Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. П. Волобуев, М. Н. Смоляков, Точные решения для линеаризованной гравитации в модели Рэндалла–Сундрума, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 1, 12–28

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf50>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 07:25:09

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОЙ ГРАВИТАЦИИ В МОДЕЛИ РЭНДАЛЛА–СУНДРУМА

Точно решены уравнения движения для линеаризованной гравитации в модели Рэндалла–Сундрума с материей на бранах и найден ньютоновский предел модели. Результат содержит вклады радиона и массивных гравитонов, что существенно модифицирует закон Ньютона на малых расстояниях. Рассмотрены эффекты, вызываемые “теневой” материей, находящейся на другой бране, и произведено их сравнение с эффектами обычной материи для бран с положительным и отрицательным натяжением. Также рассчитаны отклонение света и закон Ньютона в приближении нулевых мод и явно выделен вклад поля радиона.

Ключевые слова: теория Калуцы–Клейна, браны, линеаризованная гравитация, ньютоновский предел.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] было найдено точное решение для системы из двух мембран (или просто бран), взаимодействующих с гравитацией в пятимерном пространстве-времени. Эта модель называется моделью Рэндалла–Сундрума (обычно используется сокращение RS1-модель), и она широко обсуждается в литературе (см. обзоры и ссылки в работах [2]). Последовательный анализ модели Рэндалла–Сундрума без материи на бранах был проведен в работе [3]. Однако уравнения движения для флуктуаций метрики в случае наличия материи на бранах еще не были изучены надлежащим образом. Модель Рэндалла–Сундрума с одной и двумя бранами (первая обычно называется RS2-моделью) с материей на бранах была рассмотрена в работе [4]. В этой работе для вычислений использовались гауссовы нормальные координаты и формализм “изогнутой браны”, непоследовательность которого для RS2-модели обсуждалась в работе [5]. Кроме того, использование гауссовых нормальных координат “перемешивает” вклады полей радиона и гравитона в четырехмерное гравитационное поле. В настоящей работе уравнения для полей гравитона и радиона расцеплены, что позволяет точно решить линеаризованные уравнения движения для RS1-модели с материей на бранах. Также рассчитан

* Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: volobuev@theory.sinp.msu.ru

† Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: smolyakov@theory.sinp.msu.ru

ньютоновский предел и отклонение света точечным статическим источником в приближении нулевых мод.

Модель Рэндалла–Сундрума [1] описывает гравитацию в пятимерном пространстве-времени E с двумя вложенными в это пространство бранами. Обозначим координаты в этом пространстве $\{x^M\} \equiv \{x^\mu, x^4\}$, $M = 0, 1, 2, 3, 4$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, где $\{x^\mu\} \equiv x$, а координата $x^4 \equiv y$ соответствует пятому дополнительному пространственному измерению. Оно образует орбифолд S^1/Z_2 , представляющий собой окружность диаметра $2R/\pi$ с отождествленными точками y и $-y$. В дополнение к этому мы имеем обычное условие периодичности, которое отождествляет точки (x, y) и $(x, y + 2R)$. В соответствии с этим метрика g_{MN} удовлетворяет условиям симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu}(x, -y) &= g_{\mu\nu}(x, y), \\ g_{\mu 4}(x, -y) &= -g_{\mu 4}(x, y), \\ g_{44}(x, -y) &= g_{44}(x, y). \end{aligned} \quad (1)$$

Браны расположены в неподвижных точках орбифолда $y = 0$ и $y = R$.

Действие этой модели записывается в виде

$$S = S_g + S_1 + S_2, \quad (2)$$

где S_g , S_1 и S_2 суть

$$\begin{aligned} S_g &= \frac{1}{16\pi\widehat{G}} \int_E (R - \Lambda) \sqrt{-g} d^4x dy, \\ S_1 &= V_1 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y) d^4x dy, \\ S_2 &= V_2 \int_E \sqrt{-\tilde{g}} \delta(y - R) d^4x dy. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $\tilde{g}_{\mu\nu}$ – индуцированная метрика на бранах, а индексы 1 и 2 различают браны. Сигнатура метрики g_{MN} выбрана равной $(-, +, +, +, +)$.

Решение Рэндалла–Сундрума для метрики имеет вид

$$ds^2 = \gamma_{MN} dx^M dx^N = e^{2\sigma(y)} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + dy^2, \quad (4)$$

где $\eta_{\mu\nu}$ есть метрика Минковского (метрика типа (4) обсуждалась ранее в работах [6]), и функция $\sigma(y) = -k|y|$ в интервале $-R \leq y \leq R$ обладает следующими свойствами:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial y} = -k \operatorname{sign}(y), \quad \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = -2k(\delta(y) - \delta(y - R)). \quad (5)$$

Параметр k положителен и имеет размерность массы, а параметры Λ и $V_{1,2}$ выражаются через него следующим образом:

$$\Lambda = -12k^2, \quad V_1 = -V_2 = -\frac{3k}{4\pi\widehat{G}}.$$

Отсюда следует, что брана 1 имеет положительную плотность энергии (натяжение), а брана 2 – отрицательную.

Обозначим $\hat{\kappa} = \sqrt{16\pi\hat{G}}$, где $\hat{G}$ – пятимерная гравитационная постоянная, и параметризуем метрику g_{MN} как

$$g_{MN} = \gamma_{MN} + \hat{\kappa} h_{MN}, \quad (6)$$

где h_{MN} – флуктуации метрики. Подставляя (6) в (2) и сохраняя члены нулевого порядка по $\hat{\kappa}$, получим лагранжиан второй вариации этой модели [3]. Он инвариантен относительно калибровочных преобразований вида

$$h'_{MN}(x, y) = h_{MN}(x, y) - (\nabla_M \xi_N(x, y) + \nabla_N \xi_M(x, y)), \quad (7)$$

где ∇_M обозначает ковариантную производную в смысле фоновой метрики γ_{MN} , а функции $\xi_N(x, y)$ удовлетворяют условиям симметрии орбифолда

$$\begin{aligned} \xi^\mu(x, -y) &= \xi^\mu(x, y), \\ \xi^4(x, -y) &= -\xi^4(x, y). \end{aligned} \quad (8)$$

С помощью этих калибровочных преобразований мы можем наложить калибровку

$$h_{\mu 4} = 0, \quad h_{44} = h_{44}(x) \equiv \phi(x), \quad (9)$$

которая называется *унитарной* (см. [3]). Подчеркнем еще раз, что браны в этой калибровке остаются прямыми, т.е. мы *не используем* формализм “изогнутой” браны, который разрушает структуру модели (этот вопрос рассматривался в работе [5]).

Взаимодействие флуктуаций метрики с материей имеет стандартный вид

$$\frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_1} h^{\mu\nu}(x, 0) T_{\mu\nu}^1 dx + \frac{\hat{\kappa}}{2} \int_{B_2} h^{\mu\nu}(x, R) T_{\mu\nu}^2 \sqrt{-\gamma_2} dx, \quad (10)$$

где $T_{\mu\nu}^1$ и $T_{\mu\nu}^2$ – тензоры энергии-импульса материи на бране 1 и бране 2, соответственно:

$$T_{\mu\nu}^{1,2} = 2 \frac{\delta L^{1,2}}{\delta \gamma^{\mu\nu}} - \gamma_{\mu\nu}^{1,2} L^{1,2}.$$

Из формулы (10) видно, что $h_{\mu\nu}$ является единственным наблюдаемым физическим полем модели, так как только это поле взаимодействует с материей на бранах. Очевидно, что унитарная калибровка (9) не фиксирует до конца калибровку этого поля. Фактически после наложения этих калибровочных условий остаются калибровочные преобразования вида

$$\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x), \quad (11)$$

которые изменяют продольную компоненту поля $h_{\mu\nu}$. Тем не менее оказывается, что удобнее решать уравнения движения для линеаризованной гравитации в унитарной калибровке, а затем выбрать соответствующую калибровку в нашем четырехмерном мире на бране. Мы будем использовать для поля $h_{\mu\nu}$ на бране калибровку де Дондера, которая соответствует выбору *гармонических координат*.

2. НЬЮТОНОВСКИЙ ПРЕДЕЛ

Уравнения движения для флуктуаций компонент метрики в унитарной калибровке имеют следующий вид (см. [3]):

1) $\mu\nu$ -компоненты:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left(\partial_\rho \partial^\rho h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\rho h_{\rho\nu} - \partial_\nu \partial^\rho h_{\rho\mu} + \frac{\partial^2 h_{\mu\nu}}{\partial y^2} \right) - \\ & - 2k^2 h_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \tilde{h} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \\ & + \frac{1}{2} \gamma_{\mu\nu} \left(\partial^\rho \partial^\sigma h_{\rho\sigma} - \partial_\rho \partial^\rho \tilde{h} - \frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} - 4 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} - \partial_\rho \partial^\rho \phi + 12k^2 \phi \right) + \\ & + [2k h_{\mu\nu} - 3k \gamma_{\mu\nu} \phi] (\delta(y) - \delta(y - R)) = -\frac{\hat{\kappa}}{2} T_{\mu\nu}; \end{aligned} \quad (12)$$

2) $\mu 4$ -компоненты:

$$\frac{\partial}{\partial y} (\partial_\mu \tilde{h} - \partial^\nu h_{\mu\nu}) - 3 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \partial_\mu \phi = 0; \quad (13)$$

3) 44-компонента:

$$\frac{1}{2} (\partial^\mu \partial^\nu h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial^\mu \tilde{h}) - \frac{3}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} + 6k^2 \phi = 0, \quad (14)$$

где $T_{\mu\nu}$ – тензор энергии-импульса материи и $\tilde{h} = \gamma^{\mu\nu} h_{\mu\nu}$. Отметим, что в выбранной калибровке (13) является уравнением связи.

Мы также будем использовать вспомогательное уравнение, которое получается вычитанием из свернутого уравнения для $\mu\nu$ -компонент уравнения для 44-компоненты, умноженного на 2. Это уравнение содержит только $\tilde{h}$ и ϕ и имеет вид

$$\frac{\partial^2 \tilde{h}}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial \tilde{h}}{\partial y} - 8k^2 \phi + 8k \phi (\delta(y) - \delta(y - R)) + \partial_\mu \partial^\mu \phi = \frac{\hat{\kappa}}{3} T_\mu^\mu. \quad (15)$$

Если $T_{\mu\nu} = 0$, то физические степени свободы модели могут быть выделены с помощью подстановки [3]

$$h_{\mu\nu} = b_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} (\sigma - c) \phi + \frac{1}{2k^2} \left(\sigma - c + \frac{1}{2} + \frac{c}{2} e^{-2\sigma} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (16)$$

где $c = kR/(e^{2kR} - 1)$. Оказывается, что поле $b_{\mu\nu}(x^\mu, y)$ описывает безмассовый гравитон [1], [7] и массивные поля спина 2, а поле $\phi(x)$ – безмассовое скалярное поле, названное радионом. По-видимому, поле радиона впервые было описано в работе [8] (см. также [9]) и обсуждалось в работах [10].

Однако в случае наличия материи на бранах ситуация несколько меняется. Для начала рассмотрим случай, когда материя расположена на бране 1 (в точке $y = 0$), т.е.

тензор энергии-импульса имеет вид $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(x)\delta(y)$. Подстановка, позволяющая расцепить уравнения движения, имеет следующий вид:

$$h_{\mu\nu} = u_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu}(\sigma - c)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\sigma - c + \frac{1}{2} + ce^{2kR} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi. \quad (17)$$

С учетом (17) уравнения (13)–(15), переписанные через плоскую метрику ($u = \eta^{\mu\nu} u_{\mu\nu}$), принимают вид

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} (\partial^\nu u_{\mu\nu} - \partial_\mu u)) = 0, \quad (18)$$

$$e^{-4\sigma} (\partial^\mu \partial^\nu u_{\mu\nu} - \square u) - 3 \frac{\partial \sigma}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} u) + 3ce^{2kR-2\sigma} \square \phi = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(e^{2\sigma} \frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} u) \right) + 2 \frac{c}{k} \delta(y) [e^{2kR} - 1] \square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{3} t_\mu^\mu \delta(y). \quad (20)$$

Рассмотрим преобразование Фурье по координате y всех членов уравнения (20). Так как член с производной $\partial/\partial y$ не содержит нулевую моду, из этого уравнения следует, что

$$\square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{6R} t, \quad t \equiv t_\mu^\mu, \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^{-2\sigma} u) = 0. \quad (22)$$

Из уравнений (18) и (22) следует, что

$$\partial^\nu u_{\mu\nu} = e^{2\sigma} A_\mu(x), \quad (23)$$

$$\partial_\mu u = e^{2\sigma} B_\mu(x), \quad (24)$$

где $A_\mu(x)$ и $B_\mu(x)$ зависят только от четырехмерных координат. Легко видеть, что с помощью остаточных калибровочных преобразований (11) на поле $u_{\mu\nu}$ можно наложить калибровку де Дондера

$$\partial^\nu \left(u_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} u \right) = 0. \quad (25)$$

В результате в наличии остаются калибровочные преобразования вида

$$\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x), \quad \square \epsilon_\mu = 0. \quad (26)$$

Калибровочные преобразования с функциями ξ_μ , удовлетворяющими этим условиям, важны для нахождения числа степеней свободы безмассового гравитона. Из уравнения (19) следует, что

$$\square u = e^{2\sigma} \frac{\hat{\kappa} k}{1 - e^{-2kR}} t. \quad (27)$$

Теперь рассмотрим уравнение для $\mu\nu$ -компонент флуктуаций метрики. После подстановки (17) и в калибровке де Дондера оно принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}e^{-2\sigma}\square u_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}u_{\mu\nu} - 2k^2u_{\mu\nu} + 2ku_{\mu\nu}(\delta(y) - \delta(y - R)) = \\ = -\frac{\hat{k}}{2}f_{\mu\nu}\delta(y) + \frac{\hat{k}k}{12(1 - e^{-2kR})}\left(\eta_{\mu\nu} + 2\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}\right)t, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$f_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} - \frac{1}{3}\left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}\right)t. \quad (29)$$

Легко видеть, что тензор $f_{\mu\nu}$ — поперечно-бесследовый. Здесь и далее обратный даламбертиан является интегральным оператором, который однозначно определяется условиями излучения.

Для того чтобы решить это уравнение, воспользуемся подстановкой

$$u_{\mu\nu} = v_{\mu\nu} + \frac{\hat{k}k}{6(1 - e^{-2kR})}e^{2\sigma}\square^{-1}\left(\eta_{\mu\nu} + 2\frac{\partial_\mu\partial_\nu}{\square}\right)t, \quad (30)$$

которая не нарушает условие (25), принимающее вид

$$\partial^\nu v_{\mu\nu} = 0, \quad v = v^\nu_\nu = 0. \quad (31)$$

Подставляя (30) в (28), получим

$$\frac{1}{2}e^{-2\sigma}\square v_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}v_{\mu\nu} - 2k^2v_{\mu\nu} + 2kv_{\mu\nu}(\delta(y) - \delta(y - R)) = -\frac{\hat{k}}{2}f_{\mu\nu}\delta(y). \quad (32)$$

Уравнение (32) может быть решено точно. Для этого рассмотрим преобразование Фурье $\tilde{v}_{\mu\nu}(p, y)$ поля $v_{\mu\nu}(x, y)$ по координатам x ; оно удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}e^{-2\sigma}(-p^2)\tilde{v}_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tilde{v}_{\mu\nu} - 2k^2\tilde{v}_{\mu\nu} + 2k\tilde{v}_{\mu\nu}(\delta(y) - \delta(y - R)) = -\frac{\hat{k}}{2}\tilde{f}_{\mu\nu}\delta(y), \quad (33)$$

где $p^2 = -p_0^2 + \vec{p}^2$.

Для начала решим это уравнение при $y \neq 0$, $y \neq R$ (см. [3], [7]). В этом случае решение уравнения (33) имеет вид

$$\tilde{v}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}J_2\left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k}e^{k|y|}\right) + D_{\mu\nu}N_2\left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k}e^{k|y|}\right), \quad p^2 < 0, \quad (34)$$

$$\tilde{v}_{\mu\nu} = C_{\mu\nu}I_2\left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k}e^{k|y|}\right) + D_{\mu\nu}K_2\left(\frac{\sqrt{|p^2|}}{k}e^{k|y|}\right), \quad p^2 > 0. \quad (35)$$

Подставляя его обратно в уравнение (33) и приравнявая граничные члены с δ -функциями, получим значения тензоров $C_{\mu\nu}$ и $D_{\mu\nu}$. В результате мы получили решение уравнения для $\mu\nu$ -компонент флуктуаций метрики в случае наличия материи на бране с положительным натяжением (в точке $y = 0$):

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{-p^2}} \times \\ & \times \frac{N_2(\sqrt{-p^2}e^{k|y|}/k)J_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k) - J_2(\sqrt{-p^2}e^{k|y|}/k)N_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k)}{J_1(\sqrt{-p^2}/k)N_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k) - N_1(\sqrt{-p^2}/k)J_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k)}, \quad p^2 < 0; \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & - \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{p^2}} \times \\ & \times \frac{K_2(\sqrt{p^2}e^{k|y|}/k)I_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k) + I_2(\sqrt{p^2}e^{k|y|}/k)K_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k)}{I_1(\sqrt{p^2}/k)K_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k) - I_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k)K_1(\sqrt{p^2}/k)}, \quad p^2 > 0. \end{aligned} \quad (37)$$

Так как мы собираемся рассчитать ньютоновский предел, то в этом случае тензор $\tilde{t}_{\mu\nu}$ пропорционален $\delta(p_0)$. Это означает, что нам нужно решение при $p^2 > 0$.

Когда материя расположена на бране 2 (в точке $y = R$), все рассуждения такие же, как и представленные выше. Полная подстановка имеет вид

$$\begin{aligned} h_{\mu\nu} = & u_{\mu\nu} + e^{2\sigma}\eta_{\mu\nu}(\sigma - c)\phi + \frac{1}{2k^2} \left(\sigma + \frac{1}{2} \right) \partial_\mu \partial_\nu \phi, \\ u_{\mu\nu} = & v_{\mu\nu} + \frac{\hat{\kappa}k}{6(e^{2kR} - 1)} e^{2\sigma} \square^{-1} \left(\eta_{\mu\nu} + 2 \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \end{aligned} \quad (38)$$

с такими же калибровочными условиями. Уравнения движения на поле ϕ и решение для поля $v_{\mu\nu}$ в случае наличия материи на бране 2 могут быть получены по аналогии и имеют вид

$$\square\phi = \frac{\hat{\kappa}}{6R}t, \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{-p^2}} \frac{1}{e^{kR}} \times \\ & \times \frac{N_2(\sqrt{-p^2}e^{k|y|}/k)J_1(\sqrt{-p^2}/k) - J_2(\sqrt{-p^2}e^{k|y|}/k)N_1(\sqrt{-p^2}/k)}{J_1(\sqrt{-p^2}/k)N_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k) - N_1(\sqrt{-p^2}/k)J_1(\sqrt{-p^2}e^{kR}/k)}, \quad p^2 < 0; \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{v}_{\mu\nu} = & - \left[\tilde{t}_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right) \tilde{t} \right] \frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{p^2}} \frac{1}{e^{kR}} \times \\ & \times \frac{K_2(\sqrt{p^2}e^{k|y|}/k)I_1(\sqrt{p^2}/k) + I_2(\sqrt{p^2}e^{k|y|}/k)K_1(\sqrt{p^2}/k)}{I_1(\sqrt{p^2}/k)K_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k) - I_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k)K_1(\sqrt{p^2}/k)}, \quad p^2 > 0. \end{aligned} \quad (41)$$

Важным моментом является то, что эти уравнения написаны в координатах x , которые являются *галилеевыми на бране 1* (а не на бране 2) и не подходят для изучения физических эффектов на бране 2 (напомним, что координаты называются галилеевыми, если $g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ [11]).

Очевидно, что когда материя расположена на обеих бранах, решение для флуктуирующей метрики является просто суммой решений для каждой браны в отдельности; это следует из линейности уравнений.

Теперь приступим к изучению четырехмерной теории на бранах. Для начала рассмотрим случай, когда материя и наблюдатель расположены на бране 1. Легко видеть, что $h_{\mu\nu}$ (формулы (17), (30)) не удовлетворяют калибровочному условию де Дондера. Остаточные калибровочные преобразования (26) не позволяют перейти к этой калибровке во всем пространстве. Но так как мы рассматриваем эффективную теорию на бране 1, то можно опустить условие $\square\epsilon_\mu = 0$, которое фиксирует калибровку поля $v_{\mu\nu}$. Далее, с помощью калибровочных функций вида

$$\epsilon_\mu = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{2k} + \frac{1}{4k^2} \right) \partial_\mu \phi + \frac{kR}{e^{2kR} - 1} \frac{\partial_\mu}{\square} \phi \quad (42)$$

мы можем наложить калибровку де Дондера на поле $h_{\mu\nu}$ на бране 1. В итоге получим

$$h_{\mu\nu}|_{y=0} = v_{\mu\nu}|_{y=0} + \eta_{\mu\nu} kR \phi + 2kR \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \phi. \quad (43)$$

Эта формула описывает четырехмерное гравитационное поле на бране 1, и в ней учитываются вклады безмассового и массивных гравитонов, а также вклад поля радиона.

Теперь рассчитаем ньютоновский предел для этого случая. Рассмотрим статическую точечную массу, тензор энергии-импульса которой имеет вид $t_{00} = M\delta(\vec{x})$, $t_{0k} = t_{ij} = 0$ (и $\tilde{t}_{00} = 2\pi M\delta(p_0)$), где M обозначает инертную массу. Нам нужно найти только h_{00} -компоненту флуктуаций метрики (см. (37))

$$\tilde{v}_{00} = -\frac{\hat{\kappa}}{2\sqrt{p^2}} \frac{K_2(\sqrt{p^2}/k)I_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k) + I_2(\sqrt{p^2}/k)K_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k)}{I_1(\sqrt{p^2}/k)K_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k) - I_1(\sqrt{p^2}e^{kR}/k)K_1(\sqrt{p^2}/k)} \frac{4\pi}{3} M\delta(p_0), \quad (44)$$

$$h_{00}(x, 0) = v_{00}(x, 0) - kR \frac{1}{4\pi} \frac{\hat{\kappa}}{6R} \frac{M}{r} \quad (45)$$

(см. (43)), где $r = \sqrt{\vec{x}^2}$ и

$$v_{00}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int e^{-i\eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu} \tilde{v}_{00} d^4 p. \quad (46)$$

Используя последнее соотношение и уравнение (44), легко получить

$$v_{00}(x, 0) = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{4\pi}{r} \frac{4\pi}{3} M \int_0^\infty g(p) \sin(pr) p dp, \quad (47)$$

$$g(p) = \frac{\hat{\kappa}}{2p} \frac{K_2(p/k)I_1(pe^{kR}/k) + I_2(p/k)K_1(pe^{kR}/k)}{I_1(p/k)K_1(pe^{kR}/k) - I_1(pe^{kR}/k)K_1(p/k)},$$

где $p = \sqrt{\vec{p}^2}$. К сожалению, взять интеграл в уравнении (47) аналитически не представляется возможным. Однако мы можем оценить подынтегральное выражение для следующих случаев: 1) $p \ll e^{-kR}k$, 2) $e^{-kR}k \ll p \ll k$ и 3) $k \ll p$. Используя эти оценки

в интервалах $0 \leq p \leq e^{-kR}k$, $e^{-kR}k \leq p \leq k$ и $k < p < \infty$, соответственно, мы можем оценить интеграл (47).

Сначала, используя рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда, представим функцию $g(p)$ подынтегрального выражения в следующем виде:

$$g(p) = \frac{\hat{\kappa}k}{p^2} - \frac{\hat{\kappa}}{2p} \frac{K_0(p/k)I_1(pe^{kR}/k) + I_0(p/k)K_1(pe^{kR}/k)}{I_1(p/k)K_1(pe^{kR}/k) - I_1(pe^{kR}/k)K_1(p/k)}. \quad (48)$$

С помощью этого преобразования мы явно выделили вклад нулевой моды поля v_{00} . Подставляя асимптотики модифицированных функций Бесселя и функций Макдональда в (48), получим

$$g(p) \approx \frac{\hat{\kappa}k}{p^2} + \begin{cases} \frac{\hat{\kappa}k}{e^{2kR}-1} \frac{1}{p^2} - \frac{\hat{\kappa}}{2k(1-e^{-2kR})} \ln\left(\frac{p}{k}\right), & p \ll e^{-kR}k, \\ -\frac{\hat{\kappa}}{2k} \ln\left(\frac{p}{k}\right), & e^{-kR}k \ll p \ll k, \\ \frac{\hat{\kappa}}{2p}, & k \ll p. \end{cases} \quad (49)$$

Все интегралы, возникающие после подстановки (49) в (47), берутся аналитически. Интеграл вида $\int_a^\infty \sin(pr) dp$ может быть вычислен с помощью регуляризации

$$\int_a^\infty \sin(pr) dp = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_a^\infty e^{-\epsilon p} \sin(pr) dp \right) = \frac{\cos(ar)}{r}. \quad (50)$$

Хорошо известно, что гравитационный потенциал выражается через g_{00} -компоненту метрики как $g_{00} = -1 - 2V$ [12]. Так как $g_{00} = -1 + \hat{\kappa}h_{00}$, то получаем

$$V = -\frac{\hat{\kappa}}{2}h_{00}. \quad (51)$$

Используя соотношения (43), (47) и (49), имеем

$$V \approx -\frac{M}{r}G_1 \left(1 + \frac{4 \cos(kr)}{3\pi kr} - \frac{4}{3\pi k^2 r^2} [\sin(kr) - \text{si}(kr)] \right), \quad (52)$$

где

$$G_1 = \frac{\hat{G}k}{1 - e^{-2kR}}, \quad \text{si}(b) = \int_0^b \frac{\sin t}{t} dt.$$

Таким образом, мы изучили случай, когда масса и наблюдатель находятся на бране 1. Но осталось еще три случая, которые нужно рассмотреть. Это случай “теневого” материи, когда масса расположена на бране 2, а наблюдатель – на бране 1; случай, когда масса и наблюдатель расположены на бране 2; случай, когда масса расположена на бране 1, а наблюдатель – на бране 2 (также эффект “теневого” материи). Все вычисления в этих случаях такие же, как и описанные выше. Но если наблюдатель находится на бране 2, то для получения правильного результата необходимо перейти к галилеевым координатам на бране 2 (этот вопрос детально обсуждался в работе [3]). Итак, в галилеевых координатах на той бране, где расположена масса, тензор энергии-импульса $t_{\mu\nu}$

имеет вид $t_{00} = M\delta(\vec{x})$, $t_{0k} = t_{ij} = 0$. В формулах, представленных ниже (в галилеевых координатах на бране наблюдателя), тензор энергии-импульса всегда имеет этот канонический вид, а переход к галилеевым координатам учитывается в факторе перед скобками.

Обсудим теперь, как переходить к галилеевым координатам на бране 2, на примере случая, когда масса находится на бране 1, а наблюдатель – на бране 2 (эффект “теневой” материи). Мы будем использовать следующий вид преобразования Фурье с соответствующей подынтегральной функцией:

$$A_{\mu\nu}(x_0, \vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^4} B_{\mu\nu} \int e^{i\eta_{\mu\nu} p^\mu x^\nu} g(p) \delta(p_0) d^4 p, \quad (53)$$

где $B_{\mu\nu}$ – постоянный тензор. Это выражение в галилеевых координатах z^μ на бране 2 имеет следующий вид:

$$A'_{\mu\nu}(z_0, \vec{z}) = \frac{1}{(2\pi)^4} B_{\mu\nu} e^{-kR} \int e^{i\eta_{\mu\nu} q^\mu z^\nu} g(e^{-kR} q) \delta(q_0) d^4 q. \quad (54)$$

В частности, оно означает, что интервалы, в которых нужно оценить подынтегральное выражение, изменяются. Теперь мы должны использовать для оценок следующие области: $q \ll k$, $k \ll q \ll e^{kR} k$, $e^{kR} k \ll q$.

Еще одна трудность, возникающая в этом случае, – это невозможность взятия одного из интегралов аналитически. Он имеет вид

$$\int_k^\infty e^{-q/k} \sqrt{q} \sin(qr) dq = k^{3/2} \int_1^\infty \sqrt{t} \sin(tkr) e^{-t} dt, \quad (55)$$

где $r = \sqrt{z^2}$. Но мы можем оценить этот интеграл в пределах $1 \ll kr$ и $kr \ll 1$.

В случае $1 \ll kr$ интеграл (55) может быть оценен с помощью интегрирования по частям:

$$\int_1^\infty \sqrt{t} \sin(tkr) e^{-t} dt \approx e^{-1} \frac{\cos(kr)}{kr}, \quad (56)$$

в случае $kr \ll 1$ мы можем использовать разложение $\sin(tkr)$ в ряд при малых аргументах:

$$\int_1^\infty \sqrt{t} \sin(tkr) e^{-t} dt \approx \int_0^\infty \sqrt{t} \sin(tkr) e^{-t} dt - \int_0^1 \sqrt{t} \left(krt - \frac{(kr)^3 t^3}{6} + \dots \right) e^{-t} dt. \quad (57)$$

Значение первого интеграла было взято в таблице интегралов [13], второй же был получен численно:

$$\int_1^\infty \sqrt{t} \sin(tkr) e^{-t} dt \approx \left(\frac{3}{4} \sqrt{\pi} - 0.2 \right) kr + 0.099 \frac{1}{6} (kr)^3. \quad (58)$$

Еще одним важным моментом случая “теневого” материи является переход к калибровке де Дондера. Рассмотрим его для $h_{\mu\nu}|_{y=R}$ (в этом случае материя расположена

на бране 1, а наблюдатель – на бране 2). Это поле не удовлетворяет калибровочному условию де Дондера на бране 2, по аналогии со случаем, когда наблюдатель тоже находится на бране 1. Однако с помощью калибровочных функций вида

$$\epsilon_\mu = \frac{e^{2kR}}{8k^2} \partial_\mu \phi + \frac{kR e^{2kR}}{e^{2kR} - 1} \frac{\partial_\mu \phi}{\square} \quad (59)$$

можно перейти в калибровку де Дондера на бране 2. Но после этих преобразований поле $h_{\mu\nu}|_{y=R}$ оказывается равным

$$h_{\mu\nu}|_{y=R} = v_{\mu\nu}|_{y=R}. \quad (60)$$

Это означает, что оно является поперечно-бесследовым:

$$\begin{aligned} \partial^\nu h_{\mu\nu}|_{y=R} &= 0, \\ h|_{y=R} &= h^\nu_{\nu}|_{y=R} = 0. \end{aligned} \quad (61)$$

Итак, в этом случае ньютоновский предел имеет вид

$$V \approx -\frac{4}{3} G_1 e^{-kR} \frac{M}{r} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-1} \frac{\cos(kr)}{kr} \right), \quad 1 \ll kr; \quad (62)$$

$$\begin{aligned} V &\approx -G_1 e^{-kR} M k \frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - 0.2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0.099 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} (kr)^2 \right) \approx \\ &\approx -G_1 e^{-kR} M k (2.05 + 0.02 (kr)^2), \quad kr \ll 1. \end{aligned} \quad (63)$$

Ниже представлены результаты для двух оставшихся случаев. Все вычисления выполняются по аналогии с проделанными выше.

I. Масса и наблюдатель находятся на бране 2:

$$V \approx -G_2 \frac{M}{r} \left(1 - e^{2kR} + \frac{8e^{2kR}}{3\pi} \text{si}(kr) + \frac{2e^{2kR}}{3\pi} \left[\frac{\cos(kr)}{kr} + \frac{\sin(kr)}{(kr)^2} \right] \right), \quad (64)$$

где $G_2 = \hat{G}k/(e^{2kR} - 1)$ – эффективная гравитационная постоянная на бране 2.

II. Масса расположена на бране 2, а наблюдатель – на бране 1 (также случай “теневой” материи):

$$V \approx -\frac{4}{3} e^{kR} G_2 \frac{M}{r} \left(1 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{kR} e^{-1} \frac{\cos(kr e^{-kR})}{kr} \right), \quad e^{kR} \ll kr; \quad (65)$$

$$\begin{aligned} V &\approx -G_2 M k \frac{8}{3\pi} \left(1 + \frac{3\pi}{4\sqrt{2}} - 0.2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} + 0.099 e^{-2kR} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} (kr)^2 \right) \approx \\ &\approx -G_2 M k (2.05 + 0.02 e^{-2kR} (kr)^2), \quad kr \ll e^{kR}. \end{aligned} \quad (66)$$

Хотелось бы отметить, что во всех формулах для ньютоновского предела, представленных выше, параметр M обозначает физическую массу в галилеевых координатах на той бране, на которой она расположена.

В работе [3] обсуждались возможные значения параметра k . Было показано, что значение $k \sim 1 \text{ ТэВ}$ — единственно возможное значение k , позволяющее провести корректную физическую интерпретацию теории на бране 2. Это означает, что для $r \sim 1 \text{ см}$ значение kr имеет порядок 10^{17} , и члены, пропорциональные $\sin(kr)$ и $\cos(kr)$, являются пренебрежительно малыми и могут быть опущены. Например, так как $\text{si}(t)|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow \pi/2$, выражение (64) принимает вид

$$V \approx -G_2 \frac{M}{r} \left(1 + \frac{1}{3} e^{2kR} \right). \quad (67)$$

Такая же аргументация может быть применена и для других случаев расположения массы и наблюдателя. Так как вклады массивных мод пренебрежимо малы при $r \gg 10^{-17} \text{ см}$, то в этом случае только нулевые моды составляют ньютоновский предел. К сожалению, в формулах (52), (62), (64) и (65) вклады безмассового гравитона и радиона “перемешаны”. Эта проблема может быть решена с помощью приближения нулевых мод.

3. ПРИБЛИЖЕНИЕ НУЛЕВЫХ МОД

Рассмотрим уравнения (12)–(14) с тензором энергии-импульса вида $T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu}(x)\delta(y)$ (в унитарной калибровке). Как было показано выше, с помощью подстановки (17) эти уравнения (кроме $\mu\nu$ -уравнения) принимают вид (18)–(20). Далее, как это было сделано выше, мы можем получить уравнения (21) и (22). Хорошо известно, что поле $u_{\mu\nu}$ в присутствии материи является комбинацией нулевой и массивных мод [4], чьи собственные функции ортогональны [3]. В частности, нулевая мода может быть представлена в виде $u_{\mu\nu}^0 = e^{2\sigma} \alpha_{\mu\nu}$, где $\alpha_{\mu\nu}$ зависит только от координат x . Это также означает, что с помощью остаточных калибровочных преобразований $\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x)$ на массивные моды $u_{\mu\nu}^m$ можно наложить калибровку

$$\partial^\nu u_{\mu\nu}^m = 0, \quad u^m = u_\mu^m = 0. \quad (68)$$

Легко видеть, что остаются калибровочные преобразования вида $\xi_\mu = e^{2\sigma} \epsilon_\mu(x)$. Они позволяют нам наложить калибровку де Дондера на нулевую моду флуктуаций метрики:

$$\partial^\nu \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = 0. \quad (69)$$

После наложения этой калибровки в наличии имеются остаточные калибровочные преобразования (26). Из уравнений (19), (21), (25) и (68) следует, что

$$\square \alpha = \frac{\hat{\kappa} c e^{2kR}}{R} t. \quad (70)$$

Рассмотрим теперь уравнение (12). Подставляя в него выражение (17) при условии (21) и переходя к калибровке (68), (69), получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} \square u_{\mu\nu}^m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{\mu\nu}^m - 2k^2 u_{\mu\nu}^m + 2k u_{\mu\nu}^m (\delta(y) - \delta(y - R)) = \\ = -\frac{\hat{\kappa}}{2} t_{\mu\nu} \delta(y) + \frac{\hat{\kappa} k e^{2kR}}{6(e^{2kR} - 1)} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t - \frac{\hat{\kappa}}{6} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t \delta(y). \end{aligned} \quad (71)$$

Так как мы собираемся вычислить ньютоновский предел и отклонение света в приближении нулевых мод, нам нужно найти уравнение для поля $\alpha_{\mu\nu}$. Если умножить уравнение (71) на $e^{2\sigma}$, проинтегрировать по y и воспользоваться условием ортонормированности волновых функций разных мод, можно получить

$$\square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = - \frac{\hat{\kappa} k}{(1 - e^{-2kR})} t_{\mu\nu}. \quad (72)$$

Уравнение для массивных мод примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-2\sigma} \square u_{\mu\nu}^m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{\mu\nu}^m - 2k^2 u_{\mu\nu}^m + 2k u_{\mu\nu}^m (\delta(y) - \delta(y - R)) = - \frac{\hat{\kappa}}{2} t_{\mu\nu} \delta(y) + \\ + \frac{\hat{\kappa} k e^{2kR}}{2(e^{2kR} - 1)} t_{\mu\nu} + \frac{\hat{\kappa} k e^{2kR}}{6(e^{2kR} - 1)} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t - \frac{\hat{\kappa}}{6} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t \delta(y). \end{aligned} \quad (73)$$

Напомним, что уравнение (71) было точно решено в разделе 2, но оказалось невозможным вычислить аналитически все возникающие интегралы даже для простого вида $t_{\mu\nu}$ (например, для статической точечной массы).

Когда материя расположена на бране 2 (в точке $y = R$), все рассуждения такие же, как и представленные выше. Подстановка имеет вид (38). Калибровочные условия те же, что и в случае, когда материя расположена на бране 1. Уравнения движения для полей $\alpha_{\mu\nu}$ и ϕ в присутствии материи на бране 2 могут быть получены аналогичным образом и имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} \square u_{\mu\nu}^m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u_{\mu\nu}^m - 2k^2 u_{\mu\nu}^m + \\ + 2k u_{\mu\nu}^m (\delta(y) - \delta(y - R)) = - \frac{\hat{\kappa}}{2} t_{\mu\nu} \delta(y - R) + \\ + \frac{\hat{\kappa} k}{6(e^{2kR} - 1)} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t - \frac{\hat{\kappa}}{6} \left(\frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} - \eta_{\mu\nu} \right) t \delta(y - R), \end{aligned} \quad (74)$$

$$\square \left(\alpha_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} \alpha \right) = - \frac{\hat{\kappa} k}{(e^{2kR} - 1)} t_{\mu\nu}, \quad (75)$$

$$\square \phi = \frac{\hat{\kappa}}{6R} t. \quad (76)$$

Еще раз напомним, что эти уравнения записаны в координатах x , которые являются *галилеевыми на бране 1* и неудобны для изучения физических эффектов на бране 2.

Теперь мы готовы к нахождению ньютоновского предела и угла отклонения света статической точечной массой. Сначала сделаем это для браны 1. Подстановка (17) в приближении нулевых мод имеет вид

$$h_{\mu\nu}^0 = e^{2\sigma} \alpha_{\mu\nu} - \frac{kR}{e^{2kR} - 1} \eta_{\mu\nu} \phi + \frac{R}{2k} \partial_\mu \partial_\nu \phi + \frac{1}{4k^2} \partial_\mu \partial_\nu \phi, \quad (77)$$

а соответствующее уравнение для поля $h_{\mu\nu}$ на бране 1 в приближении нулевых мод выглядит следующим образом:

$$\square h_{\mu\nu}^0 = -\frac{\hat{\kappa}k e^{2kR}}{e^{2kR} - 1} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} t \right) - \frac{\hat{\kappa}k}{6(e^{2kR} - 1)} \eta_{\mu\nu} t + \frac{\hat{\kappa}}{12k^2 R} \left(kR + \frac{1}{2} \right) \partial_\mu \partial_\nu t. \quad (78)$$

Рассмотрим статическую точечную массу с тензором энергии-импульса $t_{00} = M\delta(\vec{x})$, $t_{0k} = t_{ij} = 0$, где M , как и ранее, обозначает инертную массу. Тогда мы можем найти решение уравнения (78) для h_{00} -компоненты поля

$$h_{00} = \frac{\hat{\kappa}k(e^{2kR} + 1/3)}{8\pi(e^{2kR} - 1)} \frac{M}{r}, \quad (79)$$

где $r = \sqrt{\vec{x}^2}$.

Таким образом,

$$V = -\hat{G}k \frac{(e^{2kR} + 1/3)}{(e^{2kR} - 1)} \frac{M}{r} = -G_1 \left(1 + \frac{1}{3} e^{-2kR} \right) \frac{M}{r}. \quad (80)$$

Теперь покажем, что модель Рэндалла–Сундрума в приближении нулевых мод эквивалентна линеаризованной теории Бранса–Дикке (по-видимому, впервые это было отмечено в работе [4]). Соответствующие формулы для отклонения света в теории Бранса–Дикке хорошо известны (см., например, [12]).

Уравнения для флуктуаций метрики в линеаризованной теории Бранса–Дикке имеют вид

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{2\omega + 3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right), \quad (81)$$

где ω есть параметр Бранса–Дикке. Легко видеть, что поле $h_{\mu\nu}$ удовлетворяет калибровочным условиям де Дондера $\partial^\nu (h_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} h/2) = 0$. Угол отклонения света был найден в работе [12]:

$$\Delta\varphi \approx \frac{4MG}{r_0} \left(\frac{2\omega + 3}{2\omega + 4} \right), \quad (82)$$

где r_0 – прицельный параметр, M – масса статического точечного источника.

Теперь приступим к изучению эффективной четырехмерной теории на бране 1. Видно, что поле $h_{\mu\nu}^0$ (77) не удовлетворяет калибровочному условию де Дондера на бране 1. Однако мы можем наложить это условие с помощью калибровочных функций (42).

В этой калибровке уравнение (78) принимает вид

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G_1 \left(t_{\mu\nu} - \frac{e^{-2kR}}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right). \quad (83)$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем надстрочный индекс 0, обозначающий приближение нулевых мод. Сравнивая (83) с (81), получаем $\omega = 3(e^{2kR} - 1)/2$. Подставляя это

значение в (82), находим угол отклонения света статическим точечным источником на бране 1:

$$\Delta\varphi \approx \frac{4MG_1}{r_0} \left(\frac{1}{1 + e^{-2kR}/3} \right). \quad (84)$$

В формулах (80) и (84) члены $e^{-2kR}/3$ соответствуют вкладу радиона. Видно, что этот вклад в e^{2kR} раз слабее вклада безмассового гравитона.

Для оставшихся случаев непосредственные вычисления приводят к следующим результатам (все рассуждения по поводу галилеевых координат те же, что и в разделе 2).

1) Мы живем на бране 1, масса расположена на бране 2 (“тенивая” материя):

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G_1 e^{-kR} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right); \quad (85)$$

закон Ньютона

$$V = -\frac{4}{3} G_1 e^{-kR} \frac{M}{r} = - \left(1 + \frac{1}{3} \right) G_1 e^{-kR} \frac{M}{r}; \quad (86)$$

угол отклонения света

$$\Delta\varphi \approx \frac{3MG_1 e^{-kR}}{r_0} = 4MG_1 e^{-kR} \left(\frac{1}{1 + 1/3} \right) \frac{1}{r_0}. \quad (87)$$

В формулах (86) и (87) члены $1/3$ соответствуют вкладу радиона. Видно, что этот вклад имеет тот же порядок, что и вклад безмассового гравитона, но вклад “тенивой” материи в e^{kR} раз меньше вклада обычной материи (ср. с (80) и (84)). Это означает, что эффективная теория на бране 1 феноменологически приемлема, но не интересна (см. [3]).

2) Мы живем на бране 2, масса расположена на той же бране:

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G_2 \left(t_{\mu\nu} - \frac{e^{2kR}}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right), \quad (88)$$

где $G_2 = \hat{G}k/(e^{2kR} - 1)$; закон Ньютона

$$V = -G_2 \left(1 + \frac{e^{2kR}}{3} \right) \frac{M}{r}; \quad (89)$$

угол отклонения света

$$\Delta\varphi \approx \frac{4MG_2}{r_0} \left(\frac{1}{1 + e^{2kR}/3} \right). \quad (90)$$

В формулах (89) и (90) члены $e^{2kR}/3$ соответствуют вкладу радиона. Теперь этот вклад в e^{2kR} раз больше, чем вклад безмассового гравитона. Это означает, что в случае безмассового радиона на бране 2 реализуется скалярная гравитация. Однако, если воспользоваться каким-нибудь механизмом генерации массы радиона, например механизмом Голдбергера–Вайза [14], гравитация в приближении нулевых мод становится тензорной, и решается проблема иерархий.

3) Мы живем на бране 2, масса расположена на бране 1 (опять случай “теневой” материи):

$$\square \left(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta_{\mu\nu} h \right) = -16\pi G_2 e^{kR} \left(t_{\mu\nu} - \frac{1}{3} \left(\eta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) t \right); \quad (91)$$

закон Ньютона

$$V = - \left(1 + \frac{1}{3} \right) G_2 e^{kR} \frac{M}{r} = - \frac{4}{3} G_1 e^{-kR} \frac{M}{r}; \quad (92)$$

угол отклонения света

$$\Delta\varphi \approx \frac{4MG_2 e^{kR}}{r_0} \left(\frac{1}{1 + 1/3} \right) = \frac{3MG_1 e^{-kR}}{r_0}. \quad (93)$$

Как и раньше, члены $1/3$ в формулах (92) и (93) соответствуют вкладу радиона. Видно, что этот вклад имеет тот же порядок, что и вклад безмассового гравитона, а из-за взаимодействия с безмассовым радионом (ср. с (89)) вклад “теневой” материи в ньютоновский предел в e^{kR} раз меньше, чем вклад обычной материи. Но если радион имеет массу (иначе в “нашем” мире на бране 2 реализуется скалярная гравитация), вклад “теневой” материи в ньютоновский предел в e^{kR} раз больше, чем вклад обычной материи. Это может привести к неким наблюдаемым эффектам, связанным с распределением материи в “зеркальном” мире (брана 1).

Легко проверить, что формулы (80), (86), (89) и (92) совпадают с членами формул (52), (65), (64) и (62), соответственно, содержащими вклады нулевых мод.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследована линеаризованная гравитация в модели Рэндалла–Сундрума с материей на бранах. Отличительной чертой развитого подхода является использование глобальной унитарной калибровки, позволяющей описывать пятимерное гравитационное поле на обеих бранах одновременно. Найдены подстановки (17), (30) и (38), расцепляющие уравнения для гравитационного поля и поля радиона. С их помощью получены точные решения для произвольного тензора энергии-импульса материи, которые даются формулами (36), (37) и (40), (41). Затем эти формулы были применены для исследования ньютоновского предела теории и отклонения света точечной массой в приближении нулевых мод. При этом исследованы случаи как обычной материи (расположенной на бране наблюдателя), так и “теневой” материи, расположенной на другой бране.

Мы не можем не упомянуть тот факт, что в работе [4] также рассматривались эффекты “теневой” материи. В этой работе сравнивались отклонения лучей света одинаковыми ньютоновскими массами, расположенными на разных бранах (ньютоновская масса – это коэффициент перед $1/r$ в законе Ньютона). В работе [4] утверждается, что “для одной и той же ньютоновской массы отклонение лучей света “теневой” материей на 25% меньше, чем в эйнштейновской гравитации”. Но из текста не ясно, какие характеристики отклонения луча света сравнивались. В настоящей работе найдены явные

выражения для углов отклонения света. Мы сравнили эти углы отклонения света одинаковыми ньютоновскими массами, расположенными на разных бранах, при одинаковых прицельных параметрах. Наши результаты следующие: для браны 1 угол отклонения света “теневого” материей на 44% меньше, чем угол отклонения света обычной материей, т.е. эти углы одного порядка; для браны 2 угол отклонения света “теневого” материей в e^{4kR} раз больше, чем угол отклонения света обычной материей. Легко видеть, что эта разница в результатах для браны 1 и браны 2 возникает из-за разных вкладов безмассового поля радиона. Однако если это поле приобретает массу, приближение нулевых мод дает стандартную эйнштейновскую гравитацию на обеих бранах, и в этом случае нет никакой разницы между эффектами “теневого” материи на бранах.

Отметим еще, что полученные решения позволяют изучать в модели Рэндалла–Сундрума с двумя бранами более сложные гравитационные эффекты аналогично тому, как это было сделано в работах [15] для модели с однойбраной.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Э. Э. Боосу, Ю. В. Грацу, Ю. А. Кубышину, А. А. Россихину и В. А. Рубакову за полезные обсуждения. Работа была поддержана грантом УР.02.03.002 программы “Университеты России”. Работа И.В. была частично поддержана программой SCOPES Швейцарского национального научного фонда (проект № 7SUPJ062239) и профинансирована Федеральным отделом иностранных дел.

Список литературы

- [1] *L. Randall, R. Sundrum.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 3370.
- [2] *B. A. Рубаков.* УФН. 2001. Т. 171. С. 913; *I. Antoniadis.* String and D-brane physics at low energy. hep-th/0102202.
- [3] *Э. Э. Боос, И. П. Волобуев, Ю. А. Кубышин, М. Н. Смоляков.* ТМФ. 2002. Т. 131. № 2. С. 216.
- [4] *J. Garriga, T. Tanaka.* Phys. Rev. Lett. 2000. V. 84. P. 2778.
- [5] *I. Ya. Aref'eva, M. G. Ivanov, W. Mück, K. S. Viswanathan, I. V. Volovich.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 590. P. 273.
- [6] *V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov.* Phys. Lett. B. 1983. V. 125. P. 136; P. 139.
- [7] *L. Randall, R. Sundrum.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4690.
- [8] *N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos, J. March-Russel.* Phys. Rev. D. 2001. V. 63. P. 064020.
- [9] *R. Sundrum.* Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 085010.
- [10] *Ch. Charmousis, R. Gregory, V. Rubakov.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 067505; *C. Csáki, M. Graesser, L. Randall, J. Terning.* Phys. Rev. D. 2000. V. 62. P. 045015; *W. D. Goldberger, M. B. Wise.* Phys. Lett. B. 2000. V. 475. P. 275; *A. Das, A. Mitov.* Phys. Rev. D. 2002. V. 66. P. 045030.
- [11] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц.* Теория поля. М.: Наука, 1967.
- [12] *С. Вейнберг.* Гравитация и космология. Волгоград: Платон, 2000.
- [13] *А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев.* Интегралы и ряды: элементарные функции. М.: Наука, 1981.
- [14] *W. D. Goldberger, M. B. Wise.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 83. P. 4922.
- [15] *S. C. Davis.* Phys. Lett. B. 2001. V. 499. P. 179; hep-ph/0010255; *Y. Grats, A. Rossikhin.* Mod. Phys. Lett. A. 2002. V. 17. P. 1207; hep-ph/0201084.