}{2m(1-q)}, \quad (\text{A.12})$$

$$f''_{mm} = \frac{1}{m^3} \ln \frac{1-q+mq}{1-q} - \frac{q}{m^2(1-q+mq)} - \frac{q^2}{2m(1-q+mq)^2}, \quad (\text{A.13})$$

$$f''_{mq} = -\frac{p\beta^2 q^{p-1}}{4} + \frac{q}{2(1-q+mq)^2(1-q)}, \quad (\text{A.14})$$

$$f''_{qq} = \frac{p(p-1)(1-m)\beta^2 q^{p-2}}{4} - \frac{(1-m)^2}{2m(1-q+mq)^2} + \frac{(1-m)}{2m(1-q)^2}, \quad (\text{A.15})$$

$$f'''_{qqq} = \frac{p(p-1)(p-2)(1-m)\beta^2 q^{p-3}}{4} - \frac{(1-m)^3}{m(1-q+mq)^3} + \frac{1-m}{m(1-q)^3}, \quad (\text{A.16})$$

$$f'''_{qqm} = -\frac{p(p-1)\beta^2 q^{p-2}}{4} + \frac{1}{2(1-q+mq)^2(1-q)} + \\ + \frac{q}{2(1-q+mq)^2(1-q)^2} + \frac{q(1-m)}{(1-q+mq)^3(1-q)}, \quad (\text{A.17})$$

$$f'''_{mmm} = -\frac{q^2}{(1-q+mq)^3(1-q)}. \quad (\text{A.18})$$

Все эти выражения нужны для решения уравнения

$$E''_{mm}(\beta, m) + E'_m(\beta, m)f'_m(\beta_0, m) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Установив значение β_0 из (A.19), можем вычислить

$$-\frac{dE_m}{dt} = \frac{1}{\beta} \left[\frac{\partial^2 f(\beta, m)}{\partial m^2} + f'_m(\beta, m)f'_m(\beta_0, m) \right]. \quad (\text{A.20})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

p -Спиновое сферическое стекло в магнитном поле

Можно выразить производные намагниченности как

$$2M \frac{dM}{dq} = 1 - \frac{p(p-1)}{2} \beta^2 q^{p-2} (1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1} (1-q), \quad (\text{B.1})$$

$$\frac{dM}{dq} = \frac{1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2} (1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1} (1-q)}{2M}, \quad (\text{B.2})$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 M}{dq^2} = & -\frac{\left[1 - \frac{1}{4}p(p-1)\beta^2 q^{p-2} (1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1} (1-q)\right] M'_q}{2M^2} + \\ & + \frac{\left[2p(p-1)\beta^2 q^{p-2} (1-q)^2 - \frac{1}{2}p(p-1)(p-2)\beta^2 q^{p-3} (1-q)^2 - p\beta^2 q^{p-1}\right]}{2M}. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Используя формулы

$$q'_M = \frac{1}{M'_q}, \quad q''_{MM} = -\frac{M''_{qq}}{(M'_q)^3}, \quad (\text{B.4})$$

можно получить, что

$$-E_{\text{tot}} \equiv E = hM + \frac{1}{2}\beta(1-q^p) + f'_q q'_\beta, \quad (\text{B.5})$$

$$E_M = h - \frac{1}{2}\beta p q^{p-1} q'_M + f'_q q''_{\beta M} + f''_{qq} q'_\beta q'_M + f''_{qM} q'_\beta, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} E_{MM} = & -\frac{1}{2}\beta p q^{p-1} q'_{MM} - \frac{1}{2}\beta p(p-1)q^{p-2} (q'_M)^2 + f'''_{qq} q'_\beta (q'_M)^2 + f'''_{qMM} q'_\beta + \\ & + 2f'''_{qM} q'_\beta q'_M + 2f''_{qM} q''_{\beta M} + f''_{qq} (q'_\beta q'_{MM} + q'_{\beta M} q'_M). \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Обозначая энергию $E_j = f/\beta$, имеем

$$\frac{d^2 f}{dM^2} = f''_{MM} + 2f''_{Mq} q'_M + f'_q q''_{MM}. \quad (\text{B.8})$$

Здесь в правой части фигурируют частные производные. Мы должны сначала решить уравнение

$$\frac{dE}{dt} = E''_{MM} + E'_M f'_M(\beta_0) = 0 \quad (\text{B.9})$$

относительно β_0 , затем вычислить

$$\frac{dE_j}{dt} = [f''_{MM}(\beta) + 2f''_{Mq}(\beta)q'_M + f'_M(\beta)f'_M(\beta_0)] \frac{1}{\beta}. \quad (\text{Б.10})$$

Теперь посчитаем $q'_\beta, q''_{\beta M}$:

$$-p\beta d\beta (1-q)^2 q^{p-1} + \left[1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1}(1-q)\right] dq = 0, \quad (\text{Б.11})$$

$$q'_\beta = \frac{p\beta(1-q)^2 q^{p-1}}{1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1}(1-q)}, \quad (\text{Б.12})$$

$$q'_M = \frac{2M}{1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1}(1-q)}, \quad (\text{Б.13})$$

$$q''_{\beta M} = -\frac{2Mq'_\beta \left[-\frac{1}{2}p(p-1)(p-2)\beta^2 q^{p-3}(1-q)^2 - p\beta^2 q^{p-1} + 2p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)\right]}{\left[1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1}(1-q)\right]^2} + \\ + \frac{[p(p-1)\beta(1-q)^2 q^{p-2} - 2p\beta(1-q)q^{p-1}]2M}{\left[1 - \frac{1}{2}p(p-1)\beta^2 q^{p-2}(1-q)^2 + p\beta^2 q^{p-1}(1-q)\right]^2}. \quad (\text{Б.14})$$

Имеем

$$f'_M = -\frac{M}{1-q}, \quad f'_\beta = -\frac{\beta q^{p-1}}{2} + \frac{q-M^2}{2(1-q)^2}, \quad f''_{qM} = -\frac{M}{(1-q)^2}, \quad (\text{Б.15})$$

$$f'''_{MMq} = -\frac{1}{(1-q)^2}, \quad f'''_{Mqq} = -\frac{2M}{(1-q)^3}, \quad (\text{Б.16})$$

$$f''_{qq} = \frac{1}{2(1-q)^2} + \frac{(q-M^2)}{(1-q)^3} - \frac{\beta^2}{4}p(p-1)q^{p-2}, \quad (\text{Б.17})$$

$$f'''_{qqq} = \frac{2}{(1-q)^3} + \frac{3(q-M^2)}{(1-q)^4} - \frac{\beta^2}{4}p(p-1)(p-2)q^{p-3}. \quad (\text{Б.18})$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Динамика стекла

Имея выражение (72) для q , можно вычислить

$$\frac{\partial q}{\partial \beta} = -\frac{2}{\beta^3[(1-n)2q-2+n]}, \quad \frac{\partial q}{\partial n} = \frac{q^2-q}{(1-n)2q-2+n}, \\ \frac{\partial f}{\partial \beta} = \frac{\beta}{2}[(n^2-n)q^2+n] + \left[\frac{n^2-n}{2}\beta^2 q + \frac{1-n}{2(1-q)} - \frac{1-n}{2(1-(1-n)q)}\right]q'_\beta,$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial n \partial \beta} &= \frac{\beta}{2} [(2n-1)q^2 + 1] + \left[\frac{n^2 - n}{2} \beta^2 + \frac{1-n}{2(1-q)^2} - \frac{(1-n)^2}{2(1-(1-n)q)^2} \right] q'_\beta q'_n + \\
&+ \left[\frac{2n-1}{2} \beta^2 pq - \frac{1}{2(1-q)} + \frac{1}{2(1-(1-n)q)^2} \right] q'_\beta + \beta(n^2 - n)qq'_n, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial \beta^2} &= \frac{1}{2} [(n^2 - n)q^2 + n] + \\
&+ \left[\frac{n^2 - n}{2} \beta^2 + \frac{1-n}{2(1-q)^2} - \frac{(1-n)^2}{2(1-(1-n)q)^2} \right] (q'_\beta)^2 + 2\beta(n^2 - n)qq'_\beta. \quad (\text{B.1})
\end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Г

Микроскопический вывод упрощенной динамики

Рассмотрим совокупность спинов и констант, взаимодействующих через гамильтониан (19). В рамках ланжевеновой динамики

$$\begin{aligned}
\tau_s \frac{ds_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial s_i} + \eta_i^1(t), & \langle \eta_i^1(t_1) \eta_k^1(t_2) \rangle &= \frac{2}{\beta} \delta(t_1 - t_2) \delta_{ik}, \\
\tau_j \frac{dj_i}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial j_i} + \eta_i^2(t), & \langle \eta_i^2(t_1) \eta_k^2(t_2) \rangle &= \frac{2}{\beta} \delta(t_1 - t_2) \delta_{ik}.
\end{aligned} \quad (\text{Г.1})$$

Если $\tau_j \ll \tau_s$, то при рассмотрении второго уравнения в (Г.1) можно провести усреднение по установившемуся распределению спинов

$$-\left\langle \frac{\partial H}{\partial j_i} \right\rangle_s = -\frac{\int \prod_d s_i \frac{\partial H}{\partial j_i} \exp[-\beta H]}{\int \prod_d s_i \exp[-\beta H]} = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial j_k} \ln \int \prod_d s_i = \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial j_k} f(\beta, j), \quad (\text{Г.2})$$

$$f(\beta, j_k) = \int \prod_i s_i \exp[-\beta H]. \quad (\text{Г.3})$$

Таким образом, мы имеем новый эффективный гамильтониан

$$H_0 - \frac{1}{\beta} f(\beta, j_k). \quad (\text{Г.4})$$

Уравнение

$$\tau_j \frac{dj_i}{dt} = -\frac{\partial H_0}{\partial j_i} + \eta_i^2(t) \quad (\text{Г.5})$$

приводит как раз к нашему распределению

$$\int \prod_i dj_i e^{-h(j)} Z^n(\beta, j). \quad (\text{Г.6})$$

Предположим теперь, что константы, распределенные по закону (Г.6), за дифференциально малое время dt меняются наряду со спинами по закону (Г.1), только при $\beta = \beta_0$. Тогда значение потенциала $g(j)$ изменилось бы на

$$dg(j_k) = \frac{1}{\beta_0} \frac{\partial g}{\partial j_k} \frac{\partial f}{\partial j_k} dt + \frac{\partial g}{\partial j_k^2} dt. \quad (\text{Г.7})$$

Усреднение по распределению j_k дает

$$\int \prod_i dj_i Z^n(\beta, j) \frac{1}{\beta_0} \left[\frac{\partial g}{\partial j_k} \frac{\partial f}{\partial j_k} dt + \frac{\partial g}{\partial j_k^2} dt \right]. \quad (\Gamma.8)$$

Благодарности. Данная работа была поддержана МНТЦ, грант А-102 и фондом Андес с-13413/1. Я благодарен А. Аллахвердян, А. Хризанти, Т. Ньюенхуйзен и Л. Пелити за обсуждение.

Список литературы

- [1] *K. Binder, A. P. Young.* Rev. Mod. Phys. 1986. V. 58. P. 801.
- [2] *M. Mezard, G. Parisi, M. A. Virasoro.* Spin-glass Theory and Beyond. Singapore: World Scientific, 1986.
- [3] *H. K. Janssen.* Z. Phys. B. 1977. V. 26. P. 187.
- [4] *C. De Dominicis, L. Peliti.* Phys. Rev. Lett. 1977. V. 38. P. 505.
- [5] *A. Crisanti, H. Horner, H.-J. Sommers.* Z. Phys. B. 1993. V. 92. P. 257.
- [6] *B. Derrida.* Phys. Rev. Lett. 1980. V. 45. P. 79.
- [7] *D. J. Gross, M. Mezard.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 240. P. 431.
- [8] *A. Crisanti, H. J. Sommers.* Z. Phys. B. 1992. V. 87. P. 341.
- [9] *V. Dotsenko, M. Mezard, S. Franz.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 2351.
- [10] *A. C. C. Coolen, R. W. Penney, D. Sherrington.* J. Phys. A. 1993. V. 26. P. 3681.
- [11] *A. E. Allahverdyan, T. Nieuwenhuizen, D. B. Saakian.* Europhys. Lett. (в печати).
- [12] *T. Nieuwenhuisen.* Phys. Rev. Lett. 1997. V. 79. P. 1317.
- [13] *A. Kiselev.* Supersymmetry approach in the field theory of ergodicity breaking transitions. cond-mat/9909387.

Поступила в редакцию 22.III.2000 г.,
после доработки 9.II.2001 г.