Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Б. Андреев, В. В. Максименко, Отсутствие диффузии через фрактальную границу двух сред, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 2, 309–320

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf498>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 14:03:37

© 2001 г.

Г. Б. Андреев*, В. В. Максименко*

ОТСУТСТВИЕ ДИФФУЗИИ ЧЕРЕЗ ФРАКТАЛЬНУЮ ГРАНИЦУ ДВУХ СРЕД

Рассмотрена диффузия идеального газа через фрактальную границу двух соприкасающихся однородных сред. Эта граница моделируется пространственно самоподобной системой складок поверхности, разделяющей среды. Такая поверхность может обладать конечным объемом, который отождествляется с физическим объемом пограничного слоя. Показано, что эффективный коэффициент диффузии идеальных молекул в этом слое обращается в нуль.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гетерогенные среды с фрактальной структурой неоднородностей проявляют неожиданные свойства. В первую очередь это касается особенностей переноса излучения в неоднородных системах [1]–[4]. Однако немало интересного возникает и при обычном молекулярном транспорте – диффузии. Пример такой необычной диффузии приводится в этой статье. Мы покажем, что диффузия молекул в фрактальной системе складок границы двух соприкасающихся однородных сред может прекратиться. Это явление мы называем локализацией молекул в фрактальной системе неоднородностей.

Рассматривается граница двух однородных сред, характеризующихся коэффициентами диффузии посторонней примеси D_1 и D_0 . Граница устроена необычно (рис. 1). В плоскости (x, y) декартовой системы координат она квазиоднородна. Ее структура вдоль оси z на протяжении некоторой макроскопической длины с характерным размером l показана на рис. 2. Как видно, в толстые “языки” среды 1 вдаются более тонкие “отростки” среды 0 и наоборот. Далее все повторяется в уменьшенном масштабе и продолжается до бесконечности. Такая структура в пределах слоя толщины l (предполагается, что l много больше средних длин свободного пробега молекулы в обеих средах) обладает масштабной инвариантностью вдоль оси z . Другими словами, множество пересечений границы раздела сред с осью z фрактально.

Рассматриваемая пограничная область (в дальнейшем называемая “границей”) обладает парадоксальными свойствами. Возьмем произвольную точку “языка” среды 1. На самом деле среды 1 в ней не окажется, так как туда проникает более тонкий “язычок”

---

* Научно-исследовательский физико-химический институт им. Л. Я. Карпова, Москва, Россия

Рис. 1

Рис. 2

среды 0. Не окажется там и среды 0, так как, в свою очередь, еще более тонкий язык среды 1 проникает на выбранное нами место и т.д. до бесконечности. Среда 1 присутствует в любой точке “границы”, но если мы сложим всю приходящуюся на нее длину вдоль оси z , то эта длина окажется нулевой. То же самое относится и к среде 0.

Предлагаемая модель является слишком надуманной конструкцией, чтобы иметь какую-либо физическую реализацию. Всегда существует минимальный масштаб неоднородностей порядка размеров атомов. Однако структуры, обладающие масштабной

инвариантностью в пределах 4–6 десятичных порядков изменения масштаба, — не редкость. Если в рамках предложенной модели мы обнаружим какие-нибудь особенности физических свойств, то не исключено, что в ослабленном виде они проявятся и в реальных системах.

Если отрезок длины l вдоль оси z не покрыт ни средой 1, ни средой 0, то что же его заполняет? И чем заполнен объем “границы”? Этот объем занят не чем иным, как поверхностью складок. Обычные представления о том, что поверхность имеет нулевой объем, в случае поверхности рассматриваемого типа становятся неприменимыми. На рис. 3 приведен классический пример линии, имеющей конечную площадь. Берется квадрат единичной площади (заштрихованная область на рис. 3), из которой вырезается крест площади $1/4$ (масштаб на этом рисунке в целях наглядности не выдержан). В каждом из оставшихся четырех квадратов снова вырезаются кресты суммарной площадью $1/8$. В каждом из оставшихся 16 маленьких квадратов вновь удаляется по кресту так, чтобы сумма площадей выбрасываемых областей равнялась $1/16$ и т.д. до бесконечности. В пределе остается фигура с площадью $1 - (1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots) = 1/2$, несмотря на то, что эта фигура распадается на отдельные точки и топологическая размерность множества этих точек равна нулю. Фрактальная размерность этого множества

$$d = \frac{2 \ln 2}{2 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3} \cong 1.31.$$

Затем строится линия, которая проходит через все точки предельного множества. Этапы построения этой линии представлены на рис. 3. Предельная линия имеет положительную площадь не меньшую $1/2$.

Рис. 3

2. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Пусть $D_0 > D_1$ и молекулы диффундирующего газа набегают на границу со стороны среды 0 (см. рис. 2).

Концентрация газа $c(\vec{r}, t)$ в однородной среде, характеризующейся коэффициентом диффузии D_0 , удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} c(\vec{r}, t) - D_0 \Delta c(\vec{r}, t) = 4\pi f(\vec{r}, t), \quad (1)$$

где $f(\vec{r}, t)$ – произвольная функция, описывающая источник. Начальная концентрация $c(\vec{r}, 0)$ также предполагается произвольной функцией координат,

$$c(\vec{r}, 0) = 4\pi\varphi(\vec{r}). \quad (2)$$

В представлении Лапласа по времени

$$c(\vec{r}, s) = \int_0^\infty e^{-st} c(\vec{r}, t) dt$$

уравнение (1) принимает вид

$$sc(\vec{r}, s) - D_0 \Delta c(\vec{r}, s) = 4\pi(f(\vec{r}, s) + \varphi(\vec{r})). \quad (3)$$

Введем функцию Грина (пропагатор) уравнения (3),

$$sG_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) - D_0 \Delta G_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) = 4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (4)$$

Тогда формула

$$c(\vec{r}, s) = \int G_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) (f(\vec{r}', s) + \varphi(\vec{r}')) d\vec{r}'$$

в комбинации с обратным преобразованием Лапласа определяет концентрацию газа в любой момент времени и в любой точке пространства. Нашей задачей далее является проведение подобных построений для системы, изображенной на рис. 2.

Сначала построим пропагатор G_1 в однородной среде с коэффициентом диффузии $D_1 \neq D_0$. Решение уравнения (4) в однородном пространстве, характеризуемом коэффициентом диффузии D_0 , хорошо известно и имеет вид

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) = -\frac{1}{D_0} \frac{e^{-\sqrt{\frac{s}{D_0}} |\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (5)$$

G_1 отличается от G_0 заменой D_0 на D_1 , но процедура получения G_1 поможет построить пропагатор в интересующей нас системе. Мы хотим представить процесс трансформации G_0 в G_1 как результат некоего “взаимодействия”, которое испытывают молекулы диффундирующего газа, переходя из среды с коэффициентом диффузии D_0 в среду с коэффициентом диффузии D_1 . Эта трансформация описывается уравнением Дайсона [5]

$$G_1(\vec{r}, \vec{r}' | s) = G_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) + \int G_0(\vec{r}, \vec{r}_1 | s) P(\vec{r}_1, \vec{r}_2) G_1(\vec{r}_2, \vec{r}') d\vec{r}_1 d\vec{r}_2. \quad (6)$$

Оператор $P(\vec{r}, \vec{r}')$ назовем “потенциалом взаимодействия”. Его вид легко установить. В представлении Фурье по разности координат уравнение (6) выглядит следующим образом:

$$(s + D_1 k^2)^{-1} = (s + D_0 k^2)^{-1} + 4\pi(s + D_0 k^2)^{-1} P(k) (s + D_1 k^2)^{-1},$$

где, например,

$$\frac{4\pi}{s + D_0 k^2} = \int G_0(\vec{r}, \vec{r}' | s) e^{i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d(\vec{r} - \vec{r}').$$

Следовательно,

$$P(k) = \frac{D_0 - D_1}{4\pi} k^2$$

и

$$P(\vec{r}, \vec{r}') = \int P(k) e^{-i\vec{k}(\vec{r} - \vec{r}')} d\vec{k} = \frac{D_0 - D_1}{4\pi} \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \delta(\vec{r} - \vec{r}'). \quad (7)$$

Теперь для построения пропагатора G в системе складок границы осталось сделать только один шаг. Перепишем уравнение для G_1 в виде бесконечного ряда

$$G_1 = G_0 + (G_0 P G_0) + (G_0 P G_0 P G_0) + \dots, \quad (8)$$

где скобки обозначают интегрирование по внутренним координатам. Соответствующее уравнение для G напоминает уравнение (8) и имеет вид

$$G = G_0 + \left(G_0 \sum_a P^a G_0 \right) + \left(G_0 \sum_a P^a G_0 \sum_b P^b G_0 \right) + \dots. \quad (9)$$

Индексы $a, b, \dots$ – координаты множества тех точек границы, в которых присутствует среда 1.

В соответствии с таким подходом потенциал взаимодействия P в полной аналогии с выражением (7) имеет вид

$$P^a(\vec{r}, \vec{r}') = \frac{D_0 - D_1}{4\pi} \eta^a(\vec{r}) \frac{\partial^2}{\partial r \partial r'} \delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (10)$$

где $\eta^a(\vec{r}) = 1$, если r совпадает с координатой a и $\eta^a(\vec{r}) = 0$, если это не так.

Рис. 4

Введем оператор $t^a(\vec{r}, \vec{r}')$, описывающий многократное перерассеяние молекулы на отдельном элементе границы, заполненном средой 1. Этот оператор удовлетворяет уравнению

$$t^a(\vec{r}, \vec{r}') = P^a(\vec{r}, \vec{r}') + \int P^a(\vec{r}, \vec{r}_1) \langle G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rangle t^a(\vec{r}_2, \vec{r}') d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \quad (11)$$

и в теории многократного рассеяния называется обычно t -оператором или t -матрицей. Его физический смысл иллюстрируется рис. 4, где представлен диаграммный ряд теории возмущений для t -матрицы. “Потенциал взаимодействия” на этом рисунке обозначен штриховой линией, t -матрица – сплошная вертикальная линия, пропагатор в однородной среде, характеризующейся коэффициентом диффузии D_0 , – тонкая горизонтальная линия. Жирной горизонтальной линией обозначен полный пропагатор G , определенный рядом теории возмущений (9), но осредненный по расположению среды 1 вдоль

оси z . Этот пропагатор обозначен нами как $\langle G \rangle$. Уравнение (11) и соответствующий ему рис. 4 известны в физике неупорядоченных сред как приближение когерентного потенциала [6].

Усредненный пропагатор $\langle G \rangle$ есть решение уравнения Дайсона вида

$$\langle G(\vec{r}, \vec{r}') \rangle = G_0(\vec{r}, \vec{r}') + \int G^0(\vec{r}, \vec{r}_1) \Sigma(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \langle G(\vec{r}_2, \vec{r}') \rangle d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \quad (12)$$

где оператор Σ учитывает всю специфику взаимодействия молекулы с границей. Такой спецификой в нашем случае является многократное перерассеяние или заикливание молекулы между элементами множества среды 1.

Рис. 5

Введем оператор S , описывающий такое заикливание. Его структура изображена на рис. 5. Здесь же представлена процедура суммирования ряда теории возмущений для S , которая сводится к решению следующего уравнения:

$$\begin{aligned} S^{a,b}(\vec{r}, \vec{r}') = & \int t^a(\vec{r}, \vec{r}_1) \langle G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rangle t^b(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \langle G(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \rangle \times \\ & \times t^a(\vec{r}_4, \vec{r}_5) \langle G(\vec{r}_5, \vec{r}_6) \rangle t^b(\vec{r}_6, \vec{r}') d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_6 + \\ & + \int t^a(\vec{r}, \vec{r}_1) \langle G(\vec{r}_1, \vec{r}_2) \rangle t^b(\vec{r}_2, \vec{r}_3) \langle G(\vec{r}_3, \vec{r}_4) \rangle S^{a,b}(\vec{r}_4, \vec{r}') d\vec{r}_1 \dots d\vec{r}_4. \end{aligned} \quad (13)$$

Оператор Σ получается в результате осреднения бесконечной цепочки операторов S , разделенных пропагаторными линиями. Ряд теории возмущений для него будет представлен позже, когда мы познакомимся с деталями процедуры осреднения.

Теперь все интересующие нас величины представим в виде двумерных интегралов Фурье. Например,

$$G_0(\vec{r}, \vec{r}') = (2\pi)^{-2} \int G_0(\vec{\kappa}, z, z') \exp(-i\vec{\kappa}(\vec{\rho} - \vec{\rho}')) d\vec{\kappa},$$

где $\vec{\rho}$ и $\vec{\rho}'$ — двумерные векторы в плоскости (x, y) . Легко показать, что

$$G_0(\vec{\kappa}, z, z') = -\frac{1}{D_0} \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 + \frac{s}{D_0}}} \exp\left(-|z - z'| \sqrt{\kappa^2 + \frac{s}{D_0}}\right), \quad (14)$$

$$P_\kappa^\zeta(z, z') = \frac{D_0 - D_1}{4\pi} \eta^\zeta(z) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \delta(z - z'). \quad (15)$$

Здесь $\eta^\zeta(z) = 1$, если координата молекулы z совпадает с ζ , где ζ — z -координата среды 1, и $\eta^\zeta(z) = 0$, если это не так.

Уравнение (11) для t -матрицы в фурье-представлении принимает вид

$$t^\zeta(z, z') = P^\zeta(z, z') + \int P^\zeta(z, z_1) \langle G(z_1, z_2) \rangle t^\zeta(z_2, z') dz_1 dz_2. \quad (16)$$

Локальная часть t ищется в форме

$$t^\zeta(z, z') = \frac{\tau_0}{4\pi} \eta^\zeta(z) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \delta(z - z'). \quad (17)$$

Предполагается, что усредненный пропагатор $\langle G(\vec{k}, z, z') \rangle$ выглядит так же, как пропагатор в однородной среде (5), отличаясь от него заменой D_0 на некоторый эффективный коэффициент диффузии $\tilde{D}$. Определение $\tilde{D}$ и будет основной нашей задачей.

Интегрируя по частям в (16) и используя тождество

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \exp(-\gamma|z - z'|) = -2\gamma\delta(z - z') + \gamma^2 \exp(-\gamma|z - z'|), \quad (18)$$

для τ_0 нетрудно получить следующее выражение:

$$\tau_0 = \frac{D_0 - D_1}{\tilde{D} + D_0 - D_1} \tilde{D}.$$

Столь же просто выглядит локальная часть фурье-образа оператора S ,

$$S^\zeta(z, z') = S_0 \eta^\zeta(z) \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \delta(z - z'), \quad (19)$$

где

$$S_0 = -\frac{1}{4\pi} \left(\frac{D_0 - D_1}{\tilde{D} + D_0 - D_1} \right)^4 \frac{\tilde{D}}{1 - \left(\frac{D_0 - D_1}{\tilde{D} + D_0 - D_1} \right)^2}. \quad (20)$$

Если диффундирующая молекула не прилипает к поверхности складок, то более длинные маршруты, совершаемые ею от точки старта, являются более вероятными, чем короткие. Похожая ситуация имеет место в теории вероятностей [7]. Там рассматривается игральная кость с бесконечным числом граней. Вероятность выпадения любой грани с числом очков, меньшим некоторого фиксированного конечного числа k , нулевая, в то время как вероятность выпадения любой грани с числом очков, большим k , равна единице. Выпадение граней у такого кубика перестает быть равновероятным процессом. Перестают быть равновероятными и маршруты молекулы, так как статистический вес длинных маршрутов больше статистического веса коротких. В случае, если область пространства, где диффундируют молекулы, конечна, длинные маршруты — это маршруты с самопересечениями или замкнутыми петлями. Именно их вкладом в диффузию

Рис. 6

мы будем интересоваться. Эти процессы приводят, как мы увидим, к заикливанию или локализации молекулы.

Простейший процесс заикливания молекулы между парой неоднородностей описывается оператором S . Наряду с ним вклад в локализацию дают и более сложные петли. Петли, с которыми мы будем иметь дело, состоят из бесконечного набора скоррелированных “частичек”, расположенных вдоль большого “кольца” (см. рис. 6). Молекула, многократно переотражаясь между соседними “частичками” среды 1, обходит последовательно все точки “кольца” и возвращается в точку старта. При вычислении оператора Σ нам следует осреднить цепочку S -операторов, “выстроенных вдоль кольца” и разделенных пропагаторами. Процедура осреднения проводится с помощью нормированной на единицу функции распределения множества точек пересечения среды 1 с осью z , $W_N(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N)$ ($N \rightarrow \infty$). Функции распределения низшего порядка вводятся соотношениями

$$\begin{aligned} f_1(\zeta_1) &= l \int W_N(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) d\zeta_2 d\zeta_3 \dots d\zeta_N, \\ f_2(\zeta_1, \zeta_2) &= l^2 \int W_N(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) d\zeta_3 d\zeta_4 \dots d\zeta_N, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (21)$$

откуда следует $f_1(\zeta) = 1$, что соответствует наличию среды 1 в любой точке границы (несмотря на то что мера этого множества нулевая).

Корреляторы g в расположении элементов множества среды 1 вводятся стандартным способом,

$$\begin{aligned} f_2(\zeta_1, \zeta_2) &= 1 - g_2(\zeta_1, \zeta_2), \\ f_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3) &= f_1(\zeta_1)f_1(\zeta_2)f_1(\zeta_3) - f_1(\zeta_1)g_2(\zeta_2, \zeta_3) - \\ &\quad - f_1(\zeta_2)g_2(\zeta_1, \zeta_3) - f_1(\zeta_3)g_2(\zeta_1, \zeta_2) - g_3(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \quad (22)$$

В дальнейшем предполагается, что все многочастичные корреляторы сводятся к произведению парных, т. е.

$$g_N(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) = \prod_{i,j} g_2(\zeta_i - \zeta_j). \quad (23)$$

Рис. 7

Поскольку в усредненный массовый оператор Σ входят только связные диаграммы, Σ представляется характерной диаграммой рис. 7. Дугообразные линии на этом рисунке соответствуют парным корреляторам g_2 . Кругочкам соответствуют множители $\delta \rightarrow 0$. Их происхождение следующее. Из свойств функции $\eta^\zeta(z)$ следует, что

$$\frac{1}{l} \int_0^l \eta^\zeta(z) d\zeta = \delta \rightarrow 0, \quad (24)$$

так как эта функция равна единице на множестве меры нуль и равна нулю на множестве меры единицы. Интеграл (24) напоминает нулевой интеграл в смысле Лебега от функции Дирихле $g(x)$, которая равна нулю, если x иррационально, и равна единице, если x рационально.

Предположим, что множество точек границы, занятое средой 1 (равно как и множество точек, занятое средой 0), и множество точек, занятое непосредственно поверхностью раздела, устроены так же, как множество рациональных и иррациональных чисел, принадлежащих отрезку длиной l . Примем канторовскую гипотезу континуума, согласно которой, если число рациональных чисел на этом отрезке есть N ($N \rightarrow \infty$), то число соответствующих иррациональных чисел есть 2^N (число различных подмножеств множества, состоящего из N элементов). В этом случае стремящееся к нулю число δ можно оценить следующим образом:

$$\delta = \frac{N}{2^N}. \quad (25)$$

Действительно,

$$\frac{1}{l} \int_0^l \eta^\zeta(z) dz = \frac{1 \cdot \alpha + 0 \cdot \beta}{1 \cdot \gamma},$$

где α – мера множества рациональных чисел, β – мера множества иррациональных чисел, γ – мера множества тех и других точек отрезка. Учитывая, что $\alpha/\gamma \cong N/2^N$, получим приведенную выше оценку.

При вычислении средних

$$\begin{aligned} \langle \eta^{\zeta_1}(z_1) \eta^{\zeta_2}(z_2) \dots \eta^{\zeta_m}(z_m) \rangle &= \\ &= \int \eta^{\zeta_1}(z_1) \eta^{\zeta_2}(z_2) \dots \eta^{\zeta_m}(z_m) W_N(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_N) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_N = \\ &= \frac{1}{l^m} \int \eta^{\zeta_1}(z_1) \eta^{\zeta_2}(z_2) \dots \eta^{\zeta_m}(z_m) f_m(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_m) d\zeta_1 d\zeta_2 \dots d\zeta_m, \end{aligned} \quad (26)$$

используя выражения (22) и расщепление (23), мы рано или поздно встретимся с интегралами вида

$$\frac{1}{l^2} \int \eta^{\zeta_1}(z_1) \eta^{\zeta_2}(z_2) g_2(\zeta_1, \zeta_2) d\zeta_1 d\zeta_2 = \delta^2 g_2(z_1, z_2), \quad (27)$$

в результате чего и появятся нулевые множители δ в соответствующих диаграммах. Несмотря на то что $\delta \rightarrow 0$, мы будем удерживать эти множители до самого конца.

Заметим, что оператор $\Sigma(z, z')$, подобно оператору S , также должен быть локализован по своим аргументам. Это связано с тем, что он описывает движение по замкнутой петле. Именно поэтому в решениях уравнений (11) и (13) мы и ограничивались их локальной частью.

При $N \rightarrow \infty$ расстояние между соседними точками петли рисунка 6, образованными множеством точек среды 1, стремится к нулю. Однако вероятность обнаружить два соседних элемента множества среды 1 в одной и той же точке равна нулю, так как между этими элементами обязательно вклинивается “язычок”, принадлежащий множеству, занятому поверхностью раздела, подобно тому, как между близкими друг к другу рациональными числами всегда оказывается иррациональное число. Поэтому при $N \rightarrow \infty$ в соответствии с первым соотношением (22) все парные корреляторы, фигурирующие в диаграмме рис. 7, можно заменить на $g_2(0) = 1$. В этом случае для $\Sigma(z, z')$ нетрудно получить следующее выражение:

$$\Sigma(z, z') = -\delta^N S_0^{\frac{N}{2}} \left(-\frac{4\pi}{\tilde{D}} \right)^{\frac{N}{2}-1} \frac{\partial^2}{\partial z \partial z'} \delta(z - z'). \quad (28)$$

Уравнение Дайсона для $\langle G(\vec{\kappa}, z, z') \rangle$,

$$\langle G(\vec{\kappa}, z, z') \rangle = G_0(\vec{\kappa}, z, z') + \int G_0(\vec{\kappa}, z, z_1) \Sigma(z_1, z_2) \langle G(\vec{\kappa}, z_2, z') \rangle dz_1 dz_2 \quad (29)$$

с учетом явного вида Σ легко приводится к простому дифференциальному уравнению

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(D_0 - 4\pi\delta^N S_0^{\frac{N}{2}} \left(-\frac{4\pi}{\tilde{D}} \right)^{\frac{N}{2}-1} \right) \langle G(\vec{\kappa}, z, z') \rangle - \\ - D_0 \left(\kappa^2 + \frac{s}{D_0} \right) \langle G(\vec{\kappa}, z, z') \rangle = 4\pi\delta(z - z'). \end{aligned} \quad (30)$$

Его решение имеет вид

$$\langle G(\vec{\kappa}, z, z') \rangle = -\frac{1}{\tilde{D}} \frac{2\pi}{\sqrt{\kappa^2 \frac{D_0}{\tilde{D}} + \frac{s}{\tilde{D}}}} \exp \left(-|z - z'| \sqrt{\kappa^2 \frac{D_0}{\tilde{D}} + \frac{s}{\tilde{D}}} \right), \quad (31)$$

где

$$\tilde{D} = D_0 + 4\pi\delta^N S_0^{\frac{N}{2}} \left(-\frac{4\pi}{\tilde{D}} \right)^{\frac{N}{2}-1}. \quad (32)$$

Простое переопределение переменной интегрирования преобразования Фурье ($\kappa \rightarrow \kappa D_0 / \tilde{D}$) и сравнение с выражением (14) показывает, что коэффициент диффузии D_0 заменяется на $\tilde{D}$ в полном соответствии с нашими предположениями.

Соотношение (32) можно рассматривать как уравнение для определения $\tilde{D}$. Это уравнение удобно переписать в следующей форме:

$$\left(\frac{D_0 - \tilde{D}}{\tilde{D}} \right)^{\frac{2}{N}} = \frac{x^2}{1-x} \delta^2, \quad (33)$$

где

$$x = \left(\frac{\xi}{\tilde{D} + \xi} \right)^2, \quad \xi = D_0 - D_1. \quad (34)$$

Решение этого уравнения

$$\tilde{D} = \frac{\xi \delta^2}{32}. \quad (35)$$

Действительно, при подстановке (35) в (33) правая часть уравнения (33) равна 16. Логарифм левой части этого уравнения при $\tilde{D} \ll D_0$ может быть представлен как

$$4 \ln 2 - \frac{\ln N}{N} + \frac{2}{N} \ln \frac{D_0}{D_0 - D_1} + \frac{4}{N} \ln 2. \quad (36)$$

При $N \rightarrow \infty$ и $D_0 > D_1$ последними тремя слагаемыми справа в (36) можно пренебречь по сравнению с первым и левая часть уравнения (33) также становится равной 16. Таким образом, при $D_0 > D_1$ эффективный коэффициент диффузии стремится к нулю в соответствии с выражением (35). Ситуация с $D_0 < D_1$ рассматривается аналогично. Величина $\tilde{D}$ по-прежнему определяется выражением (35) со сменой знака у ξ . При $D_0 = D_1$ выражение (36) теряет смысл, как и сама постановка задачи.

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, фрактальная граница раздела между двумя однородными средами оказывается “непрозрачной” для диффузии посторонних молекул. Результат фактически не зависит от свойств среды левее и правее границы. Это связано с тем, что рассматриваемая граница не состоит ни из “левой”, ни из “правой” среды. Объем граничного слоя заполнен не чем иным, как самой поверхностью, настолько сильно она развита.

Особого внимания заслуживает вопрос о применимости уравнения диффузии к описанию движения молекулы в рассмотренной выше пространственно самоподобной системе изгибов границы. Как известно, такой подход применим при выполнении неравенства $\lambda \ll L$, где λ – средняя длина свободного пробега молекулы, а L – характерный размер. Выполняется ли приведенное выше условие? Мы считаем, что да.

Средняя длина свободного пробега молекулы λ , определяемая обычно столкновениями с другими молекулами, рано или поздно по мере проникновения молекулы внутрь складок начинает определяться столкновениями с их границами и уменьшается с соответствующим изменением масштаба. Поэтому λ всегда много меньше характерной длины переходного слоя l , играющей роль характерного размера L .

Проблема применимости уравнения диффузии к описанию молекулярного транспорта в системе неоднородностей с характерным расстоянием между ними $\delta \ll \lambda$ напоминает проблему применимости волнового уравнения при описании распространения длинноволнового фотона в системе плотно упакованных малых рассеивателей при условии, что аналогичная величина $\delta \ll \lambda_0$, где λ_0 – длина волны падающего фотона. В классической электродинамике эта проблема решается элементарно. Вводится понятие об эффективной диэлектрической проницаемости системы $\bar{\epsilon}$, которая вычисляется в рамках простейшей электростатики. Безусловно, существует строгий подход к вычислению $\bar{\epsilon}$. В его рамках вводится пропагатор уравнений Максвелла, перечисляются все возможные траектории фотона, суммируются соответствующие им амплитуды вероятности и, естественно, воспроизводятся все классические результаты, касающиеся $\bar{\epsilon}$ (см., например, [8]). При этом возникают определенные логические трудности: что такое траектория длинноволнового фотона и как это он “протискивается” между плотно упакованными частицами, последовательно обходя их все. Физическая причина успеха такого подхода следующая. По мере распространения фотона, например, в фрактальном кластере, состоящем из агломерированных наночастиц, происходит уменьшение или перенормировка его длины волны: длина волны фотона в кластере λ_{int} связана с λ_0 соотношением $\lambda_{\text{int}} = \lambda_0 / \sqrt{\bar{\epsilon}}$. Частота фотона ω при этом не меняется, так как одновременно уменьшается его эффективная скорость v . Эффективная диэлектрическая проницаемость фрактальных гетероструктур $\bar{\epsilon}$ весьма велика. Уменьшение λ_0 оправдывает использование подхода, основанного на введении понятия траектории фотона и суммировании соответствующих этим траекториям амплитуд вероятности.

В случае диффузии в рассмотренной нами фрактальной системе происходит непрерывная перенормировка длины свободного пробега молекулы из-за столкновения с границами уменьшающихся складок. Поэтому нет ничего странного в том, что и величина $\tilde{D}$, связанная с λ соотношением $\tilde{D} \sim \lambda v_0$, где v_0 – тепловая скорость молекулы, также уменьшается до нуля.

Благодарности. Работа выполнена в рамках проектов № 521-98 МНТЦ и № 01-03-32678 РФФИ.

Список литературы

- [1] *A. Lagendijk, B. A. van Tiggelen.* Physics Reports. 1996. V. 270. P. 143.
- [2] *Ping Sheng.* Introduction to Wave Scattering, Localization, and Mesoscopic Phenomena. San Diego: Academic, 1995.
- [3] *В. В. Максименко, А. А. Лушников.* Письма в ЖЭТФ. 1993. Т. 57. С. 204.
- [4] *Е. Федер.* Фракталы. М.: Мир, 1991.
- [5] *А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский.* Методы квантовой теории поля в статистической физике. М.: Наука, 1962.
- [6] *Дж. Займан.* Модели беспорядка. М.: Мир, 1982.
- [7] *Г. Секей.* Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: Мир, 1990.
- [8] *В. В. Максименко, В. А. Крикунов, А. А. Лушников.* ЖЭТФ. 1992. Т. 102. С. 1571.

Поступила в редакцию 10.X.2000 г.,
после доработки 22.I.2001 г.