Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. Е. Бурланков, Пространство SU_3 и его фактор-пространства, *ТМФ*, 2004, том 138, номер 1, 93–103

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 13:21:16

© 2004 г.

Д. Е. Бурланков*

ПРОСТРАНСТВО SU_3 И ЕГО ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА

Для построения калибровочных полей с симметрией необходимо метрическое описание симметрических римановых пространств. Группа SU_3 как риманово пространство описана в двух различных параметризациях. Разработана гамильтонова техника построения фактор-пространств. Построены фактор-пространства группы SU_3 : шестимерное (SU_3/O_2^2), пятимерное (SU_3/O_3) и два четырехмерных (SU_3/O_2^4) и ($SU_3/O_3/O_2$).

Ключевые слова: группа SU_3 , параметризация, метрика, геометрический гамильтониан, факторизация.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе автора [1] была разработана методика построения калибровочных полей, симметричных относительно группы пространственных движений. Эта методика была использована, в частности, для нахождения инстантонов высших порядков с симметрией $O_3 \times O_2$ [2].

Однако детально указанная методика рассматривалась лишь для группы вращения O_n . Основной причиной явилось отсутствие примеров пространств с другой симметрией. Однородные пространства, обладающие симметриями других типов, интенсивно изучаются в современной математике. При этом превалируют локальные методы, поскольку вследствие однородности пространства локальная информация определяет глобальную. Но когда речь идет о построении неоднородных полей на однородных пространствах, информация о метрике пространства в той или иной параметризации оказывается необходимой.

Здесь мы рассмотрим групповое пространство SU_3 как риманово, разовьем методику построения фактор-пространств риманова пространства и с ее помощью построим различные фактор-пространства SU_3 .

2. МЕТРИКА ГРУППОВОГО ПРОСТРАНСТВА SU_3

Одним из распространенных методов параметризации группы вращения O_3 является параметризация углами Эйлера. Матрица ортогонального преобразования строится

* Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, Россия.
E-mail: bur@phys.unn.runnet.ru

в виде произведения трех ортогональных матриц, каждая из которых параметризована одним углом,

$$[O(\theta, \varphi, \psi)] = \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_2 & 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_3 & s_3 & 0 \\ -s_3 & c_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (1)$$

где

$$c_1 = \cos \varphi, \quad s_1 = \sin \varphi, \quad c_2 = \cos \vartheta, \quad s_2 = \sin \vartheta, \quad c_3 = \cos \psi, \quad s_3 = \sin \psi.$$

Затем строится матрица

$$[\Omega] = [O^{-1}][dO] \quad (2)$$

и метрика записывается в виде шпура [3]

$$dl^2 = -\frac{1}{2} \text{Sp}([\Omega][\Omega]) = d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi. \quad (3)$$

Подобным методом мы воспользуемся для параметризации пространства группы SU_3 . В основе параметризации углами Эйлера лежит преобразование O_2 . Повторим конструкцию Эйлера, взяв за основу преобразование SU_2 ,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix}, \quad a = \cos \vartheta e^{i\varphi}, \quad b = \sin \vartheta e^{i\psi}. \quad (4)$$

Построим комплексную матрицу 3×3 по схеме Эйлера (1),

$$\begin{aligned} [U(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \psi_1, \psi_2, \psi_3)] &= [A_1][A_2][A_3] = \\ &= \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 \\ -\bar{b}_1 & \bar{a}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & 0 & b_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\bar{b}_2 & 0 & \bar{a}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_3 & b_3 & 0 \\ -\bar{b}_3 & \bar{a}_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

где

$$a_k = \cos \vartheta_k e^{i\varphi_k}, \quad b_k = \sin \vartheta_k e^{i\psi_k}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Группа SU_3 восьмипараметрична, а построенная матрица имеет 9 параметров. Значит, в дальнейшем понадобится процедура исключения лишней переменной.

Построим три матрицы инфинитезимальных преобразований

$$[\Omega_i] = [A_i^{-1}][dA_i].$$

Теперь можно вычислить метрику аналогично (3),

$$\begin{aligned} dl^2 &= -\frac{1}{2} \text{Sp}([U^{-1}][dU]) = -\frac{1}{2} \text{Sp}([\Omega_1]^2 + [\Omega_2]^2 + [\Omega_3]^2) - \\ &\quad - \text{Sp}([A_1][\Omega_1][A_1^{-1}][\Omega_2]) - \text{Sp}([\Omega_2][A_2^{-1}][\Omega_3][A_2]) - \\ &\quad - \text{Sp}([A_1][\Omega_1][A_1^{-1}][A_2^{-1}][\Omega_3][A_2]). \end{aligned} \quad (6)$$

Детерминант этой метрики равен нулю, что и говорит о лишней переменной в параметризации.

После подстановки

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= u + v + \beta + \psi_2, & \varphi_2 &= \eta - 2u, & \varphi_3 &= u - v + \alpha - \psi_2, \\ \psi_1 &= v + u - \beta + \psi_2, & \psi_3 &= v - u + \alpha + \psi_2\end{aligned}$$

переменная ψ_2 выпадет из метрики, которая окажется восьмипараметричной и примет вид

$$\begin{aligned}dl^2 &= d\vartheta_2^2 + d\vartheta_1^2 + 2 \cos \eta d\vartheta_1 d\vartheta_3 + d\vartheta_3^2 + \\ &+ 2 \sin \eta \cos \vartheta_2 [\sin(2\vartheta_3) d\vartheta_1 d\alpha + \sin(2\vartheta_1) d\vartheta_3 d\beta] + \\ &+ \cos^2 \vartheta_2 [d\eta^2 - [6 du + \cos(2\vartheta_3) d\alpha + \cos(2\vartheta_1) d\beta] d\eta] + \\ &+ \frac{3}{2} [5 + 3 \cos(2\vartheta_2)] du^2 + 3 \sin^2 \vartheta_2 [\cos(2\vartheta_3) d\alpha + \cos(2\vartheta_1) d\beta] du + \\ &+ \sin^2 \vartheta_2 \left[dv^2 + \frac{1}{2} [\cos(2\vartheta_1) d\beta - \cos(2\vartheta_3) d\alpha] dv \right] + d\alpha^2 + d\beta^2 + \\ &+ 2 \left[\frac{3 + \cos(2\vartheta_2)}{4} \cos(2\vartheta_1) \cos(2\vartheta_3) - \cos \eta \cos \vartheta_2 \sin(2\vartheta_1) \sin(2\vartheta_3) \right] d\alpha d\beta.\end{aligned}\quad (7)$$

Детерминант этой метрики

$$g = 3 \cos^2 \vartheta_2 \sin^6 \vartheta_2 \sin^2(2\vartheta_1) \sin^2(2\vartheta_3) \quad (8)$$

не равен нулю, что говорит об эффективности введенной параметризации.

3. ГАМИЛЬТОНОВА ГЕОМЕТРИЯ

3.1. Геометрический гамильтониан. Геодезические линии в пространстве с метрикой g_{ij} находятся как экстремали функционала длины

$$l = \int \sqrt{g_{ij}(x) dx^i dx^j}, \quad (9)$$

которые при выборе в качестве параметра самой длины вдоль экстремали определяются системой уравнений Эйлера

$$\frac{dp_i}{dl} = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} u^k u^l, \quad u^i = \frac{dx^i}{dl}, \quad p_i = g_{ij} u^j, \quad g_{kl} u^k u^l = 1. \quad (10)$$

Обратные соотношения

$$u^k = g^{kj} p_j, \quad \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} = -g_{ks} g_{lm} \frac{\partial g^{sm}}{\partial x^i}$$

позволяют представить уравнения (10) в гамильтоновой форме

$$G = g^{ij}(x)p_i p_j, \quad \frac{dp_i}{dl} = -\frac{\partial(G/2)}{\partial x^i}, \quad \frac{dx^i}{dl} = \frac{\partial(G/2)}{\partial p_i}. \quad (11)$$

Мы слегка отошли от традиционных определений в описании геодезических потоков [3], взяв за основу квадратичную *метрическую форму* G , так что гамильтониан $H = G/2$.

Изменение любой функции от (x^i, p_j) вдоль экстремали определяется *скобками Пуассона*:

$$\frac{dF(x, p)}{dl} \equiv \{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial x^i} \frac{\partial(G/2)}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial(G/2)}{\partial x^i}. \quad (12)$$

Рассмотрим, например, динамику касательного вектора $u^i = g^{ij}p_j$:

$$\begin{aligned} \frac{du^i}{dl} &= \frac{\partial u^i}{\partial x^i} \frac{\partial(G/2)}{\partial p_i} - \frac{\partial u^i}{\partial p_i} \frac{\partial(G/2)}{\partial x^i} = \\ &= \left(g^{ij}_{,k} g^{kl} - \frac{1}{2} g^{ik} g^{jl}_{,k} \right) p_j p_l = -g^{jk} g^{sl} \Gamma^i_{ks} p_j p_l = -\Gamma^i_{ks} u^k u^s. \end{aligned} \quad (13)$$

Это – уравнение геодезической.

Интегралы на траекториях коммутируют с гамильтонианом в смысле скобок Пуассона. В частности, метрическая форма на экстремали постоянна, ее значение определено однозначно и всегда равно единице. При этом ее можно выражать как через импульсы (с обратным метрическим тензором), так и через касательный вектор (с прямым метрическим тензором).

Найдем интегралы, линейные по импульсам p_i ,

$$\xi \equiv \xi^i p_i, \quad \{\xi, G/2\} = \frac{1}{2} (\xi^i_{,s} g^{sj} + \xi^j_{,s} g^{si} - \xi^s g^{ij}_{,s}) p_i p_j. \quad (14)$$

Чтобы ξ было интегралом, необходимо обращение в нуль выражения в скобках в формуле (14). Но это выражение является ли-вариацией обратного метрического тензора, как раз и обращающейся в нуль на векторах Киллинга. Таким образом, векторы Киллинга с точки зрения гамильтоновой геометрии являются интегралами.

Скобки Пуассона между полями Киллинга являются коммутаторами этих полей,

$$\{\xi_a, \xi_b\} = (\xi^i_{a,j} \xi^j_b - \xi^j_a \xi^i_{b,j}) p_i = c^c_{ab} \xi_c, \quad (15)$$

где c^c_{ab} – структурные константы группы движения.

Вследствие *тождеств Якоби* если A – интеграл, то и $A_\xi = \{A, \xi\}$ – тоже интеграл, если ξ – вектор Киллинга.

Гамильтонова геометрия позволяет определить факторизацию пространств по каким-либо интегралам. За счет интегралов исключаются некоторые переменные и пространство оказывается меньшей размерности.

Подмногообразие M в пространстве N называется *вполне геодезическим*, если каждая геодезическая линия в N , касающаяся M в одной точке, полностью лежит в M [4]. Если метрика n -мерного пространства N имеет k интегралов (возможно, слабых, т.е. коммутирующих с гамильтонианом при фиксированном значении этих интегралов), то за счет фиксации интегралов можно исключить k переменных, в подпространстве M окажется $n - k$ переменных, однако геодезические линии, определяемые оставшимся гамильтонианом в подпространстве M , являются и геодезическими в пространстве N с заданными значениями интегралов.

3.2. Лагранжевы методы. Для прямого использования метода Гамильтона в дифференциальной геометрии необходимо построить обратный метрический тензор, что не просто для пространств со сложной метрикой даже при помощи пакета аналитических вычислений “Mathematica” (последний использовался для большинства вычислений в данной работе). Поэтому не нужно пренебрегать методами, позволяющими находить интегралы без обращения метрического тензора.

Как и в гамильтоновой динамике, прежде всего интегралами оказываются *циклические переменные*. Это позволяет строить фактор-группы по одномерным подгруппам. Нужно только правильно выбрать исходную параметризацию, чтобы подгруппе соответствовал сдвиг по одной переменной.

Кроме того, интегралы можно строить исходя из уравнений Лагранжа–Эйлера (10). Например, некоторая комбинация импульсов с постоянными коэффициентами,

$$P = \sum_{i=1}^l a^i p_i, \quad \frac{dP}{dl} = \left(\sum_{i=1}^l a^i \frac{\partial g_{ks}}{\partial x^i} \Big|_{P=0} \right) u^k u^s, \quad (16)$$

может оказаться интегралом, если связи между переменными, возникшие вследствие условия $P = \text{const}$ (чаще всего $P = 0$), приводят к обращению в нуль суперпозиции производных от метрического тензора в (16).

В дальнейшем метрическую форму будем записывать в традиционном виде $G = g_{ij} dx^i dx^j$, подразумевая, однако, при гамильтоновом описании, что dx^i обозначает $\dot{x}^i$.

4. ФАКТОР-ПРОСТРАНСТВА SU_3

Применим теперь вышеизложенный метод к метрическому пространству группы SU_3 . В метрике (6) компоненты метрического тензора не зависят от переменных u, v, α, β , которые и являются циклическими. Заметим, что в алгебре su_3 два коммутирующих оператора, но группа движений пространства группы G есть прямое произведение $G \otimes G$, и соответствующих векторов Киллинга на этом пространстве оказывается четыре.

4.1. Фактор-пространство $SU_3/(O_2)^2$. Факторизуем сначала пространство группы SU_3 по циклическим переменным u и v . Из соотношений

$$p_u = g_{ui} dx^i = 0, \quad p_v = g_{vi} dx^i = 0,$$

которые являются интегралами на траекториях, выразим переменные du и dv и подставим в метрику (6). Результатом является метрика шестимерного фактор-пространства

$$\begin{aligned}
dl^2 = & d\vartheta_2^2 + d\vartheta_1^2 + 2 \cos \eta \cos \vartheta_2 d\vartheta_1 d\vartheta_3 + d\vartheta_3^2 + \\
& + 2 \cos \vartheta_2 \sin \eta [\sin(2\vartheta_3) d\vartheta_1 d\alpha + \sin(2\vartheta_1) d\vartheta_3 d\beta] + \\
& + \frac{2 \cos \vartheta_2^2}{5 + 3 \cos(2\vartheta_2)} [d\eta^2 + 4 d\eta (\cos(2\vartheta_3) d\alpha + \cos(2\vartheta_1) d\beta)] + \\
& + \frac{[9 + 7 \cos(2\vartheta_2)](d\alpha^2 + d\beta^2) - 2 \sin^2 \vartheta_2 [\cos(4\vartheta_3) d\alpha^2 + \cos(4\vartheta_1) d\beta^2]}{2 [5 + 3 \cos(2\vartheta_2)]} + \\
& + 2 \left[\frac{8 \cos^2 \vartheta_2 \cos(2\vartheta_1) \cos(2\vartheta_3)}{5 + 3 \cos(2\vartheta_2)} - \cos \eta \sin(2\vartheta_1) \sin(2\vartheta_3) \right] d\alpha d\beta. \quad (17)
\end{aligned}$$

Детерминант этой метрики

$$g_6 = \frac{2 \cos^2 \vartheta_2 \sin^4 \vartheta_2 \sin^2(2\vartheta_1) \sin^2(2\vartheta_3)}{5 + 3 \cos(2\vartheta_2)}. \quad (18)$$

Детерминант метрики фактор-пространства N в M при факторизации по k переменным x^s выражается через детерминант метрики g_M и детерминант подматрицы g_{st} размерности $k \times k$:

$$\det(g_N) = \frac{\det(g_M)}{\det(g_{st})}. \quad (19)$$

При факторизации метрики (6) по переменным u и v подматрица (u, v) диагональна, ее детерминант есть

$$g_{uu}g_{vv} = \frac{3}{2} [5 + 3 \cos(2\vartheta_2)] \sin^2 \vartheta_2.$$

Этот детерминант как раз равен отношению детерминантов g/g_6 из (8) и (18).

4.2. Фактор-пространство $SU_3/(O_2)^4$. Факторизуем теперь таким же образом полученное шестимерное пространство по циклическим переменным α и β .

Фактор-пространство параметризуется четырьмя углами (с заменами для упрощения) $\vartheta_1 \rightarrow \vartheta_1/2$, ϑ_2 , $\vartheta_3 \rightarrow \vartheta_3/2$, η ,

$$dl^2 = d\vartheta_2^2 + \frac{m_{11} d\vartheta_1^2 + 2m_{12} d\vartheta_1 d\vartheta_3 + m_{22} d\vartheta_3^2 + 2m_{13} d\vartheta_1 d\eta + 2m_{23} d\vartheta_3 d\eta + m_{33} d\eta^2}{D}, \quad (20)$$

где

$$\begin{aligned}
D = & 13 - 5 \cos 2\vartheta_1 - 5 \cos 2\vartheta_3 - 3 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3 + \\
& + \cos 2\vartheta_2 (11 - 3 \cos 2\vartheta_1 - 3 \cos 2\vartheta_3 - 5 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3) - \\
& - 4 \cos^2 \vartheta_2 \cos \eta [(5 + 3 \cos 2\vartheta_2) \cos \eta \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_3 - 4 \cos \vartheta_2 \sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_3],
\end{aligned}$$

а коэффициенты в числителе формулы (20) определяются выражениями

$$\begin{aligned}
m_{11} &= 27 - 19 \cos 2\vartheta_1 + 5 \cos 2\vartheta_3 - 13 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3 + \\
&\quad + 4 \cos 2\vartheta_2 (1 - \cos 2\vartheta_1)(3 + 5 \cos 2\vartheta_3) - \cos 4\vartheta_2 (1 - \cos 2\vartheta_3)(7 + \cos 2\vartheta_1) + \\
&\quad + 64 \cos^3 \vartheta_2 \cos \eta (2 \cos \vartheta_2 \cos \eta \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_3 + \sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_3), \\
m_{22} &= 27 - 19 \cos 2\vartheta_3 + 5 \cos 2\vartheta_1 - 13 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3 + \\
&\quad + 4 \cos 2\vartheta_2 (1 - \cos 2\vartheta_3)(3 + 5 \cos 2\vartheta_1) - \cos(4\vartheta_2) (1 - \cos 2\vartheta_1)(7 + \cos 2\vartheta_3) + \\
&\quad + 64 \cos^3 \vartheta_2 \cos \eta (2 \cos \vartheta_2 \cos \eta \cos^2 \vartheta_1 \cos^2 \vartheta_3 + \sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_3), \\
m_{12} &= \cos 2\vartheta_2 [\cos \eta (39 - 7 \cos 2\vartheta_1 - 7 \cos 2\vartheta_3 - 25 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3 + \\
&\quad + 4 \cos 2\vartheta_2 (7 + \cos 2\vartheta_1 + \cos 2\vartheta_3 - 9 \cos 2\vartheta_1 \cos 2\vartheta_3) - \\
&\quad - 12 \cos 4\vartheta_2 \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_3) + 32 \cos^3 \vartheta_2 (1 + \cos^2 \eta) \sin 2\vartheta_1 \sin 2\vartheta_3], \\
m_{13} &= -32 \cos^3 \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 (\sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3 + \cos \eta \sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1) \sin \eta, \\
m_{23} &= -32 \cos^3 \vartheta_2 \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_3 (\sin \vartheta_3 \cos \vartheta_1 + \cos \eta \sin \vartheta_1 \cos \vartheta_3) \sin \eta, \\
m_{33} &= 8 \cos^2 \vartheta_2 (1 - \sin^2 \vartheta_2 \cos^2 \eta) \sin^2 \vartheta_1 \sin^2 \vartheta_3.
\end{aligned}$$

Отметим, что сама группа SU_3 имеет не четыре коммутирующие одномерные подгруппы, а всего только две (ранг группы равен 2). Однако при факторизации пространства мы учитываем не алгебраические, а метрические свойства. В частности, используется группа движений, которая равна $G \otimes G$ и имеет как раз четыре коммутирующие одномерные подгруппы.

5. ДРУГАЯ ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ SU_3

Параметризовать пространство SU_3 можно и по-другому. Возьмем две ортогональные матрицы Эйлера $O_1(\vartheta_1, \varphi_1, \psi_1)$ и $O_3(\vartheta_3, \psi_3, \varphi_3)$ (1) (обратим внимание на то, что в матрице O_3 углы ψ и φ поменялись местами), а также диагональную комплексную матрицу

$$B = \begin{bmatrix} e^{i(\mu+\nu/3)} & 0 & 0 \\ 0 & e^{i(-\mu+\nu/3)} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2i\nu/3} \end{bmatrix},$$

и построим матрицу

$$U = [O_1][B][O_3].$$

Эта матрица принадлежит группе матриц SU_3 . В этой параметризации (восемь параметров) метрика опять вычисляется по формуле (6). Ее вид существенно упрощается, если ввести 1-формы с индексом $i = 1, 3$,

$$\begin{aligned}
a_i &= d\varphi_i + \cos \vartheta_i d\psi_i, \\
b_i &= \sin \varphi_i d\vartheta_i - \cos \varphi_i \sin \vartheta_i d\psi_i, \\
c_i &= \cos \varphi_i d\vartheta_i + \sin \varphi_i \sin \vartheta_i d\psi_i,
\end{aligned}$$

удовлетворяющие соотношению

$$a^2 + b^2 + c^2 = d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi. \quad (21)$$

Выраженная через эти формы метрика принимает вид

$$\begin{aligned} dl^2 = & d\mu^2 + \frac{d\nu^2}{3} + d\vartheta_1^2 + d\vartheta_3^2 + d\varphi_1^2 + d\varphi_3^2 + d\psi_1^2 + d\psi_3^2 + \\ & + 2 \cos \vartheta_1 d\varphi_1 d\psi_1 + 2 \cos \vartheta_3 d\varphi_3 d\psi_3 + \\ & + 2 [\cos(2\mu) a_1 a_3 - \cos(\mu + \nu) b_1 b_3 + \cos(\mu - \nu) c_1 c_3] = \\ = & a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + c_1^2 + c_2^2 + \\ & + 2 [\cos(2\mu) a_1 a_3 - \cos(\mu + \nu) b_1 b_3 + \cos(\mu - \nu) c_1 c_3]. \end{aligned} \quad (22)$$

В этом представлении довольно просто находится обратный метрический тензор и гамильтониан:

$$\begin{aligned} p_{\varphi 1} &= a_1 + \cos(2\mu) a_3, \\ p_{\varphi 3} &= a_3 + \cos(2\mu) a_1, \\ p_{\vartheta 1} &= \cos \varphi_1 (b_1 - \cos(\mu + \nu) b_3) + \sin \varphi_1 (c_1 - \cos(\mu + \nu) b_1), \\ p_{\vartheta 3} &= \cos \varphi_3 (b_3 - \cos(\mu + \nu) b_1) + \sin \varphi_3 (c_3 - \cos(\mu + \nu) b_3), \\ p_{\psi 1} &= \cos \vartheta_1 (a_1 + \cos(2\mu) a_3) - \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 (b_1 - \cos(\mu + \nu) b_3) = \\ &= \cos \vartheta_1 p_{\varphi 1} - \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1 (b_1 - \cos(\mu + \nu) b_3), \\ p_{\psi 3} &= \cos \vartheta_3 (a_3 + \cos(2\mu) a_1) - \sin \vartheta_3 \cos \varphi_3 (b_3 - \cos(\mu + \nu) b_1) = \\ &= \cos \vartheta_3 p_{\varphi 3} - \sin \vartheta_3 \cos \varphi_3 (b_3 - \cos(\mu + \nu) b_1). \end{aligned}$$

Если теперь ввести переменные

$$p_i = \frac{p_{\psi i} - \cos \vartheta_i p_{\varphi i}}{\sin \vartheta_i}, \quad (23)$$

то выражения для $p_{\psi i}$ упростятся,

$$\begin{aligned} p_1 &= (b_1 - \cos(\mu + \nu) b_3) \sin \varphi_1 + (c_1 + \cos(\mu + \nu) c_3) \cos \varphi_1, \\ p_3 &= (b_3 - \cos(\mu + \nu) b_1) \sin \varphi_3 + (c_3 + \cos(\mu + \nu) c_1) \cos \varphi_3. \end{aligned}$$

Введем теперь линейные комбинации импульсов

$$p_{ix} = p_{\vartheta i} \cos \varphi_i - p_i \sin \varphi_i, \quad p_{iy} = p_{\vartheta i} \sin \varphi_i + p_i \cos \varphi_i. \quad (24)$$

Они коммутируют друг с другом при разных i , а при одном i их коммутационные соотношения друг с другом и с импульсом p_φ имеют вид

$$\{p_x, p_y\} = p_\varphi, \quad \{p_\varphi, p_x\} = p_y, \quad \{p_y p_\varphi\} = p_x. \quad (25)$$

Теперь несложно выразить 1-формы a_i, b_i, c_i через импульсы,

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{p_{\varphi 1} - \cos(2\mu) p_{\varphi 3}}{\sin^2(2\mu)}, & a_3 &= \frac{p_{\varphi 3} - \cos(2\mu) p_{\varphi 1}}{\sin^2(2\mu)}, \\ b_1 &= \frac{p_{1x} + \cos(\mu + \nu) p_{3x}}{\sin^2(\mu + \nu)}, & b_3 &= \frac{p_{3x} + \cos(\mu + \nu) p_{1x}}{\sin^2(\mu + \nu)}, \\ c_1 &= \frac{p_{1y} - \cos(\mu - \nu) p_{3y}}{\sin^2(\mu - \nu)}, & c_3 &= \frac{p_{3y} - \cos(\mu - \nu) p_{1y}}{\sin^2(\mu - \nu)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Подставляя эти выражения в метрику (22), находим обратную метрику

$$\begin{aligned} G &= p_\mu^2 + 3p_\nu^2 + \frac{p_{\varphi 1}^2 - 2 \cos(2\mu) p_{\varphi 1} p_{\varphi 3} + p_{\varphi 3}^2}{\sin^2(2\mu)} + \\ &+ \frac{p_{1x}^2 + 2 \cos(\mu + \nu) p_{1x} p_{3x} + p_{3x}^2}{\sin^2(\mu + \nu)} + \frac{p_{1y}^2 - 2 \cos(\mu - \nu) p_{1y} p_{3y} + p_{3y}^2}{\sin^2(\mu - \nu)}. \end{aligned} \quad (27)$$

5.1. Фактор-пространство SU_3/O_3 . Вследствие коммутационных соотношений (25) коммутатор $p_{\varphi 1}$ с гамильтонианом имеет вид

$$\{p_{\varphi 1}, G/2\} = p_{1y} \frac{p_{1x} + \cos(\mu + \nu) p_{3x}}{\sin^2(\mu + \nu)} - p_{1x} \frac{p_{1y} + \cos(\mu - \nu) p_{3y}}{\sin^2(\mu - \nu)}.$$

Аналогично

$$\{p_{\varphi 3}, G/2\} = p_{3y} \frac{p_{3x} + \cos(\mu + \nu) p_{1x}}{\sin^2(\mu + \nu)} - p_{3x} \frac{p_{3y} + \cos(\mu - \nu) p_{1y}}{\sin^2(\mu - \nu)}.$$

Если положить $p_{\varphi 3} = p_{\varphi 1} = p_\varphi$, то эти коммутаторы равны и, следовательно, комбинация $f = p_{\varphi 1} - p_{\varphi 3}$ слабо коммутирует с гамильтонианом. Такая же ситуация будет и в случае импульсов p_x, p_y . Поэтому, положив $p_{1i} = p_{3i}$ (т.е. $\vartheta_3 = \vartheta_1$, $\varphi_3 = \varphi_1$, $\psi_3 = \psi_1$), получаем фактор-пространство SU_3 с меньшим на три числом переменных: 5-мерное пространство SU_3/O_3 с метрикой (уменьшенной вдвое)

$$\begin{aligned} G_5 &= \frac{d\mu^2}{2} + \frac{d\nu^2}{6} + d\vartheta^2 + d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos \vartheta d\varphi d\psi + \\ &+ \cos(2\mu) (a)^2 - \cos(\mu + \nu) (b)^2 + \cos(\mu - \nu) (c)^2, \end{aligned} \quad (28)$$

где введены обозначения, как и выше, но без индексов,

$$\begin{aligned} a &= d\varphi + \cos \vartheta d\psi, \\ b &= \cos \varphi \sin \vartheta d\psi - \sin \varphi d\vartheta, \\ c &= \sin \varphi \sin \vartheta d\psi + \cos \varphi d\vartheta. \end{aligned}$$

Теперь выразим импульсы через дифференциалы,

$$p_i = \frac{\partial(G_5/2)}{\partial(dx^i)}. \quad (29)$$

По этой формуле найдем

$$\begin{aligned} p_\varphi &= \frac{\partial(G_5/2)}{\partial(d\varphi)} = (d\varphi + \cos\vartheta d\psi)(1 + \cos(2\mu)), \\ p_\vartheta &= \frac{\partial(G_5/2)}{\partial(d\vartheta)} = d\vartheta + \cos(\mu + \nu) \sin\varphi b + \cos(\mu - \nu) \cos\varphi c, \\ p_\psi &= d\psi + \cos\vartheta d\varphi + \cos(2\mu) \cos\vartheta a + \sin\vartheta [\cos(\mu - \nu) \sin\varphi c - \cos(\mu + \nu) \cos\varphi b]. \end{aligned}$$

Чтобы получить геометрический гамильтониан G , из этих соотношений нужно выразить дифференциалы координат через импульсы и подставить их в метрику. Дифференциал

$$d\varphi = \frac{p_\varphi}{1 + \cos(2\mu)} - \cos\vartheta d\psi. \quad (30)$$

Часть метрики, связанная с этим дифференциалом, принимает вид

$$d\varphi^2 + d\psi^2 + 2 \cos\vartheta d\varphi d\psi + \cos(2\mu) a^2 = \frac{p_\varphi^2}{1 + \cos(2\mu)} + (\sin\vartheta d\psi)^2.$$

Подставив $d\varphi$ в выражение для импульса p_ψ и введя импульс

$$p \equiv \frac{1}{\sin\vartheta} \left(p_\psi - \frac{\cos\vartheta p_\varphi}{1 + \cos(2\mu)} \right), \quad (31)$$

получим

$$\begin{aligned} \sin\vartheta d\psi &= p + b \cos(\mu + \nu) \cos\varphi - c \cos(\mu - \nu) \sin\varphi, \\ d\vartheta &= p_\vartheta - b \cos(\mu + \nu) \sin\varphi - c \cos(\mu - \nu) \cos\varphi. \end{aligned}$$

Подставляя теперь эти дифференциалы в выражения для b и c , найдем

$$\begin{aligned} b &= \frac{p \cos\varphi - p_\vartheta \sin\varphi}{1 - \cos(\mu + \nu)}, \\ c &= \frac{p \sin\varphi + p_\vartheta \cos\varphi}{1 + \cos(\mu - \nu)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Осталось подставить эти соотношения в метрику и получить геометрический гамильтониан

$$G = 6p_\nu^2 + 2p_\mu^2 + \frac{p_\varphi^2}{\cos^2(2\mu)} + \frac{p_1^2}{\sin^2(\mu + \nu)} + \frac{p_2^2}{\cos^2(\mu - \nu)}, \quad (33)$$

где

$$p_1 = p_\vartheta \sin\varphi - p_0 \cos\varphi, \quad p_2 = p_\vartheta \cos\varphi + p_0 \sin\varphi, \quad p_0 = \frac{p_\psi - p_\varphi \cos\vartheta}{\sin\vartheta}. \quad (34)$$

Интегралами являются величины p_ψ и

$$L^2 = p_\vartheta^2 + p_\varphi^2 + p_0^2 = p_\vartheta^2 + \frac{(p_\varphi - p_\psi \cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta}. \quad (35)$$

В представлении прямого метрического тензора

$$G_5 = d\mu^2 + \frac{d\nu^2}{3} + \cos^2(2\mu) da^2 + \sin^2(\mu + \nu) db^2 + \cos^2(\mu - \nu) dc^2. \quad (36)$$

Детерминант этой метрики

$$g_5 = \cos^2(2\mu) \sin^2\vartheta [\sin(2\mu) + \sin(2\nu)]^2. \quad (37)$$

5.2. Фактор-пространство $SU_3/O_3/O_2$. Далее просто провести факторизацию по циклической переменной ψ , положив $p_\psi = 0$. Это приведет к метрической форме четырехмерного пространства, формально совпадающей с (33), однако в определении (31) для p при этом надо считать $p_\psi = 0$, так что G_4 будет зависеть только от четырех импульсов и координат. Метрический тензор получается обращением обратного,

$$G_4 = d\mu^2 + \frac{d\nu^2}{3} + g_{\vartheta\vartheta} d\vartheta^2 + 2g_{\vartheta\varphi} d\vartheta d\varphi + g_{\varphi\varphi} d\varphi^2, \quad (38)$$

где

$$\begin{aligned} g_{\vartheta\vartheta} &= \frac{\cos^2 \mu}{gg} [\sin^2 (\mu + \nu) \cos^2 \varphi + \cos^2 (\mu - \nu) \sin^2 \varphi], \\ g_{\vartheta\varphi} &= -\frac{\cos^2 \mu}{gg} \cos(2\mu) \cos(2\nu) \operatorname{ctg} \vartheta \sin \varphi \cos \varphi, \\ g_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{gg} [\sin^2 (\mu + \nu) \cos^2 (\mu - \nu) + \\ &\quad + \operatorname{ctg}^2 \vartheta \cos^2 (2\mu) \sin^2 (\mu + \nu) \sin^2 \varphi + \cos^2 (\mu - \nu) \cos^2 \varphi], \\ gg &= \cos^2 (2\mu) \operatorname{ctg}^2 \vartheta + \sin^2 (\mu + \nu) \cos^2 \varphi + \cos^2 (\mu - \nu) \sin^2 \varphi. \end{aligned}$$

Это – метрика четырехмерного пространства $SU_3/O_3/O_2$.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы построили два типа четырехмерных симметрических пространств, являющихся фактор-пространствами SU_3 . Были использованы две различные параметризации многообразия группы SU_3 . Преимущество первой состоит в том, что она сразу выделяет четыре циклических переменных, однако изначально содержит лишнюю переменную. Выражения при использовании второй параметризации более просты, матрица явно обращается. Но, видимо, наиболее существенным моментом при этой параметризации является ее обобщение на случай групп SU_n при больших n . Комплексная матрица $n \times n$ представляется как произведение трех матриц

$$[SU_n] = [O1_n][\operatorname{diag}][O2_n], \quad (39)$$

где $[O1_n]$ и $[O2_n]$ – две различные $n(n-1)/2$ -параметричные матрицы группы вращений O_n , а $[\operatorname{diag}]$ – диагональная матрица с $n-1$ параметрами из группы SU_n , что в целом дает $n^2 - 1$ параметр.

Благодарности. Автор выражает благодарность А. П. Протогенову, стимулировавшему появление данной работы.

Список литературы

- [1] Д. Е. Бурланков. ТМФ. 1977. Т. 32. С. 326.
- [2] Д. Е. Бурланков, В. Н. Дутышев. ЖЭТФ. 1977. Т. 73. С. 377.
- [3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. М.: Физматгиз, 1979.
- [4] О. Лоос. Симметрические пространства. М.: Наука, 1985.

Поступила в редакцию 27.XII.2002 г.