Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Баталин, М. А. Григорьев, С. Л. Ляхович, *-Умножение для систем со связями второго рода из БРСТ-теории, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 324–360

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf500>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.92.164.108

26 апреля 2023 г., 14:40:27

© 2001 г. И. А. Баталин*, М. А. Григорьев*, С. Л. Ляхович†

***-УМНОЖЕНИЕ ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ ВТОРОГО РОДА ИЗ БРСТ-ТЕОРИИ**

Предлагается явная конструкция деформационного квантования общих систем со связями второго рода, ковариантная относительно замен локальных координат на фазовом пространстве. Подход основывается на построении эффективной системы первого рода (калибровочной системы), эквивалентной исходной системе второго рода, и может также рассматриваться как далеко идущее обобщение квантования Федосова. Эффективная калибровочная система проквантована посредством БФВ–БРСТ-процедуры. При этом *-умножение для скобки Дирака явно построено как квантовое умножение БРСТ-наблюдаемых. Предложена и явно построена так называемая дираковская связность, которая является непосредственным обобщением симплектической связности на случай систем со связями второго рода. Показано, что для *-умножения, построенного по дираковской связности, связи находятся в центре соответствующей алгебры относительно *-коммутатора. Продемонстрировано, что будучи ограниченным на поверхность связей, данное *-умножение является федосовским *-умножением на поверхности связей, рассматриваемой как симплектическое многообразие.

Для нас большая честь представить статью в выпуск, посвященный семидесятипятилетию Владимира Яковлевича Файнберга. На протяжении многих лет у авторов была бесценная возможность как человеческого, так и научного общения с Владимиром Яковлевичем, который постоянно интересуется фундаментальными вопросами квантовой теории. Мы рассматриваем эту возможность как большую удачу.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе мы рассматриваем квантование систем со связями второго рода на общих симплектических многообразиях. Рассмотрение проводится на уровне деформационного квантования, т.е. нашей целью является построение квантового умножения (так называемого *-умножения) на алгебре наблюдаемых системы.

Деформационный подход к задаче квантования, восходящий к работе Березина [1], был систематически сформулирован в работе [2]. Существование деформационного

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

†Томский государственный университет, Томск, Россия

квантования для произвольного симплектического многообразия было доказано в статье [3]. Явно ковариантная конструктивная процедура построения и анализа *-произведений для общих симплектических многообразий, известная как квантование Федосова, была предложена в работе [4] (см. также [5]).

В недавней работе [6] было показано, что деформационное квантование Федосова может рассматриваться как БФВ–БРСТ-квантование [7] (см. также обзор [8]) соответствующим образом построенной эффективной калибровочной системы. Было продемонстрировано, что произвольное симплектическое многообразие может быть вложено как поверхность связей второго рода в некоторое расширенное фазовое пространство. Введением дополнительных степеней свободы эти связи второго рода могут быть явно ковариантным образом конвертированы в связи первого рода, что приводит к эффективной системе со связями первого рода, эквивалентной исходному симплектическому многообразию. БРСТ-квантование построенной системы воспроизводит федосовское *-умножение как квантовое умножение БРСТ-наблюдаемых.

Преимущество такого подхода состоит в том, что он естественным образом обобщается на случай систем со связями на общих симплектических многообразиях, поскольку связи, задающие вложение фазового пространства как поверхности второго рода, и исходные связи, присутствующие в системе, могут рассматриваться единообразно при проведении соответствующей процедуры конверсии, что впервые было отмечено достаточно давно [9], [10]. В данной работе мы предлагаем схему квантования общих систем со связями второго рода на произвольных симплектических многообразиях.

В рамках деформационного подхода квантование системы второго рода в первую очередь подразумевает нахождение *-умножения, которое в первом порядке по $\hbar$ совпадает с соответствующей *скобкой Дирака*. С математической точки зрения это означает квантование пуассонова многообразия, на котором пуассонова структура есть скобка Дирака, ассоциированная со связями второго рода.

Существование квантования для произвольного пуассонова многообразия было установлено Концевичем [11]. В работе [12] была предложена интересная физическая интерпретация формулы Концевича. Однако формула квантования Концевича не обладает явной ковариантностью относительно замены локальных координат на фазовом пространстве¹⁾. Кроме того, подход Концевича представляется слишком сложным для приложений к регулярным пуассоновым многообразиям (скобка Дирака для системы второго рода является регулярной скобкой Пуассона). Для регулярных пуассоновых многообразий можно также использовать соответствующее обобщение метода Федосова [5]. Однако этот подход требует явного рассмотрения симплектических листов скобки Пуассона, что в случае теории систем со связями подразумевает явное решение связей.

В отличие от систем с вырожденной скобкой, неэквивалентные наблюдаемые системы со связями второго рода – это функции на поверхности связей. Таким образом, квантование системы второго рода подразумевает не только построение *-умножения для скобки Дирака, но также и соответствующую спецификацию пространства квантовых наблюдаемых.

Оказывается, что в рамках БРСТ-подхода, развиваемого в данной работе, удастся

¹⁾ После того как настоящая работа была подготовлена к публикации, авторам стало известно о недавней работе [13], в которой предложена глобально определенная форма квантования Концевича.

построить явно ковариантное квантование для произвольной системы второго рода на общем симплектическом многообразии. При этом пространство квантовых наблюдаемых описывается как когомологии надлежащим образом построенного БРСТ-заряда. В частности, этот подход позволяет построить ковариантное $*$ -умножение для соответствующей скобки Дирака.

Построение ковариантного (в фазовом пространстве) квантования требует введения соответствующей связности на фазовом пространстве, согласованной с пуассоновой структурой. В случае системы без связей на симплектическом многообразии подходящая связность (так называемая *симплектическая связность*) — это симметричная связность, сохраняющая симплектическую форму. Вместе с симплектической формой на фазовом пространстве симплектическая связность определяет *федосовскую структуру* [14], которая является исходной точкой для квантования Федосова.

В настоящей работе мы показываем, что построение БРСТ-описания систем второго рода естественным образом приводит к дираковскому аналогу федосовской структуры. А именно, симплектическая структура расширенного фазового пространства эффективной калибровочной системы естественным образом включает симметричную связность, согласованную со скобкой Дирака. Эта связность (так называемая *дираковская связность*) будет явным образом построена в терминах функций связей и произвольной симплектической связности на фазовом пространстве.

Ключевое свойство дираковской связности состоит в том, что она определяет симплектическую связность на поверхности связей, рассматриваемой как симплектическое многообразие. Использование дираковской связности позволяет идентифицировать $*$ -умножение, которое согласовано со связями, в том смысле, что связи являются центральными функциями относительно соответствующего $*$ -коммутатора. Помимо этого удастся развить процедуру редукции на поверхность связей, которая показывает, что, будучи ограниченным на поверхность связей, такое $*$ -умножение является федосовским $*$ -умножением, построенным по ограничению дираковской связности на поверхность связей.

В разделе 2 мы напоминаем основы теории систем со связями второго рода, вводим понятие дираковской связности и приводим некоторые геометрические факты, необходимые в дальнейшем. В разделе 3 на классическом уровне строится эффективная калибровочная система, эквивалентная исходной системе второго рода. Квантование эффективной системы рассматривается в разделе 4. Там же строится и анализируется $*$ -умножение, определяющее квантовую деформацию скобки Дирака. В разделе 5 мы развиваем процедуру редукции расширенного фазового пространства калибровочной системы к расширенному пространству для системы на поверхности связей. В разделе 6 предлагается альтернативный подход к квантованию систем второго рода, который, в частности, может рассматриваться как альтернативная форма процедуры конверсии связей второго рода.

2. ГЕОМЕТРИЯ ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО РОДА В СИМПЛЕКТИЧЕСКОМ МНОГООБРАЗИИ

В данном разделе приводятся основные факты о системах со связями второго рода на симплектических многообразиях общего вида. В дополнение к стандартным фак-

там рассматривается аналог федосовской геометрии, основанный на скобке Дирака. Это включает построение согласованной со скобкой Дирака симметричной связности, которая может быть ограничена на поверхность связей, определяя тем самым симплектическую связность на поверхности связей. Эти геометрические структуры необходимы для построения ковариантного *-умножения для скобки Дирака.

2.1. Общее фазовое пространство. Фазовое пространство общей системы со связями второго рода – это симплектическое многообразие $\mathcal{M}$, наделенное симплектической формой ω (замкнутой и невырожденной 2-формой). В локальных координатах x^i , $i = 1, \dots, 2N$, на $\mathcal{M}$ коэффициенты формы ω определяются как

$$\omega_{ij} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right). \quad (2.1)$$

Скобка Пуассона, порожденная симплектической формой, имеет вид

$$\{f, g\}_{\mathcal{M}} = \frac{\partial f}{\partial x^i} \omega^{ij} \frac{\partial g}{\partial x^j}, \quad \omega^{il} \omega_{lj} = \delta_j^i. \quad (2.2)$$

Поскольку мы интересуемся квантованием многообразия $\mathcal{M}$, введем на $\mathcal{M}$ связность Γ , согласованную с симплектической структурой. Условие согласованности записывается как

$$\nabla \omega = 0, \quad \partial_j \omega_{ik} - \Gamma_{ijk} + \Gamma_{kji} = 0, \quad (2.3)$$

где коэффициенты Γ_{jik} введены следующим образом:

$$\Gamma_{jik} = \omega_{jl} \Gamma_{ik}^l, \quad \Gamma_{ik}^j \frac{\partial}{\partial x^j} = \nabla_i \frac{\partial}{\partial x^k}. \quad (2.4)$$

Если на $\mathcal{M}$ заданы симплектическая форма и согласованная с ней симплектическая связность, то $\mathcal{M}$ называется *федосовским многообразием* [14]. Хорошо известно, что симплектическая связность существует на всяком симплектическом многообразии, т.е. всякое симплектическое многообразие является федосовским. Однако в отличие от связности Леви-Чивита на римановом многообразии, симметричная симплектическая связность не единственна: произвол в выборе симплектической связности сводится к прибавлению произвольного полностью симметричного тензорного поля к коэффициентам Γ_{jik} . Таким образом, федосовская структура на многообразии не определяется полностью симплектической структурой.

2.2. Система со связями второго рода. Пусть теперь симплектическое многообразие $\mathcal{M}$ является фазовым пространством системы со связями, заданной связями второго рода

$$\theta_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, 2M. \quad (2.5)$$

Предположим, что θ_α являются глобально заданными функциями на $\mathcal{M}$. Обозначим через $\Sigma \subset \mathcal{M}$ соответствующую поверхность связей. Матрица Дирака имеет вид

$$\Delta_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\} \quad (2.6)$$

и предполагается обратимой. Матрицу, обратную к матрице Дирака, будем обозначать $\Delta^{\alpha\beta}$, $\Delta_{\alpha\gamma} \Delta^{\gamma\beta} = \delta_\alpha^\beta$. Обратимость матрицы Дирака в то же время означает, что поверхность Σ является гладким подмногообразием в $\mathcal{M}$.

Неэквивалентные наблюдаемые системы со связями второго рода – это функции на поверхности связей Σ . Алгебра неэквивалентных наблюдаемых системы второго рода на $\mathcal{M}$ – это пуассонова алгебра функций на поверхности связей с пуассоновой структурой, соответствующей симплектической форме $\omega^\Sigma \equiv \omega|_\Sigma$ (2-форма $\omega|_\Sigma$ обозначает ограничение 2-формы ω на $\Sigma \subset \mathcal{M}$; $\omega|_\Sigma$ невырождена, поскольку невырождена $\Delta_{\alpha\beta}$). На классическом уровне две системы со связями эквивалентны, если их алгебры неэквивалентных наблюдаемых изоморфны как пуассоновы алгебры.

2.3. Скобка Дирака. Преимущество подхода к системам второго рода, основанного на скобке Дирака, состоит в том, что он позволяет представить алгебру неэквивалентных наблюдаемых как фактор-алгебру алгебры функций на $\mathcal{M}$ по идеалу, порожденному связями. Основное наблюдение состоит в том, что многообразие $\mathcal{M}$ может быть наделено скобкой Пуассона (так называемой *скобкой Дирака*), которая хорошо определена на этой фактор-алгебре. Если задана система со связями второго рода θ_α , то соответствующая скобка Дирака имеет следующий вид:

$$\{f, g\}_{\mathcal{M}}^D = \{f, g\}_{\mathcal{M}} - \{f, \theta_\alpha\}_{\mathcal{M}} \Delta^{\alpha\beta} \{\theta_\beta, g\}_{\mathcal{M}}. \quad (2.7)$$

Напомним основные свойства скобки Дирака:

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{\mathcal{M}}^D + \{g, f\}_{\mathcal{M}}^D &= 0, \\ \{f, gh\}_{\mathcal{M}}^D - \{f, g\}_{\mathcal{M}}^D h - g \{f, h\}_{\mathcal{M}}^D &= 0, \\ \left\{ f, \{g, h\}_{\mathcal{M}}^D \right\}_{\mathcal{M}}^D + \text{цикл}(f, g, h) &= 0, \\ \{f, \theta_\alpha\}_{\mathcal{M}}^D &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Первые три свойства означают, что $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$ является скобкой Пуассона. В дальнейшем мы используем обозначение D^{ij} для компонент пуассонова бивектора скобки Дирака:

$$D^{ij} = \{x^i, x^j\}_{\mathcal{M}}^D. \quad (2.9)$$

Последнее соотношение в (2.8) означает, что θ_α являются характеристическими функциями (функциями Казимира) скобки $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$. Это, в свою очередь, означает, что скобка $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$ хорошо определена на функциях из $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M})$ по модулю функций вида $F^\alpha \theta_\alpha$ (т.е. по модулю идеала функций, обращающихся в нуль на Σ). Фактор-алгебра таких функций может быть естественным образом отождествлена с алгеброй $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ функций на Σ . Таким образом, $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ – пуассонова алгебра, а Σ – пуассоново многообразие. Мы будем называть скобку Пуассона в $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ ограничением скобки Дирака на Σ .

В то же время поверхность связей Σ является симплектическим многообразием с симплектической формой $\omega^\Sigma \equiv \omega|_\Sigma$. Скобка Пуассона на Σ , соответствующая симплектической форме ω^Σ , совпадает с ограничением $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D|_\Sigma$ скобки Дирака на Σ . Таким образом, описание системы второго рода в терминах скобки Дирака эквивалентно описанию, основанному на редукции на поверхность связей.

С геометрической точки зрения связи θ_α образуют максимальный набор независимых характеристических функций скобки Дирака. Это означает, что $\mathcal{M}$ является регулярным пуассоновым многообразием. Всякая поверхность постоянного уровня функций θ_α является, таким образом, симплектическим листом скобки Дирака и симплектическим многообразием. В частности, поверхность связей Σ – это симплектический лист.

Как мы видели, симплектическая форма $\omega|_{\Sigma}$ на Σ (на всяком симплектическом листе) есть ограничение на $\Sigma \subset \mathcal{M}$ (на симплектический лист) симплектической формы ω , определенной на $\mathcal{M}$.

2.4. Дираковская связность. На квантовом уровне нам также понадобится так называемая *дираковская связность*, т.е. симметричная связность, согласованная со скобкой Дирака. Если на $\mathcal{M}$ задана симметричная симплектическая связность Γ , то существует дираковская связность $\bar{\Gamma}^0$, коэффициенты которой даются выражением

$$(\bar{\Gamma}^0)_{ij}^k = \omega^{kl}(\Gamma_{lij} + \partial_l \theta_\beta \Delta^{\beta\alpha} \nabla_i \nabla_j \theta_\alpha), \quad \nabla_i \nabla_j \theta_\alpha = \partial_i \partial_j \theta_\alpha - \Gamma_{ij}^m \partial_m \theta_\alpha, \quad (2.10)$$

где ∇_i есть ковариантное дифференцирование, определяемое связностью Γ . Непосредственной проверкой можно убедиться, что $\bar{\Gamma}^0$ сохраняет дираковский бивектор: $\bar{\nabla}_i^0 D^{jk} = 0$, где $\bar{\nabla}^0$ обозначает ковариантное дифференцирование, определяемое связностью $\bar{\Gamma}^0$. Более того, можно проверить, что $\bar{\nabla}_i^0 \partial_j \theta_\alpha = 0$. Кривизна дираковской связности имеет следующий вид:

$$(\bar{R}^0)_{ij;l}^m = D^{mk} \bar{R}_{ij;kl}^0 = D^{mk} (R_{ij;kl} + (\nabla_i \nabla_k \theta_\alpha) \Delta^{\alpha\beta} (\nabla_j \nabla_l \theta_\beta) - (\nabla_j \nabla_k \theta_\alpha) \Delta^{\alpha\beta} (\nabla_i \nabla_l \theta_\beta)), \quad (2.11)$$

где $R_{ij;kl} = \omega_{km} R_{ij;l}^m$ есть кривизна связности Γ .

Важное свойство дираковской связности $\bar{\Gamma}^0$ на $\mathcal{M}$ состоит в том, что она определяет некоторую связность на поверхности связей Σ . Действительно, параллельный перенос вдоль поверхности связей Σ переводит векторы, которые касательны к Σ , в касательные, определяя тем самым связность на Σ . Чтобы показать, что $\bar{\Gamma}^0$ действительно ограничивается на Σ , рассмотрим векторные поля Y, Z , определенные на $\mathcal{M}$, касательные к Σ . Это означает, что существуют функции Y_β, Z_β такие, что

$$Y \theta_\alpha = Y_\beta \theta_\beta, \quad Z \theta_\alpha = Z_\beta \theta_\beta. \quad (2.12)$$

Покажем, что векторное поле $\bar{\nabla}_Y^0 Z$ также касательно к Σ . Действительно,

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_Y^0 Z) \theta_\alpha &= (Y^i \partial_i Z^j) \partial_j \theta_\alpha + Y^i (\bar{\Gamma}^0)_{ik}^j Z^k \partial_j \theta_\alpha = \\ &= Y Z \theta_\alpha - Y^i Z^j \partial_i \partial_j \theta_\alpha + Y^i Z^k \Gamma_{ik}^j \partial_j \theta_\alpha + Y^i Z^k \omega^{jn} \partial_n \theta_\gamma \Delta^{\gamma\beta} \nabla_i \nabla_k \theta_\beta \partial_j \theta_\alpha = \\ &= Y Z \theta_\alpha = (Y Z_\alpha) \theta_\beta + Z_\alpha^\beta Y_\beta^\gamma \theta_\gamma. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Последнее выражение очевидным образом обращается в нуль на Σ . Таким образом, векторное поле $\bar{\nabla}_Y^0 Z$ касательно к Σ . Это означает, что связность $\bar{\Gamma}^0$ на $\mathcal{M}$ определяет связность $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ на Σ . Поскольку $\bar{\Gamma}^0$ сохраняет дираковский бивектор $D^{ij} \partial/\partial x^i \wedge \partial/\partial x^j$, то редуцированная связность $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ сохраняет его ограничение на Σ . Поскольку скобка Пуассона, соответствующая симплектической форме $\omega^\Sigma = \omega|_{\Sigma}$ есть ограничение на Σ скобки Дирака, то $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ является симметричной симплектической связностью на Σ . Таким образом, всякая поверхность связей второго рода есть федосовское многообразие. При этом симплектическая структура и согласованная с ней симплектическая связность являются ограничениями на поверхность связей симплектической структуры и симплектической связности на фазовом пространстве, соответственно.

Рассмотрим редукцию дираковской связности на поверхность связей в терминах локальных координат. С этой целью заметим, что выражение (2.10) для дираковской связности может быть эквивалентно записано как

$$(\bar{\Gamma}^0)_{ij}^k = D^{kl}\Gamma_{lij} + \omega^{kl}\partial_l\theta_\beta\Delta^{\beta\alpha}\partial_i\partial_j\theta_\alpha. \quad (2.14)$$

Далее, выберем функции $\bar{x}^a$, $a = 1, \dots, 2N - 2M$, такие, что $\bar{x}^a$ и $\bar{x}^\alpha = \theta_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, 2M$, образуют локальную координатную систему на $\mathcal{M}$. Такие локальные координаты адаптированы к вложенному многообразию $\Sigma \subset \mathcal{M}$, в том смысле, что локально Σ задается уравнениями $\bar{x}^\alpha = 0$. Следовательно, функции $\bar{x}^a|_\Sigma$, $a = 1, \dots, 2N - 2M$, образуют систему локальных координат на Σ . В координатах $\bar{x}^a, \bar{x}^\alpha$ выражение $\partial_i\partial_j\theta_\alpha$, очевидно, обращается в нуль, и соотношение для дираковской связности принимает вид

$$(\bar{\Gamma}^0)_{ij}^k = D^{kl}\Gamma_{lij}, \quad (2.15)$$

где мы использовали индекс i (или j, k, l) в качестве коллективного обозначения как для a , так и для α . Поскольку $D^{i\alpha} = \{\bar{x}^i, \bar{x}^\alpha\}_{\mathcal{M}}^D = 0$, соответствующие компоненты дираковской связности обращаются в нуль:

$$(\bar{\Gamma}^0)_{ij}^\alpha = 0. \quad (2.16)$$

Тогда для векторного поля, касательного к Σ , имеет место

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial \bar{x}^a}} \frac{\partial}{\partial \bar{x}^b} = (\bar{\Gamma}^0)_{ab}^l \frac{\partial}{\partial \bar{x}^l} = (\bar{\Gamma}^0)_{ab}^c \frac{\partial}{\partial \bar{x}^c} \quad (2.17)$$

ввиду (2.16). Будучи ограниченным на Σ , это уравнение означает, что функции $(\bar{\Gamma}^0)_{bc}^a|_\Sigma$ являются коэффициентами симметричной симплектической связности $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ на Σ по отношению к координатной системе $\bar{x}^a|_\Sigma$ на Σ .

2.5. Модифицированная скобка Пуассона на кокасательном расслоении над симплектическим многообразием. Фазовое пространство $\mathcal{M}$ рассматриваемой системы является общим симплектическим многообразием. Даже для системы без связей на $\mathcal{M}$ задача квантования $\mathcal{M}$ не может быть решена напрямую и требует использования специфических методов квантования. Поскольку мы интересуемся квантованием системы со связями, то наиболее удобным методом является метод, основанный на представлении $\mathcal{M}$ как системы со связями второго рода. Этот метод был предложен в работе [9] и позже обобщен на случай общих симплектических многообразий [6]. В работе [6] было также показано, что этот метод воспроизводит квантование Федосова в терминах БРСТ-формулировки теории систем со связями.

Для того чтобы представить $\mathcal{M}$ как поверхность связей второго рода, рассмотрим сначала подходящее обобщение канонической скобки Пуассона на кокасательном расслоении. Пусть $T^*\mathcal{M}$ – кокасательное расслоение над $\mathcal{M}$, а x^i, p_j – стандартные координаты на базе и слоях, соответственно. Пусть также $\pi: T^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ – каноническая проекция, отображающая 1-форму в точке t в точку t (точки $T^*\mathcal{M}$ – это пары $(t, a): t \in \mathcal{M}, a \in T_m^*\mathcal{M}$), а $\pi^*: \Lambda(\mathcal{M}) \rightarrow \Lambda(T^*\mathcal{M})$ – соответствующее отображение дифференциальных форм. Здесь мы используем обозначение $\Lambda(\mathcal{M}) = \bigoplus_{k=0}^{\dim \mathcal{M}} \Lambda^k(\mathcal{M})$ для пространства дифференциальных форм на $\mathcal{M}$.

Кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$ наделено канонической симплектической структурой:

$$\omega^{T^*\mathcal{M}} = 2 dp_i \wedge dx^i.$$

Соответствующая скобка Пуассона также имеет стандартный вид:

$$\{x^i, p_j\}_{T^*\mathcal{M}} = \delta_j^i.$$

Пусть $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$ – замкнутая 2-форма на $\mathcal{M}$. Введем модифицированную симплектическую структуру на $T^*\mathcal{M}$:

$$\omega^{\text{mod}} = \omega^{T^*\mathcal{M}} + \pi^*\omega = 2 dp_i \wedge dx^i + \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j. \quad (2.18)$$

Эта 2-форма, очевидно, невырождена и замкнута. Здесь и далее кокасательное расслоение $T^*\mathcal{M}$, наделенное модифицированной симплектической структурой, обозначается как $\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$. Симплектическая структура ω^{mod} определяет скобку Пуассона на $\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$ с базисными соотношениями

$$\{x^i, x^j\}_{\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}} = 0, \quad \{x^i, p_j\}_{\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}} = \delta_j^i, \quad \{p_i, p_j\}_{\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}} = \omega_{ij}(x). \quad (2.19)$$

Эта скобка удовлетворяет тождеству Якоби в силу замкнутости 2-формы ω .

Легко проверить, что (по меньшей мере, локально) данная скобка Пуассона может быть приведена к стандартному (каноническому) виду с помощью преобразования $p_i \rightarrow p_i - \rho_i(x)$, где $\rho_i(x)$ – симплектический потенциал для симплектической структуры ω :

$$\omega = 2 dp, \quad \omega_{ij} = \partial_i \rho_j - \partial_j \rho_i. \quad (2.20)$$

До настоящего момента 2-форма ω могла быть как вырожденной, так и невырожденной. Пусть теперь ω_{ij} – симплектическая структура на $\mathcal{M}$. Тогда матрица скобок Пуассона координатных функций p_i невырождена. В этом случае связи

$$\theta_i = 0, \quad \theta_i \equiv -p_i \quad (2.21)$$

(знак минус выбран для удобства) являются связями второго рода, при этом соответствующая поверхность связей совпадает с многообразием $\mathcal{M}$ (рассматриваемым как нулевое сечение в $\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$). В общем случае такие связи не являются глобально заданными функциями на $\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$. В частности, это приводит к тому, что скобка Дирака для связей θ_i не является глобально определенной скобкой Пуассона на $\mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$. Однако такая скобка Дирака глобально определена на поверхности связей $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M}$. Будучи ограниченной на поверхность связей $\mathcal{M}$, эта скобка Дирака совпадает со скобкой Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{M}$. Таким образом, всякая гамильтонова система на симплектическом многообразии может быть представлена как система со связями второго рода на модифицированном кокасательном расслоении над этим многообразием.

2.6. Симплектическая структура. В дальнейшем нам также потребуется специфическая скобка Пуассона на подходящем расширении кокасательного расслоения над симплектическим многообразием. Пусть задано произвольное симплектическое векторное расслоение $\mathbf{W}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathcal{N}$ над многообразием $\mathcal{N}$ и пусть e_A – локальный базис (локально определенные базисные сечения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$). Пусть также $\mathcal{D}$ – симплектическая

форма на слоях $\mathbf{W}(\mathcal{M})$. Компоненты $\mathcal{D}$ по отношению к базису e_A определяются как $\mathcal{D}_{AB} = \mathcal{D}(e_A, e_B)$.

Хорошо известно (см., например, [5]), что всякое симплектическое векторное расслоение допускает симплектическую связность. Пусть Γ и ∇ обозначают симплектическую связность и соответствующий ковариантный дифференциал в $\mathbf{W}(\mathcal{N})$. Условие согласованности записывается в виде

$$\nabla \mathcal{D} = 0, \quad \partial_i \mathcal{D}_{AB} - \Gamma_{iA}^C \mathcal{D}_{CB} - \Gamma_{iB}^C \mathcal{D}_{AC} = 0, \quad (2.22)$$

где коэффициенты Γ_{iA}^C связности Γ определены как

$$\nabla e_A = dx^i \Gamma_{iA}^C e_C. \quad (2.23)$$

Удобно ввести следующую 1-форму связности:

$$\Gamma_{AB} = dx^i \Gamma_{AiB}, \quad \Gamma_{AiB} = \mathcal{D}_{AC} \Gamma_{iB}^C. \quad (2.24)$$

Условие согласованности (2.22) переписывается в виде

$$d\mathcal{D}_{AB} = \Gamma_{AB} - \Gamma_{BA}, \quad \partial_i \mathcal{D}_{AB} - \Gamma_{AiB} + \Gamma_{BiA} = 0. \quad (2.25)$$

В качестве следствия этого условия получаем следующее свойство 1-формы Γ_{AB} :

$$d\Gamma_{AB} = d\Gamma_{BA}. \quad (2.26)$$

Рассмотрим прямую сумму векторных расслоений

$$\mathcal{E} = \mathbf{W}(\mathcal{N}) \oplus \mathcal{T}_\omega^* \mathcal{N}, \quad (2.27)$$

где для общности мы предположили, что $\mathcal{N}$ наделено замкнутой 2-формой ω , а $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{N}$ – соответствующее модифицированное кокасательное расслоение над $\mathcal{N}$. Пусть x^i , p_j и Y^A – стандартные локальные координаты на $\mathcal{E}$ (x^i – локальные координаты на $\mathcal{N}$, p_j – стандартные координаты на слоях $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{N}$, а Y^A – координаты на слоях $\mathbf{W}(\mathcal{N})$, соответствующие локальному базису e_A).

Мы утверждаем, что расслоение $\mathcal{E}$, рассматриваемое как многообразие, наделено следующей симплектической структурой:

$$\begin{aligned} \omega^\mathcal{E} = & \pi^* \omega + 2 dp_i \wedge dx^i + \\ & + \mathcal{D}_{AB} dY^A \wedge dY^B + Y^A Y^B d\Gamma_{AB} - 2Y^A \Gamma_{AB} \wedge dY^B, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $\pi^* \omega$ – обратный образ 2-формы ω , определенной на $\mathcal{N}$, при проекции $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{N}$. Можно непосредственно проверить, что 2-форма (2.28) определена корректно. Ее замкнутость следует из равенства $d\omega = 0$, условия (2.25) и свойства (2.26).

Скобка Пуассона на $\mathcal{E}$, соответствующая симплектической форме (2.28), определяется следующими базисными соотношениями:

$$\begin{aligned} \{x^i, p_j\}_\mathcal{E} &= \delta_j^i, \\ \{Y^A, Y^B\}_\mathcal{E} &= \mathcal{D}^{AB}(x), \\ \{Y^A, p_i\}_\mathcal{E} &= -\Gamma_{iB}^A(x) Y^B, \\ \{p_i, p_j\}_\mathcal{E} &= \omega_{ij}(x) + \frac{1}{2} R_{ij;AB}(x) Y^A Y^B, \end{aligned} \quad (2.29)$$

при этом остальные скобки тривиальны: $\{x^i, Y^A\}_{\mathcal{E}} = \{x^i, x^j\}_{\mathcal{E}} = 0$. Здесь $\mathbf{R}_{ij;AB}$ обозначает кривизну связности Γ :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{ij;AB} &= \mathcal{D}_{AC} \mathbf{R}_{ij}^C{}_B = \mathcal{D}_{AC} (\partial_i \Gamma_{jB}^C - \partial_j \Gamma_{iB}^C + \Gamma_{iD}^C \Gamma_{jB}^D - \Gamma_{jD}^C \Gamma_{iB}^D) = \\ &= \partial_i \Gamma_{AjB} - \partial_j \Gamma_{AiB} + \Gamma_{CiA} \mathcal{D}^{CD} \Gamma_{DjB} - \Gamma_{CjA} \mathcal{D}^{CD} \Gamma_{DiB}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Последнее равенство следует из невырожденности $\mathcal{D}_{AB}$ и условия согласованности (2.25).

3. КОНВЕРСИЯ: КЛАССИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ

В данном разделе строится БФВ–БРСТ-формулировка системы второго рода на $\mathcal{M}$ в терминах эквивалентной системы первого рода (калибровочной системы). Она включает явное построение такой калибровочной системы, ее БРСТ-заряда и наблюдаемых.

Общая процедура конверсии системы второго рода в систему первого рода посредством расширения фазового пространства была развита в работах [15], [16], [10] (см. также [17]). В этих статьях фазовое пространство системы второго рода расширялось за счет линейного симплектического пространства (как умножение на фактор) и переменные конверсии вводились как координаты на этом линейном факторе. В данной работе мы применяем несколько видоизмененную схему конверсии, в которой переменные конверсии вводятся как координаты на слоях определенного векторного расслоения, ассоциированного со связями. Такая схема позволяет рассматривать все связи (т.е. и связи вложения исходного симплектического многообразия $\mathcal{M}$ в модифицированное кокасательное расслоение, и исходные связи на $\mathcal{M}$) единообразно и сохранить явную ковариантность на всех этапах конверсии.

3.1. Унификация связей θ_α и θ_i . Если задана система второго рода на $\mathcal{M}$, в первую очередь вложим $\mathcal{M}$ как нулевое сечение в $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$. В соответствии с п. 2.5 связи $\theta_i \equiv -p_i = 0$ представляют $\mathcal{M}$ как поверхность связей второго рода в $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$ и определяют на $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$ систему со связями, эквивалентную исходному симплектическому многообразию $\mathcal{M}$ (т.е. системе без связей на $\mathcal{M}$).

Для того чтобы описать систему со связями на $\mathcal{M}$, определенную связями второго рода θ_α , рассмотрим систему на $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$, заданную связями θ_i и θ_α . Будем рассматривать эти связи на равных правах и введем для них унифицирующее обозначение:

$$\Theta_A = (\theta_i, \theta_\alpha), \quad A = 1, \dots, 2N + 2M. \quad (3.1)$$

Матрица Дирака этих связей имеет вид

$$D_{AB} = \{\Theta_A, \Theta_B\}_{\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}}. \quad (3.2)$$

Явно D_{AB} записывается как

$$D = \begin{pmatrix} D_{ij} & D_{i\beta} \\ D_{\alpha j} & D_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{ij} & \partial_i \theta_\beta \\ -\partial_j \theta_\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Можно проверить, что $\det D = \det \omega_{ij} \det \Delta_{\alpha\beta}$. Матрица $D^{AB} \equiv (D^{-1})^{AB}$, обратная к D_{AB} , имеет вид

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} D^{ij} & D^{i\beta} \\ D^{\alpha j} & D^{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega^{ij} + \omega^{ik} \omega^{jl} \partial_k \theta_\alpha \partial_l \theta_\beta \Delta^{\alpha\beta} & -\omega^{il} \partial_l \theta_\gamma \Delta^{\gamma\beta} \\ \omega^{jk} \partial_k \theta_\gamma \Delta^{\gamma\alpha} & \Delta^{\alpha\beta} \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

Заметим, что левый верхний блок этой матрицы есть не что иное, как пуассонов бивектор скобки Дирака на $\mathcal{M}$, соответствующей связям второго рода θ_α .

Среди связей Θ_A имеются связи θ_i , которые не являются глобально определенными функциями на $T_\omega^*\mathcal{M}$; они преобразуются как компоненты 1-формы на $\mathcal{M}$. Соответственно скобка Дирака для связей Θ_A не является глобально определенной скобкой Пуассона на $T_\omega^*\mathcal{M}$. Однако она корректно определена для функций, не зависящих от p_i .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть f и g – произвольные функции на $\mathcal{M}$. Пусть также $\pi^*: C^\infty(\mathcal{M}) \rightarrow C^\infty(T_\omega^*\mathcal{M})$ – отображение функций, соответствующее проекции $\pi: T_\omega^*\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$. Тогда

$$\{\pi^*f, \pi^*g\}_{T_\omega^*\mathcal{M}}^D = \pi^*({f, g}_\mathcal{M}^D), \quad (3.5)$$

где скобка Дирака в левой части построена по связям Θ_A , а в правой части – только по связям θ_α . В частности, эти скобки совпадают на $\Sigma \subset \mathcal{M}$.

Поскольку всякая физическая наблюдаемая системы со связями на $T_\omega^*\mathcal{M}$ может быть выбрана p_i -независимой функцией, то из предложения 3.1 следует, что исходная система со связями на $\mathcal{M}$ (заданная связями θ_α) эквивалентна системе со связями на $T_\omega^*\mathcal{M}$ (заданной связями Θ_A). Непосредственная проверка эквивалентности основывается на наблюдении, что связи Θ_A на $T_\omega^*\mathcal{M}$ и θ_α на $\mathcal{M}$ определяют одну и ту же поверхность связей Σ , а соответствующие скобки Дирака $\{\cdot, \cdot\}_{T_\omega^*\mathcal{M}}^D$ и $\{\cdot, \cdot\}_\mathcal{M}^D$ совпадают на Σ .

3.2. Симплектическая связность. С целью конвертировать связи второго рода Θ_A в связи первого рода введем переменные конверсии Y^A , соответствующие связям Θ_A . Будем рассматривать переменные Y^A как координаты на слоях векторного расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, ассоциированного со связями Θ_A . Это означает, что переменные Y^A преобразуются двойственно по отношению к связям Θ_A . Таким образом, фазовое пространство расширенной системы есть $\mathcal{E}_0 = T_\omega^*\mathcal{M} \oplus \mathbf{W}(\mathcal{M})$.

Поскольку связи Θ_A расщеплены на связи θ_i и θ_α , векторное расслоение $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ есть прямая сумма

$$\mathbf{W}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \oplus \mathbf{V}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \times V, \quad (3.6)$$

где $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ обозначает векторное расслоение, ассоциированное со связями θ_α . Так как связи $\theta_\alpha(x)$, $\alpha = 1, \dots, 2M$, мы считаем глобально определенными скалярными функциями на $\mathcal{M}$, то векторное расслоение $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ есть прямое произведение $\mathcal{M}$ и $2M$ -мерного векторного пространства V .

Матрица Дирака D_{AB} очевидным образом определяет симплектическую форму на каждом слое расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, тем самым превращая $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ в симплектическое векторное расслоение. Чтобы конвертировать связи второго рода Θ_A в связи первого рода, необходимо продолжить скобку Пуассона с $T_\omega^*\mathcal{M}$ (2.19) на фазовое пространство $\mathcal{E}_0 = T_\omega^*\mathcal{M} \oplus \mathbf{W}(\mathcal{M})$ расширенной системы. В свою очередь, это требует введения симплектической связности на расслоении $\mathbf{W}(\mathcal{M})$.

Всякое симплектическое векторное расслоение заведомо допускает симплектическую связность. Однако полезно найти явный вид симплектической связности на $\mathbf{W}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \oplus \mathbf{V}(\mathcal{M})$, согласованной с симплектической формой D . Более того, в дальнейшем нам потребуются специфическая симплектическая связность $\bar{\Gamma}^0$ на $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, которая строится ниже.

Введем коэффициенты связности $\bar{\Gamma}$ с опущенными индексами

$$\bar{\Gamma}_{AiB} = D_{AC}\bar{\Gamma}_{iB}^C \quad (3.7)$$

и запишем уравнение (2.25) в компонентах:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^i}\omega_{jk} + \bar{\Gamma}_{kij} - \bar{\Gamma}_{jik} &= 0, \\ \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\theta_\alpha + \bar{\Gamma}_{\alpha ij} - \bar{\Gamma}_{ji\alpha} &= 0, \\ \bar{\Gamma}_{\alpha i\beta} - \bar{\Gamma}_{\beta i\alpha} &= 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Первое уравнение – это уравнение для симплектической связности на $\mathcal{M}$. Естественно выбрать частное решение первого уравнения в виде

$$\bar{\Gamma}_{kij}^0 = \omega_{kl}\Gamma_{ij}^l, \quad (3.9)$$

где Γ_{ij}^l – коэффициенты некоторой фиксированной симметричной симплектической связности на $\mathcal{M}$. Далее при замене координат на $\mathcal{M}$ коэффициенты $\bar{\Gamma}_{ij\alpha}$ преобразуются как компоненты тензорного поля. Следовательно, условие $\bar{\Gamma}_{ij\alpha} = 0$ является инвариантным, и можно выбрать частное решение второго уравнения в виде

$$\bar{\Gamma}_{ij\alpha}^0 = 0, \quad \bar{\Gamma}_{\alpha ij}^0 = -\partial_i\partial_j\theta_\alpha. \quad (3.10)$$

Наконец, выберем $\bar{\Gamma}_{\alpha i\beta}^0 = 0$. Таким образом, получено частное решение $\bar{\Gamma}_{AiB}^0$ уравнений (3.8). Общее решение очевидным образом записывается как

$$\bar{\Gamma}_{AiB} = \bar{\Gamma}_{AiB}^0 + T_{AiB}, \quad T_{AiB} - T_{BiA} = 0, \quad (3.11)$$

где T_{AiB} – произвольная 1-форма на $\mathcal{M}$ со значениями в симметричном квадрате расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$.

Выпишем явное выражение для ненулевых коэффициентов $\bar{\Gamma}^0$:

$$\begin{aligned} (\bar{\Gamma}^0)_{jk}^i &= D^{iA}\bar{\Gamma}_{Ajk}^0 = D^{il}\bar{\Gamma}_{ljk}^0 + D^{i\alpha}\bar{\Gamma}_{\alpha jk}^0 = \omega^{il}(\Gamma_{ljk} + \partial_l\theta_\beta\Delta^{\beta\alpha}\nabla_j\nabla_k\theta_\alpha), \\ (\bar{\Gamma}^0)_{jk}^\alpha &= D^{\alpha A}\bar{\Gamma}_{Ajk}^0 = D^{\alpha l}\bar{\Gamma}_{ljk}^0 + D^{\alpha\beta}\bar{\Gamma}_{\beta jk}^0 = -\Delta^{\alpha\beta}\nabla_j\nabla_k\theta_\beta. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Можно заметить, что коэффициенты $(\bar{\Gamma}^0)_{jk}^i$ совпадают с коэффициентами дираковской связности на $\mathcal{M}$, определенными в (2.10). Действительно, D^{ij} есть не что иное, как пуассонов бивектор скобки Дирака на $\mathcal{M}$. В свою очередь, условие согласованности (2.22) влечет

$$\bar{\nabla}_i^0 D^{jk} = \partial_i D^{jk} + (\bar{\Gamma}^0)_{im}^j D^{mk} + (\bar{\Gamma}^0)_{im}^k D^{jm} = 0, \quad (3.13)$$

поскольку $(\bar{\Gamma}^0)_{ia}^j$ обращается в нуль. Это позволяет рассматривать дираковскую связность на $\mathcal{M}$ как ограничение связности $\bar{\Gamma}^0$ в $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ на $T\mathcal{M} \subset \mathbf{W}(\mathcal{M})$.

Запишем в компонентах выражение для кривизны связности $\bar{\Gamma}^0$. Тензор кривизны с нижними индексами определяется следующим образом:

$$\bar{R}_{ij;AB}^0 = D_{AC}(R^0)_{ij}^C{}_B = \partial_i\bar{\Gamma}_{AjB}^0 - \partial_j\bar{\Gamma}_{AiB}^0 + \bar{\Gamma}_{CiA}^0 D^{CD}\bar{\Gamma}_{DjB}^0 - \bar{\Gamma}_{CjA}^0 D^{CD}\bar{\Gamma}_{DiB}^0. \quad (3.14)$$

Единственные не обращающиеся в нуль компоненты $R_{ij;AB}^0$ имеют вид

$$\begin{aligned}\bar{R}_{ij;kl}^0 &= \partial_i \bar{\Gamma}_{kjl}^0 - \partial_j \bar{\Gamma}_{kil}^0 + \bar{\Gamma}_{Aik}^0 D^{AB} \bar{\Gamma}_{Bjl}^0 - \bar{\Gamma}_{Ajk}^0 D^{AB} \bar{\Gamma}_{Bil}^0 = \\ &= R_{ij;kl} + (\nabla_i \nabla_k \theta_\alpha) \Delta^{\alpha\beta} (\nabla_j \nabla_l \theta_\beta) - (\nabla_j \nabla_k \theta_\alpha) \Delta^{\alpha\beta} (\nabla_i \nabla_l \theta_\beta),\end{aligned}\quad (3.15)$$

где $R_{ij;kl}$ – кривизна симплектической связности Γ на $\mathcal{M}$, введенной в (3.9).

В дальнейшем мы будем предполагать, что векторное расслоение $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, соответствующее связям Θ_A , есть $T\mathcal{M} \oplus \mathbf{V}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \times V$ и наделено симплектической связностью $\bar{\Gamma}$. Мы также сохраняем обозначения $\bar{\Gamma}^0$ и $\bar{R}^0$ для специфической симплектической связности (3.12) и ее кривизны.

3.3. Расширенное фазовое пространство. Напомним (см. п. 2.6), что если дано симплектическое векторное расслоение $\mathbf{W}(\mathcal{N})$, наделенное симплектической связностью Γ и симплектической формой $\mathcal{D}$, то можно наделять $\mathbf{W}(\mathcal{N}) \oplus T_\omega^* \mathcal{N}$ симплектической структурой. Применяя эту общую конструкцию к векторному расслоению $\mathbf{W}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \times V$, наделенному симплектической формой D и связностью $\bar{\Gamma}$, получаем следующую симплектическую структуру на фазовом пространстве $\mathcal{E}_0 = T_\omega^* \mathcal{M} \oplus \mathbf{W}(\mathcal{M})$:

$$\omega^{\mathcal{E}_0} = \pi^* \omega + 2 dp_i \wedge dx^i + D_{AB} dY^A \wedge dY^B + Y^A Y^B d\bar{\Gamma}_{AB} - 2Y^A \bar{\Gamma}_{AB} \wedge dY^B. \quad (3.16)$$

Нашей целью является построение эффективной системы со связями первого рода на $\mathcal{E}_0$ путем конверсии связей второго рода Θ_A в связи первого рода. На классическом уровне конверсия достигается посредством продолжения связей Θ_A в связи T_A , определенные на $\mathcal{E}_0$, таким образом, что [18], [16]:

$$\{T_A, T_B\}_{\mathcal{E}_0} = 0, \quad T_A|_{Y^A=0} = \Theta_A. \quad (3.17)$$

Связи T_A понимаются как формальные ряды по Y^A :

$$T_A = \sum_{s=0}^{\infty} T_A^s, \quad T_A^0 = \Theta_A, \quad T_A^s = T_{AB_1, \dots, B_s}^s(x) Y^{B_1} \dots Y^{B_s}, \quad (3.18)$$

где коэффициенты $T_{AB_1, \dots, B_s}^s$ предполагаются p_i -независимыми функциями.

Несмотря на то что связи T_A абелевы по построению, удобно работать в рамках БФВ–БРСТ-подхода. В соответствии с этим введем гостовские переменные $\mathcal{C}^A$ и $\mathcal{P}_A$, $A = 1, \dots, 2M + 2N$, ассоциированные со связями T_A . Переменные $\mathcal{C}^A$ и $\mathcal{P}_A$ являются грасманово-нечетными переменными. Гостовское число вводится следующим стандартным образом:

$$\text{gh}(\mathcal{C}^A) = 1, \quad \text{gh}(\mathcal{P}_A) = -1, \quad (3.19)$$

при этом все оставшиеся переменные несут нулевое гостовское число.

Естественно рассматривать гостовские переменные $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$ как координаты на слоях векторного расслоения $\Pi \mathbf{W}(\mathcal{M})$ и $\Pi \mathbf{W}^*(\mathcal{M})$, соответственно. Здесь Π обозначает операцию смены четности; будучи примененной к векторному расслоению, она преобразует его в супер-расслоение с той же базой и функциями склейки и слоями, являющимися грасманово-нечетными суперпространствами.

В БФВ–БРСТ-квантовании необходимо расширить скобку Пуассона фазового пространства на гостовские переменные, при этом переменные $\mathcal{C}^A$ и $\mathcal{P}_A$ должны быть

канонически-сопряжены относительно скобки. С этой целью рассмотрим следующее расширение фазового пространства $\mathcal{E}_0$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{T}_\omega^*(\mathbf{PW}(\mathcal{M})) \oplus \mathbf{W}(\mathbf{PW}(\mathcal{M})), \quad (3.20)$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{PW}(\mathcal{M}))$ является обратным образом векторного расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ при проекции $\rho: \mathbf{PW}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$, а $\oplus$ обозначает прямую сумму векторных расслоений над $\mathbf{PW}(\mathcal{M})$. Заметим также, что конструкция модифицированного кокасательного расслоения над $\mathbf{PW}(\mathcal{M})$ включает замкнутую 2-форму $\rho^*\omega$, определенную на $\mathbf{PW}(\mathcal{M})$, которая является обратным образом симплектической формы на $\mathcal{M}$ при проекции ρ . Идентифицируя $\mathcal{C}^A$ с координатами на слоях $\mathbf{PW}(\mathcal{M})$ и $\mathcal{P}_A$ с сопряженными им импульсами, можно видеть, что при $\mathcal{C}^A = \mathcal{P}_A = 0$ расширенное фазовое пространство $\mathcal{E}$ действительно сводится к $\mathcal{E}_0 = \mathcal{T}_\omega^*\mathcal{M} \oplus \mathbf{W}(\mathcal{M})$.

Симплектическая структура (3.16) легко может быть расширена на $\mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \omega^\mathcal{E} = & \pi^*\omega + 2 dp_i \wedge dx^i + 2 d\mathcal{P}_A \wedge d\mathcal{C}^A + \\ & + D_{AB} dY^A \wedge dY^B + Y^A Y^B d\bar{\Gamma}_{AB} - 2Y^A \bar{\Gamma}_{AB} \wedge dY^B, \end{aligned} \quad (3.21)$$

где $\pi^*\omega$ — обратный образ 2-формы ω на $\mathcal{M}$ при проекции $\pi: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}$. Базисные соотношения для соответствующей скобки Пуассона имеют вид

$$\begin{aligned} \{x^i, p_j\}_\mathcal{E} &= \delta_j^i, & \{Y^A, Y^B\}_\mathcal{E} &= D^{AB}, \\ \{Y^A, p_i\}_\mathcal{E} &= -\bar{\Gamma}_{iB}^A Y^B, & \{\mathcal{C}^A, \mathcal{P}_B\}_\mathcal{E} &= \delta_B^A, \\ \{p_i, p_j\}_\mathcal{E} &= \omega_{ij} + \frac{1}{2} R_{ij;AB} Y^A Y^B, \end{aligned} \quad (3.22)$$

а все остальные соотношения обращаются в нуль. Эта скобка Пуассона может рассматриваться как скобка (2.29) с $\mathcal{N} = \mathbf{PW}(\mathcal{M})$. Это показывает, что соотношения (3.22) задают глобально определенную скобку Пуассона на $\mathcal{E}$.

Чтобы завершить описание расширенного фазового пространства, фиксируем класс функций на этом пространстве. Вместо гладких ($C^\infty(\mathcal{E})$) функций, мы будем рассматривать функции, являющиеся формальными рядами по переменным $Y, \mathcal{C}, \mathcal{P}$ и полиномами по p , с коэффициентами в гладких функциях на $\mathcal{M}$. Причина такого выбора состоит в том, что переменные Y используются как *переменные конверсии* и, следовательно, необходимо допустить формальные ряды по Y . Что касается гостовских переменных $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$, то при конечномерном $\mathcal{M}$ всякая функция всегда полиномиальна по $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$, поскольку $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$ грасманово-нечетны. Отметим, однако, что в случае, когда $\mathcal{M}$ является супермногообразием, необходимо допустить формальную зависимость от соответствующих гостовских переменных. В дальнейшем мы будем подразумевать, что под алгеброй $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ “функций” на $\mathcal{E}$ понимается алгебра формальных рядов, описанных выше. Можно проверить, что скобка Пуассона (3.22) корректно определена в алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{E})$. Отметим также, что $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ может рассматриваться как алгебра сечений соответствующим образом определенного расслоения над $\mathcal{M}$.

3.4. Конверсия на классическом уровне. Теперь мы готовы перейти к конверсии связей второго рода Θ_A в рамках БРСТ-формализма. Конверсия должна пониматься как решение мастер-уравнения

$$\{\Omega, \Omega\} = 0, \quad p(\Omega) = 1, \quad \text{gh}(\Omega) = 1 \quad (3.23)$$

(где $p(\Omega)$ обозначает грассманову четность Ω), подчиненное граничному условию

$$\Omega|_{Y=0} = \Omega^0 = C^A \Theta_A = -C^i p_i + C^\alpha \theta_\alpha. \quad (3.24)$$

Разложим Ω в ряд по степеням переменных Y^A :

$$\Omega = \sum_{s=0}^{\infty} \Omega^s, \quad (3.25)$$

и предположим, что Ω^r не зависит от импульсов p_i и гостовских импульсов $\mathcal{P}^A$ для $r \geq 1$. Чтобы построить решение при помощи итерационной процедуры, удобно также фиксировать член первого порядка

$$\Omega^1 = -C^A D_{AB} Y^B, \quad (3.26)$$

и ввести нильпотентный оператор δ [16], [4], [6]:

$$\delta f = C^A \frac{\partial}{\partial Y^A} f, \quad \delta^2 = \delta \delta = 0. \quad (3.27)$$

Если f не зависит от импульсов p_i и $\mathcal{P}_A$, то

$$\delta f = -\{\Omega^1, f\}_{\mathcal{E}}, \quad f = f(x, Y, C). \quad (3.28)$$

Введем оператор δ^* , который действует на однородную функцию вида

$$f_{pq} = f_{A_1, \dots, A_p; B_1, \dots, B_q}(x) Y^{A_1} \dots Y^{A_p} C^{B_1} \dots C^{B_q} \quad (3.29)$$

как

$$\begin{aligned} \delta^* f_{pq} &= \frac{1}{p+q} Y^A \frac{\partial}{\partial C^A} f_{pq}, \quad p+q \neq 0, \\ \delta^* f_{00} &= 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Оператор δ^* является, в некотором смысле, обратным к δ и играет роль “стягивающей гомотопии” для δ . Действительно,

$$f|_{Y=C=0} + \delta \delta^* f + \delta^* \delta f = f. \quad (3.31)$$

ТЕОРЕМА 3.1. *Если задана система со связями второго рода θ_α на $\mathcal{M}$ и симплектическая связность $\bar{\Gamma}$ на $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, то существует решение уравнения (3.23), удовлетворяющее граничным условиям (3.24) и (3.26). Если, кроме того, $\delta^* \Omega^r = 0$ и $\Omega^r = \Omega^r(x, Y, C)$ для $r \geq 2$, то решение единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нулевом порядке по Y уравнение (3.23) влечет

$$\{\Omega^0, \Omega^0\}_{\mathcal{E}}|_{Y=0} + \{\Omega^1, \Omega^1\}_{\mathcal{E}} = 0, \quad (3.32)$$

что выполнено в силу совместности граничных условий (3.24) и (3.26). В r -м ($r \geq 1$) порядке по Y уравнение (3.23) влечет

$$\delta \Omega^{r+1} = B^r, \quad (3.33)$$

где B^r имеет вид

$$\begin{aligned} B^1 &= \{\Omega^0, \Omega^1\}_{\mathcal{E}}, \\ B^2 &= \{\Omega^0, \Omega^2\}_{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \{\Omega^2, \Omega^2\}_{\mathcal{E}} + \frac{1}{4} C^i C^j \bar{R}_{ij;AB} Y^A Y^B, \\ B^r &= \{\Omega^0, \Omega^r\}_{\mathcal{E}} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^{r-2} \{\Omega^{s+2}, \Omega^{r-s}\}_{\mathcal{E}}, \quad r \geq 3, \end{aligned} \quad (3.34)$$

и мы предположили, что $\Omega^r = \Omega^r(x, Y, \mathcal{C})$ для $r \geq 2$. Необходимым и достаточным условием существования решения уравнения (3.33) является условие $\delta B^r = 0$. Сначала покажем явно, что $\delta B^1 = 0$. Действительно, в силу уравнения в нулевом порядке по Y имеем

$$\begin{aligned} \delta B^1 &= \delta \{\Omega^0, \Omega^1\} = -\{\Omega^1, \{\Omega^1, \Omega^0\}\} = -\frac{1}{2} \{\{\Omega^1, \Omega^1\}_{\mathcal{E}}, \Omega^0\}_{\mathcal{E}} = \\ &= \frac{1}{2} \{\{\Omega^0, \Omega^0\}_{\mathcal{E}}|_{Y=0}, \Omega^0\}_{\mathcal{E}} = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Частное решение для Ω^2 имеет вид

$$\Omega^2 = \delta^* \{\Omega^0, \Omega^1\}. \quad (3.36)$$

Доказательство теоремы проводится далее в соответствии со стандартной итерационной процедурой [16], [6]: сначала можно показать, что $\delta B^s = 0$, если Ω^r удовлетворяет уравнению (3.33) для всех $r \leq s-1$; далее находим

$$\Omega^{s+1} = \delta^* B^s. \quad (3.37)$$

Наконец, можно показать, что $\Omega^{s+1} = \delta^* B^s$ является единственным решением уравнения (3.33) для $r = s$, если наложено дополнительное условие $\delta^* \Omega^{s+1} = 0$.

Из теоремы 3.1 следует, что мы построили систему со связями первого рода, для которой $\mathcal{E}$ является расширенным фазовым пространством. Поскольку при дополнительном условии $\delta^* \Omega^r = 0$, $r \geq 2$, классический БРСТ-заряд единствен и, очевидно, линеен по $\mathcal{C}$, то построенная система первого рода является абелевой.

3.5. БРСТ-когомологии. По определению наблюдаемой БФВ-БРСТ-системы, заданной БРСТ-зарядом Ω , называется функция f на расширенном фазовом пространстве, удовлетворяющая условиям

$$\{\Omega, f\}_{\mathcal{E}} = 0, \quad \text{gh}(f) = 0. \quad (3.38)$$

Две наблюдаемых f и g называются эквивалентными тогда и только тогда, когда их разность БРСТ-точна, т.е. $f - g = \{\Omega, h\}_{\mathcal{E}} = 0$ для некоторой функции $h \in \mathcal{F}(\mathcal{E})$. Пространство неэквивалентных наблюдаемых системы является, таким образом, пространством БРСТ-когомологий с гостовским нулевым числом (т.е. фактор-пространством БРСТ-замкнутых функций с нулевым гостовским числом по модулю БРСТ-точных). Изучим структуру БРСТ-когомологий БФВ-БРСТ-системы на $\mathcal{E}$, определенной БРСТ-зарядом Ω , построенным в теореме 3.1.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.2. 1. Пусть f_0 – произвольная не зависящая от Y функция (т.е. функция, зависящая только от $x, p, C, \mathcal{P}$) с неотрицательным гостовским числом. Тогда существует функция f на $\mathcal{E}$ такая, что

$$\{\Omega, f\}_{\mathcal{E}} = 0, \quad f|_{Y=0} = f_0, \quad \text{gh}(f) = \text{gh}(f_0). \quad (3.39)$$

Более того, если функция $\tilde{f}$ также удовлетворяет уравнению (3.39), то

$$\tilde{f} - f = \{\Omega, g\} \quad (3.40)$$

для некоторой функции g на $\mathcal{E}$.

2. Если, кроме того, функция f удовлетворяет уравнению $\delta^*(f - f_0) = 0$, то она является единственным решением уравнения (3.39).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Представим присоединенное действие $\{\Omega, \cdot\}_{\mathcal{E}}$ БРСТ-заряда и функцию f в виде суммы однородных компонент по отношению к переменным Y :

$$\{\Omega, \cdot\}_{\mathcal{E}} = -\delta + \sum_{s=0}^{\infty} \delta_s, \quad f = \sum_{s=0}^{\infty} f_s, \quad (3.41)$$

где $\delta = C^A \partial / \partial Y^A$. Тогда в r -м порядке по Y уравнение (3.39) записывается как

$$\delta f_{r+1} = B_r, \quad (3.42)$$

где B_r имеет следующий вид:

$$B_r = \sum_{s=0}^r \delta_s f_{r-s}. \quad (3.43)$$

Условие совместности для уравнения (3.42) есть $\delta B_r = 0$. Покажем, что $\delta B_p = 0$, если уравнение (3.42) выполнено для всех $r \leq p$ и f_0 несет неотрицательное гостовское число. Действительно, в нулевом порядке по Y уравнение (3.42) переписывается как

$$\delta f_1 = \delta_0 f_0. \quad (3.44)$$

Условие совместности, очевидно, выполнено, поскольку

$$\delta B_0 = \delta \delta_0 f_0 = -\delta_0 \delta f_0 = 0. \quad (3.45)$$

Последнее равенство справедливо в силу того, что f_0 не зависит от Y . Предположим, что функции f_r заданы для $r \leq p$ и уравнение (3.42) выполнено для $r \leq p-1$. Рассмотрим тождество

$$\left\{ \Omega, \left\{ \Omega, \sum_{s=0}^p f_s \right\}_{\mathcal{E}} \right\}_{\mathcal{E}} = \left(-\delta + \sum_{q=0}^{\infty} \delta_q \right) \left(-\delta + \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t \right) \sum_{s=0}^p f_s = 0. \quad (3.46)$$

Можно заметить, что

$$\left(-\delta + \sum_{t=0}^{\infty} \delta_t \right) \sum_{s=0}^p f_s = B_p + \dots, \quad (3.47)$$

где многоточием обозначены члены порядка выше p . Тогда в $(p - 1)$ -м порядке по Y уравнение (3.46) влечет $\delta B_p = 0$. Это позволяет построить решение с помощью итерационной процедуры:

$$f_{p+1} = \delta^* B_p. \quad (3.48)$$

Можно действительно показать, что

$$\delta f_{p+1} = \delta \delta^* B_p = \delta \delta^* B_p + \delta^* \delta B_p + B_p|_{C=Y=0} = B_p, \quad (3.49)$$

поскольку $\delta B_p = 0$ и $B_p|_{C=Y=0} = 0$. Последнее равенство очевидно для $p \geq 1$; для $p = 0$ равенство $B_0|_{C=Y=0} = (\delta_0 f_0)|_{C=Y=0} = 0$ является следствием неотрицательности гостовского числа f_0 . Таким образом, первое утверждение доказано.

Далее, пусть функции f и $\tilde{f}$ удовлетворяют уравнению (3.39). Предположим, что $f_s = \tilde{f}_s$ для всех $s \leq r$. Тогда в r -м порядке по Y уравнение (3.39) влечет

$$\delta f_{r+1} = B_r, \quad \delta \tilde{f}_{r+1} = B_r. \quad (3.50)$$

Поскольку $\delta(\tilde{f}_r - f_r) = 0$ и $(\tilde{f}_r - f_r)|_{Y=C=0} = 0$, можно представить $\tilde{f}_r - f_r$ в виде

$$\tilde{f}_r - f_r = \delta g_r, \quad g_r = \delta^*(\tilde{f}_r - f_r). \quad (3.51)$$

Таким образом, функция

$$\bar{f} = f + \{\Omega, g_r\}_{\mathcal{E}} \quad (3.52)$$

удовлетворяет уравнению (3.39) и совпадает с $\tilde{f}$ с точностью до членов порядка выше $r + 1$. Последовательно применяя такую процедуру, можно построить функцию g такую, что

$$\tilde{f} = f + \{\Omega, g\}_{\mathcal{E}}. \quad (3.53)$$

Наконец, пусть функции f и $\tilde{f}$ удовлетворяют уравнению (3.39) и дополнительному условию $\delta^*(f - f_0) = \delta^*(\tilde{f} - f_0) = 0$. Тогда для $d_{r+1} = f_{r+1} - \tilde{f}_{r+1}$ имеем

$$\delta d_{r+1} = \delta^* d_{r+1} = 0.$$

Поскольку $d_{r+1}|_{Y=C=0} = 0$, последнее равенство влечет $d_{r+1} = 0$. Это доказывает второе утверждение предложения.

ЛЕММА 3.1. Пусть f_0 — произвольная не зависящая от Y функция с неотрицательным гостовским числом. Пусть также f является БРСТ-инвариантным расширением функции f_0 , построенным с помощью предложения 3.2. Тогда

$$f = \{\Omega, h\}_{\mathcal{E}} \quad (3.54)$$

для некоторой функции h на $\mathcal{E}$ тогда и только тогда, когда

$$f_0|_{C^A=\theta_\alpha=p_i=0} = 0. \quad (3.55)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем новые координатные функции

$$\bar{p}_i = p_i - \mathcal{P}_k \Gamma_{ij}^k C^j, \quad (3.56)$$

где Γ_{ij}^k — коэффициенты произвольной симметричной связности на $\mathcal{M}$. Это удобно, поскольку в отличие от p_i , которые имеют неоднородный закон преобразования, координатные функции $\bar{p}_i$ преобразуются, как компоненты 1-формы на $\mathcal{M}$. Отметим, что функции $\bar{p}$, x , Y , $\mathcal{C}$ и $\mathcal{P}$ также образуют систему локальных координат на $\mathcal{E}$, а условия $\mathcal{C}^A = \theta_\alpha = p_i = 0$ и $\mathcal{C}^A = \theta_\alpha = \bar{p}_i = 0$, очевидно, эквивалентны.

Всякая БРСТ-точная функция f (т.е. функция, представимая в виде $f = \{\Omega, h\}$), очевидно, обращается в нуль при $Y^A = \mathcal{C}^A = \theta_\alpha = \bar{p}_i = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, предположим, что функция f_0 обладает неотрицательным гостовским числом и обращается в нуль при $\mathcal{C}^A = \theta_\alpha = \bar{p}_i = 0$. Тогда функция f_0 может быть представлена в виде

$$f_0 = \mathcal{C}^A f_A + \theta_\alpha f^\alpha + \bar{p}_i f^i, \quad (3.57)$$

где функции f^i могут быть выбраны как $f^i = f^i(x, p)$. Можно также выбрать f_A и f^i таким образом, что они преобразуются, как компоненты сечения $\mathbf{W}^*(\mathcal{M})$ и компоненты векторного поля на $\mathcal{M}$, соответственно. Введем функции

$$\begin{aligned} \bar{f}^\alpha &= f^\alpha + Y^l \partial_l f^\alpha, \\ \bar{f}^i &= f^i + Y^l \left(\partial_l f^i + \Gamma_{lk}^i f^k - \bar{p}_j \Gamma_{lk}^j \frac{\partial}{\partial \bar{p}_k} f^i + \frac{1}{2} \mathcal{C}^j R_{lj}^m \mathcal{P}_m \frac{\partial}{\partial \bar{p}_k} f^i \right), \end{aligned} \quad (3.58)$$

где R — кривизна связности Γ . Заметим, что $\bar{f}^i$ преобразуются, как компоненты векторного поля на $\mathcal{M}$. В частности, $\bar{f}^i \mathcal{P}_i$ является глобально определенной функцией на $\mathcal{E}$. Выбирая h_0 в виде

$$h_0 = -Y^A f_A + \mathcal{P}_\alpha \bar{f}^\alpha - \mathcal{P}_i \bar{f}^i, \quad (3.59)$$

можно действительно показать, что

$$f_0 = \{\Omega, h_0\}_{\mathcal{E}}|_{Y=0}. \quad (3.60)$$

Наконец, из предложения 3.2 следует, что существует функция h_1 такая, что $f = \{\Omega, h_0 + h_1\}_{\mathcal{E}}$.

В качестве следствия предложения 3.2 и леммы 3.1 получаем следующую теорему.

ТЕОРЕМА 3.2. *В неотрицательном гостовском числе БРСТ-когомологии БРСТ-заряда Ω , построенного в теореме 3.1, имеют следующий вид:*

$$\begin{aligned} H^n &= 0, & n &\geq 1, \\ H^n &= \mathcal{C}^\infty(\Sigma), & n &= 0. \end{aligned} \quad (3.61)$$

где H^n обозначает когомологии с гостовским числом n , а $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$ — алгебру гладких функций на поверхности связей $\Sigma \subset \mathcal{M}$.

Из теоремы 3.2 следует, что, по меньшей мере на классическом уровне, исходная система второго рода на $\mathcal{M}$ эквивалентна построенной БФВ–БРСТ-системе на $\mathcal{E}$.

4. КВАНТОВОЕ ОПИСАНИЕ И *-УМНОЖЕНИЕ

В данном разделе проводится квантование построенной БФВ–БРСТ-системы. Это включает построение квантового БРСТ-заряда, квантовых БРСТ-наблюдаемых и вычисление БРСТ-когомологий. *-Умножение для скобки Дирака на $\mathcal{M}$ строится как квантовое умножение БРСТ-наблюдаемых.

4.1. Квантование расширенного фазового пространства. В общем случае расширенное фазовое пространство $\mathcal{E}$ рассматриваемой БФВ–БРСТ-системы не является плоским многообразием и тем самым не может быть непосредственно проквантовано. Однако как все физические наблюдаемые, так и генераторы БРСТ-алгебры (БРСТ-заряд Ω и гостовский заряд $G = \mathcal{C}^A \mathcal{P}_A$) могут быть выбраны принадлежащими некоторой подалгебре $\mathfrak{A} \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$. В свою очередь, подалгебра $\mathfrak{A}$ замкнута относительно скобки Пуассона и может быть явно проквантована. Это означает, что она может быть наделена квантовым умножением, удовлетворяющим стандартному принципу соответствия.

Так как конструкция подалгебры $\mathfrak{A}$ является непосредственным обобщением аналогичной конструкции для БРСТ-квантования симплектических многообразий без связей, описанной в работе [6], то здесь мы представляем ее очень кратко. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{A}_0$ функций на $\mathcal{E}$, которые не зависят от импульсов p_i и гостовских импульсов $\mathcal{P}_i$. Общий элемент этой алгебры имеет вид

$$a = a(x^i, Y^A, \mathcal{C}^A, \mathcal{P}_\alpha). \quad (4.1)$$

На инвариантном языке $\mathfrak{A}_0$ является тензорным произведением алгебры, порожденной $\mathcal{P}_\alpha$, и обратного образа алгебры функций на $\Pi W(\mathcal{M}) \oplus W(\mathcal{M})$ при проекции $\mathcal{E} \rightarrow \Pi W(\mathcal{M}) \oplus W(\mathcal{M})$. Подалгебра $\mathfrak{A}_0$ является пуассоновой подалгебррой, т.е. замкнута относительно обычного умножения функций и скобки Пуассона.

На квантовом уровне удобно рассматривать алгебру

$$\hat{\mathfrak{A}}_0 \equiv \mathfrak{A}_0 \otimes [[\hbar]], \quad (4.2)$$

где $[[\hbar]]$ обозначает алгебру формальных рядов по $\hbar$. Алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_0$ также является пуассоновой. Легко построить деформационное квантование алгебры $\hat{\mathfrak{A}}_0$, рассматриваемой как пуассонова алгебра. Действительно, вейлевское умножение позволяет это сделать. Для всяких $a, b \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ положим

$$\begin{aligned} (a * b)(x, Y, \mathcal{C}, \mathcal{P}, \hbar) = & \left\{ a(x, Y_1, \mathcal{C}_1, \mathcal{P}_2, \hbar) \times \right. \\ & \times \exp \left(-\frac{i\hbar}{2} \left(D^{AB} \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial Y_1^A} \frac{\partial}{\partial Y_2^B} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \mathcal{C}_1^\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathcal{P}_\alpha^2} + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \mathcal{P}_\alpha^1} \frac{\partial}{\partial \mathcal{C}_2^\alpha} \right) \right) \times \\ & \left. \times b(x, Y_2, \mathcal{C}_2, \mathcal{P}_2, \hbar) \right\} \Big|_{Y_1=Y_2=Y, \mathcal{C}_1=\mathcal{C}_2=\mathcal{C}, \mathcal{P}_1=\mathcal{P}_2=\mathcal{P}}, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где аргумент $\mathcal{P}$ обозначает зависимость только от $\mathcal{P}_\alpha$.

Подалгебра $\hat{\mathfrak{A}}$ ($\mathfrak{A}$) является расширением $\hat{\mathfrak{A}}_0$ ($\mathfrak{A}_0$) элементами $\mathbf{P} = -\mathcal{C}^i p_i$, $\mathbf{G} = \mathcal{C}^i \mathcal{P}_i$. Общий однородный элемент $a \in \mathfrak{A}$ имеет вид

$$a = \mathbf{P}^r \mathbf{G}^s a_0, \quad r = 0, 1, \quad s = 0, 1, \dots, 2N, \quad a_0 \in \hat{\mathfrak{A}}_0. \quad (4.4)$$

Вейлевское умножение (4.3) может быть легко расширено с $\hat{\mathfrak{A}}_0$ на $\hat{\mathfrak{A}}$. Явная конструкция квантового умножения в $\hat{\mathfrak{A}}$ является очевидным обобщением конструкции, представленной в работе [6]. Здесь мы выпишем явно только таблицу умножения для $\mathbf{G}$ -независимых элементов (оказывается, что этого достаточно для настоящего рассмотрения):

$$\mathbf{P} * a = \mathbf{P}a, \quad a * \mathbf{P} = a\mathbf{P} + (-1)^{p(a)} \frac{i\hbar}{2} \bar{\nabla}a, \quad \mathbf{P} * \mathbf{P} = -i\hbar(\bar{R} + \omega). \quad (4.5)$$

Здесь a – произвольный элемент $\hat{\mathfrak{A}}_0$, $\bar{\nabla} = C^i \partial_i - C^i \bar{\Gamma}_{iB}^A Y^B \partial / \partial Y^A$, а $\bar{R}$ и ω обозначают “производящие функции” для кривизны и симплектической формы:

$$\bar{R} = \frac{1}{4} C^i C^j \bar{R}_{ij;AB} Y^A Y^B, \quad \omega = \frac{1}{2} C^i \omega_{ij} C^j, \quad \bar{R}, \omega \in \mathfrak{A} \subset \hat{\mathfrak{A}}. \quad (4.6)$$

В дальнейшем мы будем рассматривать $\hat{\mathfrak{A}}$ как ассоциативную алгебру с умножением, определенным соотношениями (4.3) и (4.5) и расширенным на зависящие от $\mathbf{G}$ элементы, как это было сделано в работе [6]. Введем полезную градуировку в $\hat{\mathfrak{A}}$. А именно, припишем следующие градуировки переменным:

$$\begin{aligned} \deg x^i = \deg C^A = 0, \quad \deg p_i = \deg \mathcal{P}_A = 2, \\ \deg Y^A = 1, \quad \deg \hbar = 2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Квантовое умножение в $\hat{\mathfrak{A}}$ очевидным образом согласовано с градуировкой.

4.2. Квантовый БРСТ-заряд. Поскольку классический БРСТ-заряд, построенный в теореме 3.1, принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}$, то естественно определить квантовый БРСТ-заряд $\hat{\Omega}$ как решение квантового мастер-уравнения

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}]_* \equiv 2 \hat{\Omega} * \hat{\Omega} = 0, \quad \hat{\Omega} \in \hat{\mathfrak{A}}, \quad p(\hat{\Omega}) = 1, \quad \text{gh}(\hat{\Omega}) = 1. \quad (4.8)$$

Анализируя мастер-уравнение, удобно разложить $\hat{\Omega}$ в сумму однородных компонент по отношению к градуировке (4.7)

$$\hat{\Omega} = \sum_{r=0}^{\infty} \hat{\Omega}^r, \quad \deg \hat{\Omega}^r = r. \quad (4.9)$$

Подходящим квантовым аналогом классических граничных условий (3.24) и (3.26), выбранных в теореме 3.1, являются условия

$$\hat{\Omega}^0 = C^\alpha \theta_\alpha, \quad \hat{\Omega}^1 = -C^A D_{AB} Y^B, \quad \hat{\Omega}^2 = -C^i p_i + \frac{i}{\hbar} \delta^*([\hat{\Omega}^0, \hat{\Omega}^1]_*). \quad (4.10)$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Уравнение (4.8) имеет решение $\hat{\Omega}$, удовлетворяющее граничным условиям (4.10). Если, кроме того, это решение удовлетворяет условиям $\delta^* \hat{\Omega}^r = 0$ и $\hat{\Omega}^r = \hat{\Omega}^r(x, Y, C, \hbar)$ для всех $r \geq 3$, то решение единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является непосредственным обобщением доказательства аналогичного утверждения в работе [6]. Предположим, что $\hat{\Omega}^r \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ для всех $r \geq 3$ и $\hat{\Omega}$ не

зависит от $\mathcal{P}$. Тогда решение может быть построено с помощью итерационной процедуры:

$$\widehat{\Omega}^{r+1} = \delta^* \widehat{B}^r, \quad r \geq 2,$$

где $\deg \widehat{\Omega}^s = s$ и $\widehat{B}^r$ имеет следующий вид:

$$\widehat{B}^r = \frac{i}{2\hbar} \sum_{s=0}^{r-2} [\widehat{\Omega}^{s+2}, \widehat{\Omega}^{r-s}]_*, \quad r \geq 2. \quad (4.11)$$

4.3. Квантовые БРСТ-наблюдаемые и *-умножение. На классическом уровне всякая физическая наблюдаемая (элемент БРСТ-когомологий с нулевым гостовским числом) может рассматриваться как элемент $\hat{\mathfrak{A}}$. Естественно определить квантовую БРСТ-наблюдаемую как функцию f , удовлетворяющую уравнению

$$[\widehat{\Omega}, f]_* = 0, \quad f \in \hat{\mathfrak{A}}. \quad (4.12)$$

Две наблюдаемых называются эквивалентными, если их разность может быть представлена в виде $(i/\hbar)[\widehat{\Omega}, g]_*$ для некоторого $g \in \hat{\mathfrak{A}}$. Таким образом, неэквивалентные наблюдаемые суть когомологии $(i/\hbar)[\widehat{\Omega}, \cdot]_*$ с нулевым гостовским числом.

Сначала рассмотрим наблюдаемые в $\hat{\mathfrak{A}}_0$. Оказывается, что всякая функция $f_0(x, C)$ допускает квантовое БРСТ-инвариантное продолжение f , удовлетворяющее уравнению (4.12) и граничному условию

$$f|_{Y=0} = f_0. \quad (4.13)$$

Если функция f_0 обладает определенным гостовским числом, то будем также требовать, чтобы $\text{gh}(f) = \text{gh}(f_0)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1. *Для всякой функции $f_0(x, C)$ существует решение $f \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ уравнения (4.12), удовлетворяющее граничному условию (4.13). Если на функцию f наложить дополнительные условия $\delta^*(f - f_0) = 0$ и $f = f(x, Y, C, \hbar)$, то решение единственно.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО является непосредственным обобщением доказательства аналогичного утверждения в работе [6]. Представим f в виде

$$f = f_0 + \sum_{s=1}^{\infty} f_s, \quad \deg f_s = s. \quad (4.14)$$

Решение строится с помощью итерационной процедуры

$$f_{r+1} = \delta^* B_r,$$

где B^r имеет следующий вид:

$$B_r = \frac{i}{2\hbar} \sum_{s=0}^{r-2} [\widehat{\Omega}^{s+2}, f_{r-s}]_*.$$

В частности, для функции $f_0 = f_0(x)$ имеем

$$f = f_0 + Y^i \partial_i f_0 + \dots, \quad (4.15)$$

где многоточием обозначены члены высших порядков по Y и $\hbar$.

Поскольку БРСТ-инвариантное продолжение, определяемое предложением 4.1, является линейным отображением, оно может быть расширено на функции, зависящие формально от $\hbar$.

Предложение 4.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями из $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \otimes [[\hbar]]$ и БРСТ-инвариантными функциями, зависящими только от x , Y и $\hbar$. Пространство таких функций очевидным образом замкнуто относительно квантового умножения (4.3) в $\hat{\mathfrak{A}}_0$. Тем самым это умножение определяет некоторое $*$ -умножение на $\mathcal{M}$, что и определяет деформационное квантование скобки Дирака на $\mathcal{M}$. А именно, для функций f_0 и g_0 на $\mathcal{M}$ имеем

$$f_0 *_{\mathcal{M}} g_0 = (f * g)|_{Y=0} = f_0 g_0 - \frac{i\hbar}{2} \{f_0, g_0\}_{\mathcal{M}}^D + \dots, \quad (4.16)$$

где $f = f(x, Y, \hbar)$ и $g = g(x, Y, \hbar)$ – единственные БРСТ-инвариантные продолжения f_0 и g_0 , полученные с помощью предложения 4.1, $*$ – знак вейлевского умножения (4.3), а многоточием обозначены члены высшего порядка по $\hbar$.

4.4. БРСТ-когомологии на квантовом уровне. Чтобы завершить описание построенной квантовой калибровочной системы, вычислим когомологии квантового БРСТ-заряда, полученного в теореме 4.1. Поскольку нам не известно квантовое умножение в алгебре $\mathcal{F}(\mathcal{E})$ функций на всем пространстве $\mathcal{E}$, а только в подалгебре $\hat{\mathfrak{A}} \subset \mathcal{F}(\mathcal{E})$, то нас интересуют когомологии $\hat{\Omega}$, вычисленные в $\hat{\mathfrak{A}}$.

Прежде всего, заметим, что когомологии классического БРСТ-заряда Ω , вычисленные в подалгебре $\hat{\mathfrak{A}}$ (рассматриваемой как пуассонова алгебра), совпадают с когомологиями, вычисленными в $\mathcal{F}(\mathcal{E}) \otimes [[\hbar]]$. Действительно, надлежащим образом модифицированные предложение 3.2 и лемма 3.1 показывают это.

Вместо того чтобы формулировать квантовые аналоги предложения 3.2 и леммы 3.1, построим квантовые БРСТ-инвариантные элементы, как квантовые деформации соответствующих классических элементов.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.2. 1. Пусть функция $f \in \hat{\mathfrak{A}}$ обладает неотрицательным гостовским числом и удовлетворяет уравнению

$$\{\hat{\Omega}|_{\hbar=0}, f\}_{\mathcal{E}} = 0, \quad (4.17)$$

где $\hat{\Omega}$ – квантовый БРСТ-заряд, полученный в теореме 4.1. Тогда существуют квантовые поправки f_s , $s \geq 1$, такие, что $f_s \in \hat{\mathfrak{A}}$, $\text{gh}(f_s) = \text{gh}(f)$ и функция $\hat{f} = f - i\hbar f_1 + (-i\hbar)^2 f_2 + \dots$ удовлетворяет уравнению

$$[\hat{\Omega}, \hat{f}]_* = 0. \quad (4.18)$$

2. Пусть функция $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{A}}$ обладает неотрицательным гостовским числом и удовлетворяет уравнению (4.18). Тогда существует такой элемент $\hat{g} \in \hat{\mathfrak{A}}$, что $\hat{f} + (i/\hbar)[\hat{\Omega}, \hat{g}]_*$ есть функция только от $x, Y, \mathcal{C}$ и $\hbar$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Функция f_0 является классической БРСТ-наблюдаемой, поскольку $\Omega \equiv \widehat{\Omega}|_{\hbar=0}$ очевидным образом является классическим БРСТ-зарядом из теоремы 3.1. В $(r+2)$ -м порядке по $\hbar$ уравнение (4.18) влечет

$$\{\Omega, f_{r+1}\}_{\mathcal{E}} + \mathcal{B}_r = 0, \quad (4.19)$$

с элементом $\mathcal{B}_r$, имеющим следующий вид:

$$\mathcal{B}_r = \sum_{s+t+u=r+2} [\widehat{\Omega}^s, f_t]_*^u, \quad s, u \geq 1, \quad t \geq 0, \quad (4.20)$$

где $\widehat{\Omega}$ и $[\cdot, \cdot]_*$ разложены в ряд по $\hbar$ следующим образом:

$$\widehat{\Omega} = \Omega + \sum_{s=1}^{\infty} (-i\hbar)^s \widehat{\Omega}^s, \quad [\cdot, \cdot]_* = \sum_{s=1}^{\infty} (-i\hbar)^s [\cdot, \cdot]_*^s. \quad (4.21)$$

Аргументы, аналогичные аргументам в доказательстве предложения 3.2, показывают, что $\{\Omega, \mathcal{B}^p\}_{\mathcal{E}} = 0$ при условии, что уравнение (4.19) выполнено для всех $r \leq p-1$. Поскольку когомологии классического БРСТ-заряда обращаются в нуль в строго положительном гостовском числе и $\text{gh}(\mathcal{B}_{r+1}) \geq 1$, то уравнение (4.19) допускает решение для $r = p$. Более того, можно выбрать f_{r+1} принадлежащим $\hat{\mathfrak{A}}$.

Утверждение 2 очевидно в случае, когда $\hat{f}$ несет строго положительное гостовское число, в силу того, что классические БРСТ-когомологии обращаются в нуль в строго положительном гостовском числе. Пусть теперь функция $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{A}}$ удовлетворяет уравнению (4.18) и $\text{gh}(\hat{f}) = 0$. Покажем, что существует такое $\hat{g}$, что функция $\hat{f} + (i/\hbar)[\widehat{\Omega}, \hat{g}]_*$ зависит только от x, Y и $\hbar$. Это очевидно для члена нулевого порядка f в разложении $\hat{f} = f - i\hbar f_1 + (-i\hbar)^2 f_2 + \dots$ элемента $\hat{f}$ по степеням $\hbar$. Предположим, что это также выполнено для всех f_s , $s \leq r$. Тогда в $(r+2)$ -м порядке по $\hbar$ уравнение (4.18) принимает вид (4.19). Поскольку f_s — функция только от x, Y для всех $s \leq r$, то $\mathcal{B}_r$ в (4.19) имеет вид $\mathcal{C}^A b_A(x, Y)$ и можно найти такое $\tilde{f}_{r+1}(x, Y)$, что

$$\{\Omega, \tilde{f}_{r+1}\}_{\mathcal{E}} + \mathcal{B}_r = 0. \quad (4.22)$$

Поскольку $\{\Omega, f_{r+1} - \tilde{f}_{r+1}\}_{\mathcal{E}} = 0$, существуют функции $\bar{f}_{r+1}(x, Y)$ и $g_{r+1} \in \hat{\mathfrak{A}}$ такие, что

$$f_{r+1} = \bar{f}_{r+1} - \{\Omega, g_{r+1}\}_{\mathcal{E}}, \quad (4.23)$$

откуда следует, что $\bar{f}_{r+1}(x, Y)$ есть член порядка $r+1$ в разложении

$$\hat{f} + (i/\hbar)[\widehat{\Omega}, (-i\hbar)^{r+1} g_{r+1}]_*$$

по степеням $\hbar$. Действуя далее по индукции, можно найти элемент $\hat{g}$, необходимый в утверждении 2.

Предложение 4.1 устанавливает взаимно однозначное соответствие между функциями $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \otimes [[\hbar]]$ и квантовыми БРСТ-инвариантными функциями, зависящими только от x, Y и $\hbar$. Те из этих функций, которые обращаются в нуль при $Y = \theta = 0$, являются БРСТ-тривиальными (в этом можно убедиться непосредственно или используя аргументы, аналогичные доказательству утверждения 2 предложения 4.2), в то время как функции, которые не обращаются в нуль при $Y = \theta = 0$, очевидно, нетривиальны. Таким образом, мы приходим к квантовому аналогу теоремы 3.2.

ТЕОРЕМА 4.2. В неотрицательном гостовском числе квантовые БРСТ-когомологии $\hat{\Omega}$, вычисленные в $\hat{\mathfrak{A}}$, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\hat{H}^n &= 0, & n \geq 1, \\ \hat{H}^n &= \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \otimes [[\hbar]], & n = 0.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Из теоремы 4.2 следует, что построенная калибровочная система эквивалентна исходной системе второго рода на $\mathcal{M}$ также и на квантовом уровне. В частности, это приводит к тому, что квантовое умножение неэквивалентных квантовых БРСТ-наблюдаемых определяет $*$ -умножение на Σ .

Действительно, квантовое умножение в $\mathfrak{A}_0$ определяет квантовое умножение в $\hat{H}^0$, которое, в свою очередь, изоморфно $\mathcal{C}^\infty(\Sigma)$. Изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\Sigma) \otimes [[\hbar]] \rightarrow \hat{H}^0$, так же как и обратное отображение, может быть получен явным образом с помощью предложения 4.1. А именно, всякая функция $f_\Sigma \in \mathcal{C}^\infty(\Sigma) \otimes [[\hbar]]$ может быть представлена как $f_0|_\Sigma$ с некоторой функцией $f_0 \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}) \otimes [[\hbar]]$. Таким образом, изоморфизм $\mathcal{C}^\infty(\Sigma) \otimes [[\hbar]] \rightarrow \hat{H}^0$ явно дается квантовым БРСТ-инвариантным продолжением функции f_0 , определенным в предложении 4.1. Обратное отображение, очевидно, задается ограничением на Σ . Таким образом, $*$ -умножение на Σ имеет вид

$$\begin{aligned}f_\Sigma * g_\Sigma &= (f_0 *_{\mathcal{M}} g_0)|_\Sigma = (f * g)|_\Sigma = f_\Sigma g_\Sigma - \frac{i}{2\hbar} \{f_\Sigma, g_\Sigma\}_\Sigma + \dots, \\ f_0|_\Sigma &= f_\Sigma, \quad g_0|_\Sigma = g_\Sigma,\end{aligned}\quad (4.25)$$

где f и g – квантовые БРСТ-инвариантные продолжения функций f_0 и g_0 , соответственно, $\{\cdot, \cdot\}_\Sigma$ обозначает скобку Пуассона на Σ (ограничение на Σ скобки Дирака $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$), а многоточием обозначены члены высших порядков по $\hbar$. $*$ -Умножение (4.25) определено корректно в том смысле, что оно не зависит от выбора представителей f_0, g_0 : $f_0|_\Sigma = f_\Sigma$, $g_0|_\Sigma = g_\Sigma$ функций f_Σ, g_Σ на Σ . На самом деле, оно также не зависит от выбора БРСТ-инвариантного продолжения для f_0 и g_0 .

4.5. Квантование с дираковской связностью и центр $*$ -коммутаторной алгебры. Сделаем несколько общих наблюдений о структуре БРСТ-заряда и БРСТ-инвариантных наблюдаемых в случае, когда симплектическая связность $\bar{\Gamma}$, определяющая симплектическую структуру на $\mathcal{E}$, является специфической связностью $\bar{\Gamma}^0$, имеющей вид (3.12). Хотя предлагаемая схема квантования работает с произвольной симплектической связностью $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, оказывается, что если использовать специфическую связность $\bar{\Gamma}^0$, то центральные функции скобки Дирака также являются центральными функциями для $*$ -коммутатора на $\mathcal{M}$.

В первую очередь рассмотрим структуру квантового БРСТ-заряда $\hat{\Omega}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. Предположим, что симплектическая связность, определяющая симплектическую структуру на $\mathcal{E}$, есть специфическая связность $\bar{\Gamma}^0$, имеющая вид (3.12). Пусть также $\hat{\Omega}_0$ – единственное решение мастер-уравнения (4.8), полученное в теореме 4.1 с граничными условиями (4.10) и дополнительными условиями $\delta^* \hat{\Omega}_0^r = 0$ и $\hat{\Omega}_0^r = \hat{\Omega}_0^r(x, Y, \mathcal{C}, \hbar)$, $r \geq 3$. Тогда $\hat{\Omega}_0$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{C}^\alpha} \hat{\Omega}_0^r = \frac{\partial}{\partial Y^\alpha} \hat{\Omega}_0^r = 0, \quad r \geq 3, \quad \deg \hat{\Omega}_0^r = r. \quad (4.26)$$

Классический БРСТ-заряд Ω_0 может быть получен как $\Omega_0 = \hat{\Omega}_0|_{\hbar=0}$ и, следовательно, также не зависит от Y^α и C^α (исключая члены нулевого и первого порядка по Y).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $[\hat{\Omega}_0^0, \hat{\Omega}_0^1]_*$ обращается в нуль, то для второго члена градуировки имеем $\hat{\Omega}_0^2 = -C^i p_i$. Предположим, что уравнение (4.26) выполнено для $r \leq s$. Тогда $\hat{\Omega}_0^{s+1}$ также не зависит от C^α и Y^α . Действительно, для $\hat{\Omega}_0^{s+1}$ имеем

$$\hat{\Omega}_0^{s+1} = \delta^* \hat{B}^s, \quad (4.27)$$

где $\hat{B}^s$ имеет вид (4.11). Пространство функций, не зависящих от C^α и Y^α , замкнуто относительно квантового умножения в $\hat{\mathfrak{A}}$, поскольку соответствующие компоненты связности $\bar{\Gamma}^0$ и ее кривизны обращаются в нуль. В свою очередь, оператор δ^* также сохраняет это пространство. Таким образом, $\hat{\Omega}_0^{s+1}$ удовлетворяет уравнению (4.26), и утверждение следует по индукции. С точностью до членов градуировки выше чем три, $\hat{\Omega}_0$ имеет следующий вид:

$$\hat{\Omega}_0 = C^\alpha \theta_\alpha - C^i p_i - C^A D_{AB} Y^B - \frac{1}{8} C^i \bar{R}_{ij;kl}^0 Y^j Y^k Y^l + \dots \quad (4.28)$$

Аналогичное утверждение справедливо как для квантовых, так и для классических БРСТ-инвариантных продолжений функций на $\mathcal{M}$, которые построены по квантовому БРСТ-заряду $\hat{\Omega}_0$ и классическому БРСТ-заряду Ω_0 , соответственно.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть $f_0(x)$ – функция на $\mathcal{M}$, а $\hat{\Omega}_0$ – БРСТ-заряд из предложения 4.3. Пусть также $f(x, Y, \hbar) \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ – единственное решение уравнения

$$[\hat{\Omega}_0, f]_* = 0 \quad (4.29)$$

с граничным условием $f|_{Y=0} = f_0$ и дополнительными условиями $\delta^* f = 0$ и $f = f(x, Y, C, \hbar)$ (см. предложение 4.1). Тогда f не зависит от Y^α . Единственное классическое БРСТ-инвариантное продолжение функции f_0 может быть получено как $f|_{\hbar=0}$ и тем самым также не зависит от Y^α .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится аналогично доказательству предложения 4.3.

Выпишем явно несколько первых членов БРСТ-инвариантного продолжения $f_0(x)$, полученного в предложении 4.4:

$$\begin{aligned} f = f_0 &+ Y^i \partial_i f_0 + \frac{1}{2} Y^i Y^j \bar{\nabla}_i^0 \bar{\nabla}_j^0 f_0 + \frac{1}{6} Y^i Y^j Y^k \bar{\nabla}_i^0 \bar{\nabla}_j^0 \bar{\nabla}_k^0 f_0 - \\ &- \frac{1}{24} C^i \bar{R}_{ij;kl}^0 Y^k Y^l D^{jm} \partial_m f_0 + \dots \end{aligned} \quad (4.30)$$

Выражение совпадает с аналогичным выражением в квантовании Федосова, с заменой пуассонова бивектора ω^{ij} на дираковский бивектор D^{ij} и симплектической связности на дираковскую связность $\bar{\Gamma}^0$.

Выбирая в качестве f_0 связь θ_α , получаем следующее выражение для БРСТ-инвариантного продолжения $\bar{\theta}_\alpha$ функции θ_α :

$$\bar{\theta}_\alpha = \theta_\alpha + Y^i \partial_i \theta_\alpha. \quad (4.31)$$

Все члены высшего порядка в разложении обращаются в нуль в силу того, что $D^{ij}\partial_j\theta_\alpha = 0$ и $\partial_j\partial_i\theta_\alpha - (\bar{\Gamma}^0)_{ij}^k\partial_k\theta_\alpha = 0$. В качестве следствия получаем:

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть $*$ -умножение $*_{\mathcal{M}}$ на $\mathcal{M}$ построено по $\hat{\Omega}_0$ из предложения 4.3. Тогда для всякой функции f_0 на $\mathcal{M}$ имеем

$$f_0 *_{\mathcal{M}} \theta_\alpha = \theta_\alpha *_{\mathcal{M}} f_0 = f_0 \theta_\alpha. \quad (4.32)$$

Из теоремы 4.3 следует, что для $*$ -умножения, построенного по $\hat{\Omega}_0$, центральная подалгебра алгебры функций относительно скобки Дирака является также центральной подалгеброй относительно соответствующего $*$ -коммутатора.

Таким образом, мы получили явную конструкцию деформационного квантования произвольной скобки Дирака на общем симплектическом многообразии, построив тем самым деформационное квантование соответствующей системы второго рода.

5. РЕДУКЦИЯ НА ПОВЕРХНОСТЬ СВЯЗЕЙ

Цель данного раздела состоит в установлении явного соответствия между схемой квантования, развитой в данной работе, и подходом, основанным на непосредственном квантовании соответствующей поверхности связей второго рода, рассматриваемой как симплектическое многообразие безотносительно к вложению в объемлющее фазовое пространство $\mathcal{M}$.

Основной результат предыдущих разделов состоит в построении квантования общей системы второго рода на пространстве $\mathcal{M}$ в терминах исходных связей θ_α и общих координат на $\mathcal{M}$. На этом пути построено $*$ -умножение для скобки Дирака на $\mathcal{M}$, которое, в свою очередь, определяет $*$ -умножение на поверхности связей Σ .

С другой стороны, можно найти квантование поверхности связей Σ как симплектического многообразия (используя, к примеру, подход Федосова). Хотя в реалистических физических моделях явная редукция на поверхность связей Σ представляет сложную задачу, полезно проследить взаимосвязь между непосредственным квантованием Σ как симплектического многообразия и развитым выше методом квантования. Замечательным образом оказывается, что этот метод воспроизводит не только федосовское $*$ -умножение на Σ , но также и все ингредиенты (включая расширенное фазовое пространство, БРСТ-заряд и БРСТ-инвариантные продолжения функций на Σ) БРСТ-формулировки федосовского квантования поверхности связей Σ . В частности, это устанавливает эквивалентность соответствующих подходов к квантованию систем со связями.

5.1. Расширенное фазовое пространство для Σ . Рассмотрим поверхность связей Σ как симплектическое многообразие с симплектической формой $\omega^\Sigma \equiv \omega|_\Sigma$. Эквивалентно соответствующая скобка Пуассона на Σ есть ограничение на Σ скобки Дирака $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$. Наделим Σ симметричной симплектической связностью $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$, являющейся ограничением дираковской связности $\bar{\Gamma}^0$ с $\mathcal{M}$ на Σ (см. п. 2.4). Рассматривая Σ как фазовое пространство системы без связей, можно применить к Σ метод квантования, развитый в разделах 3 и 4 (в этом случае данный метод сводится к методу [6], который, в свою

очередь, обеспечивает БРСТ-формулировку квантования Федосова). В соответствии с этим расширенное фазовое пространство для Σ есть

$$\mathcal{E}_\Sigma = \mathcal{T}_\omega^*(\Pi T\Sigma) \oplus T(\Pi T\Sigma), \quad (5.1)$$

которое наделено симплектической формой

$$\begin{aligned} \omega^{\mathcal{E}_\Sigma} = & \pi^*(\omega|_\Sigma) + 2 dp_a \wedge dx^a + 2 dC^a \wedge dP_a + \\ & + (\omega|_\Sigma)_{ab} dY^a \wedge dY^b + Y^a Y^b d\bar{\Gamma}_{ab}^0 - 2Y^a \bar{\Gamma}_{ab}^0 \wedge dY^b, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где на $\mathcal{E}_\Sigma$ были введены локальные координаты

$$x^a, Y^a, p_a, C^a, P_a, \quad (5.3)$$

при этом x^a суть локальные координаты на Σ , рассматриваемые как функции на $\mathcal{E}_\Sigma$, а Y^a, p_a, C^a, P_a введены в соответствии с п. 3.3. Так же как и в разделах 3 и 4, можно идентифицировать подалгебры $\hat{\mathfrak{A}}^\Sigma$ и $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$, построить квантовый БРСТ-заряд, квантовые БРСТ-наблюдаемые и найти *-умножение на Σ . Мы увидим, что все эти структуры могут быть получены путем редукции соответствующих структур, определенных на $\mathcal{E}$.

5.2. Связи на расширенном фазовом пространстве и редукция на $\mathcal{E}_\Sigma$ на классическом уровне. Ключевое наблюдение состоит в том, что имеется возможность вложить $\mathcal{E}_\Sigma$ в расширенное фазовое пространство $\mathcal{E}$, построенное в разделе 3. Действительно, предположим, что связность $\bar{\Gamma}$, определяющая симплектическую структуру $\mathcal{E}$, является специфической связностью $\bar{\Gamma}^0$, имеющей вид (3.12), и рассмотрим подмногообразие в расширенном фазовом пространстве $\mathcal{E}$, определенное следующими связями:

$$\begin{aligned} \theta_\alpha &= 0, & Y_\alpha &\equiv Y^i \partial_i \theta_\alpha = 0, \\ Y^\alpha &= 0, & p_\alpha &\equiv p_i \omega^{ij} \partial_j \theta_\alpha = 0, \\ C^\alpha &= 0, & P_\alpha &= 0, \\ C_\alpha &\equiv C^i \partial_i \theta_\alpha = 0, & P_\alpha^2 &\equiv P_i \omega^{ij} \partial_j \theta_\alpha = 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Это подмногообразие естественным образом отождествляется с $\mathcal{E}_\Sigma$. Более того, симплектическая форма (5.2) на $\mathcal{E}_\Sigma$ совпадает с ограничением на $\mathcal{E}_\Sigma$ симплектической формы $\omega^\mathcal{E}$, определенной на $\mathcal{E}$.

Удобно рассматривать $\mathcal{E}_\Sigma$ как поверхность связей второго рода в $\mathcal{E}$. Действительно, матрица скобок Пуассона связей (5.4) имеет вид

	θ_β	C_β	C^β	Y_β	Y^β	P_β	P_β^2	p_β
θ_α	0	0	0	0	0	0	0	$\Delta_{\alpha\beta}$
C_α	0	0	0	0	0	0	$\Delta_{\alpha\beta}$	.
C^α	0	0	0	0	0	δ_β^α	.	.
Y_α	0	0	0	0	$-\delta_\alpha^\beta$	.	.	.
Y^α	0	0	0	δ_β^α	.	.	.	.
P_α	0	0	δ_β^α	.	.	.	.	.
P_α^2	0	$\Delta_{\alpha\beta}$	.	.	.	.	.	.
p_α	$-\Delta_{\alpha\beta}$	.	.	.	.	.	.	.

(5.5)

где точками обозначены блоки, которые, возможно, не обращаются в нуль и явный вид которых в дальнейшем нам не понадобится. Эта матрица, очевидно, невырождена. Матрица, обратная к (5.5), имеет вид

	θ_β	$\mathcal{C}_\beta$	$\mathcal{C}^\beta$	Y_β	Y^β	$\mathcal{P}_\beta$	$\mathcal{P}_\beta^2$	p_β
θ_α	.	.	.	.	.	.	.	$-\Delta^{\alpha\beta}$
$\mathcal{C}_\alpha$	.	.	.	.	.	.	$\Delta^{\alpha\beta}$	0
$\mathcal{C}^\alpha$	.	.	.	.	.	δ_α^β	0	0
Y_α	.	.	.	.	δ_β^α	0	0	0
Y^α	.	.	.	$-\delta_\alpha^\beta$	0	0	0	0
$\mathcal{P}_\alpha$	.	.	δ_α^β	0	0	0	0	0
$\mathcal{P}_\alpha^2$	.	$\Delta^{\alpha\beta}$	0	0	0	0	0	0
p_α	$\Delta^{\alpha\beta}$	0	0	0	0	0	0	0

(5.6)

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $\{\cdot, \cdot\}_\mathcal{E}^D$ – скобка Дирака, соответствующая связям (5.4). Тогда БРСТ-заряд Ω_0 из предложения 4.3 удовлетворяет “слабому” мастер-уравнению

$$\{\Omega_0, \Omega_0\}_\mathcal{E}^D|_{\mathcal{E}_\Sigma} = 0. \quad (5.7)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем явным образом следующие члены:

$$\begin{aligned} \{\Omega_0, \theta_\alpha\}_\mathcal{E} &= \mathcal{C}^i \partial_i \theta_\alpha = \mathcal{C}_\alpha, \\ \{\Omega_0, \mathcal{C}_\alpha\}_\mathcal{E} &= 0, \\ \{\Omega_0, \mathcal{C}^\alpha\}_\mathcal{E} &= 0, \\ \{\Omega_0, Y_\alpha\}_\mathcal{E} &= -\mathcal{C}_\alpha. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Первые три равенства очевидны. Последнее равенство является следствием предложения 4.3.

Далее, из явного вида матрицы (5.6), входящей в скобку Дирака $\{\cdot, \cdot\}_\mathcal{E}^D$, следует, что всякий ненулевой член в $\{\Omega_0, \Omega_0\}_\mathcal{E}^D$ пропорционален хотя бы одной из величин (5.8) и, следовательно, обращается в нуль на $\mathcal{E}_\Sigma$.

Аналогичные аргументы приводят к следующему утверждению.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.2. Пусть функция f на $\mathcal{E}$ такая, что

$$\{\Omega_0, f\}_\mathcal{E} = 0. \quad (5.9)$$

Пусть также f удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \{f, \theta_\alpha\}_\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_\Sigma} &= 0, & \{f, Y_\alpha\}_\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_\Sigma} &= 0, \\ \{f, \mathcal{C}_\alpha\}_\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_\Sigma} &= 0, & \{f, \mathcal{C}^\alpha\}_\mathcal{E}|_{\mathcal{E}_\Sigma} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Тогда

$$\{\Omega_0, f\}_\mathcal{E}^D|_{\mathcal{E}_\Sigma} = 0. \quad (5.11)$$

В частности, если $f(x, Y)$ – единственное БРСТ-инвариантное продолжение функции $f_0(x)$, построенное согласно предложению 4.4, то f удовлетворяет (5.11).

В качестве очевидного следствия предложений 5.1 и 5.2 получаем соотношения

$$\{\Omega_\Sigma, \Omega_\Sigma\}_{\mathcal{E}_\Sigma} = 0, \quad \{\Omega_\Sigma, f_\Sigma\}_{\mathcal{E}_\Sigma} = 0, \quad (5.12)$$

где введены отдельные обозначения Ω_Σ и f_Σ для ограничений на $\mathcal{E}_\Sigma$ БРСТ-заряда Ω_0 и БРСТ-инвариантной функции f . Можно также видеть, что если функция $f = f(x, Y)$ является БРСТ-инвариантным продолжением функции $f_0(x)$, то $f_\Sigma = f|_{\mathcal{E}_\Sigma}$ является БРСТ-инвариантным (по отношению к БРСТ-заряду Ω_Σ) продолжением функции $f_0|_\Sigma$.

Таким образом, на классическом уровне наша схема воспроизводит все основные структуры БРСТ-формулировки квантования Федосова поверхности связей Σ . В частности, расширенное фазовое пространство для Σ есть $\mathcal{E}_\Sigma$, скобка Пуассона на расширенном фазовом пространстве есть ограничение на $\mathcal{E}_\Sigma$ скобки Дирака $\{\cdot, \cdot\}_\mathcal{E}^D$, БРСТ-заряд есть $\Omega_\Sigma = \Omega_0|_{\mathcal{E}_\Sigma}$, а БРСТ-инвариантное продолжение функции $f_0|_\Sigma \in C^\infty(\Sigma)$ есть ограничение $f_\Sigma = f|_{\mathcal{E}_\Sigma}$ БРСТ-инвариантного продолжения f функции $f_0 \in C^\infty(\mathcal{M})$.

5.3. Квантовая редукция и взаимосвязь с федосовским квантованием Σ .

Теперь мы собираемся показать, что результаты, аналогичные результатам п. 5.2, справедливы также и на квантовом уровне. Пусть $\hat{\mathfrak{A}}^\Sigma$ и $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$ – соответствующие подалгебры алгебры функций на $\mathcal{E}_\Sigma$, построенные для системы без связей на Σ в соответствии с п. 4.1. Пусть также символ $*_{\mathfrak{A}^\Sigma}$ обозначает квантовое умножение (см. п. 4.1) в $\hat{\mathfrak{A}}^\Sigma$ и $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$.

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $\hat{\Omega}_\Sigma$ есть ограничение на $\mathcal{E}_\Sigma$ квантового БРСТ-заряда $\hat{\Omega}_0$, полученного в предложении 4.3. Пусть также f_Σ – ограничение на $\mathcal{E}_\Sigma$ квантового БРСТ-инвариантного продолжения $f(x, Y, \hbar)$, полученного в предложении 4.4, для функции f_0 на $\mathcal{M}$. Тогда $\hat{\Omega}_\Sigma$ и f_Σ принадлежат $\hat{\mathfrak{A}}^\Sigma$ и $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$, соответственно, и удовлетворяют уравнениям

$$[\hat{\Omega}_\Sigma, \hat{\Omega}_\Sigma]_{*_{\mathfrak{A}^\Sigma}} = 0, \quad [\hat{\Omega}_\Sigma, f_\Sigma]_{*_{\mathfrak{A}^\Sigma}} = 0. \quad (5.13)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим следующее подмножество множества связей (5.4):

$$Y_\alpha \equiv Y^i \partial_i \theta_\alpha = 0, \quad Y^\alpha = 0, \quad C^\alpha = 0, \quad \mathcal{P}_\alpha = 0. \quad (5.14)$$

Эти связи также являются связями второго рода. Легко записать соответствующую скобку Дирака; не обращающиеся в нуль базисные соотношения для скобки Дирака имеют вид

$$\begin{aligned} \{x^i, p_j\}_\mathcal{E} &= \delta_j^i, & \{Y^i, Y^j\}_\mathcal{E} &= D^{ij}, \\ \{Y^j, p_i\}_\mathcal{E} &= -(\bar{\Gamma}^0)^j_{ik} Y^k, & \{C^i, \mathcal{P}_j\}_\mathcal{E} &= \delta_j^i, \\ \{p_i, p_j\}_\mathcal{E} &= \omega_{ij} + \frac{1}{2} \bar{R}^0_{ij;kl} Y^k Y^l. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Из соотношений (5.15) следует, что подалгебры $\hat{\mathfrak{A}}_0$ и $\hat{\mathfrak{A}}$ замкнуты относительно скобки Дирака (5.15). Введем вейлевское умножение $*_D$ в $\hat{\mathfrak{A}}_0$, построенное по ограничению на $\hat{\mathfrak{A}}_0$ скобки Дирака (5.15):

$$(a *_D b)(x, Y, C, \mathcal{P}, \hbar) = \exp\left(-\frac{i\hbar}{2} D^{ij} \frac{\partial}{\partial Y_1^i} \frac{\partial}{\partial Y_2^j}\right) a(x, Y_1, C, \mathcal{P}, \hbar) b(x, Y_2, C, \mathcal{P}, \hbar) \Big|_{Y_1=Y_2=Y}, \quad (5.16)$$

где $\mathcal{P}$ обозначает зависимость только от $\mathcal{P}_\alpha$.

ЛЕММА 5.1. 1. Пусть функции $f, g \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ не зависят от Y^α и $\mathcal{P}_\alpha$. Тогда

$$f *_D g = f * g, \quad (5.17)$$

где знак $*$ в правой части обозначает вейлевское умножение (4.3).

2. Для всякого $a \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ ограничение $a|_{\mathcal{E}_\Sigma}$ принадлежит $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$. Квантовое умножение $*_D$ определяет квантовое умножение в $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$, совпадающее с $*_{\mathfrak{A}^\Sigma}$:

$$(a|_{\mathcal{E}_\Sigma}) *_{{\mathfrak{A}^\Sigma}} (b|_{\mathcal{E}_\Sigma}) = (a *_D b)|_{\mathcal{E}_\Sigma}. \quad (5.18)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Нетривиальным является только утверждение 2. Легко видеть, что ограничение $f|_{\mathcal{E}_\Sigma}$ произвольного элемента $f \in \hat{\mathfrak{A}}_0$ принадлежит к $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$. Тот факт, что $*_D$ ограничивается на $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$, является следствием следующих свойств умножения $*_D$:

$$\begin{aligned} f *_D Y^\alpha &= Y^\alpha *_D f = f Y^\alpha, & f *_D Y_\alpha &= Y_\alpha *_D f = f Y_\alpha, \\ f *_D C^\alpha &= \pm C^\alpha *_D f = f C^\alpha, & f *_D C_\alpha &= \pm C_\alpha *_D f = f C_\alpha, \\ f *_D \mathcal{P}_\alpha &= \pm \mathcal{P}_\alpha *_D f = f \mathcal{P}_\alpha \end{aligned} \quad (5.19)$$

для любого $f \in \hat{\mathfrak{A}}_0$. Действительно, алгебра $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$ (как алгебра со стандартным коммутативным умножением) может быть отождествлена с фактором $\hat{\mathfrak{A}}_0$ по идеалу, порожденному (обычным коммутативным умножением) элементами $Y^\alpha, Y_\alpha, C^\alpha, C_\alpha, \mathcal{P}_\alpha \in \hat{\mathfrak{A}}_0$. Тогда свойства (5.19) означают, что этот идеал является также идеалом $\hat{\mathfrak{A}}_0$ по отношению к умножению $*_D$. Таким образом, умножение $*_D$ определяет квантовое умножение в $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$. Можно легко увидеть, что в $\hat{\mathfrak{A}}_0^\Sigma$ это умножение совпадает с $*_{\mathfrak{A}^\Sigma}$.

Перепишем теперь мастер-уравнение (4.8) для $\hat{\Omega}_0$ в федосовском виде:

$$-\delta r + \bar{\nabla}^0 r + \frac{i}{2\hbar} [r, r]_* = \bar{R}^0, \quad (5.20)$$

где

$$r = \sum_{s=3}^{\infty} \hat{\Omega}_0^s, \quad \bar{\nabla}^0 = C^i \partial_i - C^i (\bar{\Gamma}^0)_{iB}^A Y^B \frac{\partial}{\partial Y^A} \delta = C^A \frac{\partial}{\partial Y^A}, \quad (5.21)$$

$$\bar{R}^0 = \frac{1}{4} C^i C^j \bar{R}_{ij;AB}^0 Y^A Y^B = \frac{1}{4} C^i C^j \bar{R}_{ij;kl}^0 Y^k Y^l. \quad (5.22)$$

Поскольку r не зависит от Y^α , то мастер-уравнение может быть переписано эквивалентным образом через умножение $*_D$ и дираковскую связность на $\mathcal{M}$:

$$-\delta r + \left(C^i \partial_i - C^i (\bar{\Gamma}^0)_{ij}^k Y^j \frac{\partial}{\partial Y^j} \right) r + \frac{i}{2\hbar} [r, r]_{*_D} = \bar{R}^0. \quad (5.23)$$

Принимая во внимание утверждение 2 леммы 5.1, получаем

$$-\delta_\Sigma (r|_{\mathcal{E}_\Sigma}) + \bar{\nabla}^0_\Sigma (r|_{\mathcal{E}_\Sigma}) + \frac{i}{2\hbar} [r|_{\mathcal{E}_\Sigma}, r|_{\mathcal{E}_\Sigma}]_{*_{\mathfrak{A}^\Sigma}} = \bar{R}^0|_{\mathcal{E}_\Sigma}, \quad (5.24)$$

где $\bar{\nabla}^0_\Sigma$ и δ_Σ — ограничения на $\mathcal{E}_\Sigma$ для $\bar{\nabla}^0$ и δ , определенных на $\mathcal{E}$. В координатах $x^a, p_a, Y^a, C^a, \mathcal{P}_a$ на $\mathcal{E}_\Sigma$ имеем

$$\bar{\nabla}^0_\Sigma = C^a \partial_a - C^a (\bar{\Gamma}^0)_{ab}^c Y^b \frac{\partial}{\partial Y^c}, \quad \delta_\Sigma = C^a \frac{\partial}{\partial Y^a}, \quad (5.25)$$

где $(\bar{\Gamma}^0)_{ab}^c$ – коэффициенты связности $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ на Σ по отношению к координатам x^a (напомним, что дираковская связность $(\bar{\Gamma}^0)$ на $\mathcal{M}$ ограничивается на Σ).

Наконец, можно заметить, что для БРСТ-заряда

$$\hat{\Omega}_\Sigma \equiv \hat{\Omega}_0|_{\mathcal{E}_\Sigma} = -C^a p_a - C^a \omega_{ab}^\Sigma y^b + r|_{\mathcal{E}_\Sigma} \quad (5.26)$$

уравнение (5.24) влечет

$$[\hat{\Omega}_\Sigma, \hat{\Omega}_\Sigma]_{*\Sigma} = 0. \quad (5.27)$$

Аргументы, аналогичные приведенным выше, позволяют завершить доказательство утверждения.

Из доказанной теоремы следует, что *-умножение на Σ , полученное в п. 4.4 как квантовое умножение неэквивалентных квантовых наблюдаемых, может быть отождествлено с федосовским *-умножением на Σ , если симплектическая связность, входящая в скобку Пуассона на $\mathcal{E}$, является специфической симплектической связностью $\bar{\Gamma}^0$. При этом федосовское *-умножение на Σ соответствует связности $(\bar{\Gamma}^0)^\Sigma$ на Σ , полученной ограничением на Σ дираковской связности $\bar{\Gamma}^0$, определенной на $\mathcal{M}$.

6. АЛЬТЕРНАТИВНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Интересное понимание схемы квантования, предлагаемой в данной работе, обеспечивается рассмотрением симплектической формы D в векторном расслоении $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ как симплектической формы на подходящем симплектическом многообразии. А именно, рассмотрим векторное расслоение $\mathbf{V}(\mathcal{M}) = \mathcal{M} \times V$, ассоциированное со связями θ_α (см. п. 3.2). Пусть η^α – координаты на V . Векторное расслоение $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, рассматриваемое как многообразие, наделено следующей 2-формой:

$$\bar{D} = \pi^* \omega - d\theta_\alpha \wedge d\eta^\alpha. \quad (6.1)$$

Полезно выписать соответствующую матрицу:

$$\bar{D} = \begin{pmatrix} \bar{D}_{ij} & \bar{D}_{i\beta} \\ \bar{D}_{\alpha j} & \bar{D}_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_{ij} & \partial_i \theta_\beta \\ -\partial_j \theta_\alpha & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

2-форма $\bar{D}$ замкнута и невырождена, поскольку соответствующая матрица Дирака $\Delta_{\alpha\beta} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}_{\mathcal{M}}$ обратима. Вводя унифицирующее обозначение x^A для координат x^i и η^α , легко видеть, что коэффициенты $\bar{D}_{AB}$ симплектической формы $\bar{D}$ совпадают с коэффициентами симплектической формы D на слоях $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ из раздела 3 (предполагается, что коэффициенты соответствуют одним и тем же координатной системе на $\mathcal{M}$ и базису связей). На геометрическом языке это означает, что слои симплектического векторного расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ можно отождествить со слоями касательного расслоения над $\mathbf{V}(\mathcal{M})$.

Скобка Пуассона, соответствующая симплектической форме (6.1), имеет вид

$$\begin{aligned} \{x^i, x^j\}_{\mathbf{V}(\mathcal{M})} &= \omega^{ij} - \omega^{il} (\partial_l \theta_\alpha) \Delta^{\alpha\beta} (\partial_k \theta_\beta) \omega^{kj}, \\ \{x^i, \eta^\alpha\}_{\mathbf{V}(\mathcal{M})} &= -\omega^{il} (\partial_l \theta_\beta) \Delta^{\beta\alpha}, \\ \{\eta^\alpha, \eta^\beta\}_{\mathbf{V}(\mathcal{M})} &= \Delta^{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Заметим, что для не зависящих от η функций эта невырожденная скобка Пуассона совпадает со скобкой Дирака на $\mathcal{M}$, а матрица этого пуассонова бивектора совпадает с матрицей D^{AB} (3.4).

6.1. Система со связями первого рода на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Рассмотрим функции θ_α как связи на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Легко видеть, что это связи первого рода. Более того, система, определенная связями θ_α , является абелевой. Действительно,

$$\{\theta_\alpha, \theta_\beta\}_{\mathbf{V}(\mathcal{M})} = \{\theta_\alpha, \theta_\beta\}_{\mathcal{M}}^D = 0, \quad (6.4)$$

где $\{\cdot, \cdot\}_{\mathcal{M}}^D$ — скобка Дирака на $\mathcal{M}$, ассоциированная со связями θ_α . Несложный анализ показывает, что эта система первого рода эквивалентна исходной системе второго рода на $\mathcal{M}$.

Такое представление системы второго рода на $\mathcal{M}$ позволяет развить альтернативную процедуру квантования, основанную на квантовании системы первого рода на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Однако чтобы проквантовать такую систему первого рода, прежде всего необходимо найти квантование расслоения $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, рассматриваемого как симплектическое многообразие.

6.2. БРСТ-квантование $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Квантование $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ стандартно и может быть проведено с помощью схемы квантования раздела 4, примененной к системе без связей на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ (в этом случае данный подход сводится к подходу работы [6] и приводит к фредовскому $*$ -умножению на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$).

В соответствии с этой схемой необходимо фиксировать симметричную симплектическую связность в касательном расслоении $T\mathbf{V}(\mathcal{M})$. На самом деле, эта связность уже построена. Действительно, поскольку расслоение $T\mathbf{V}(\mathcal{M})$ может быть отождествлено с обратным образом расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M})$ из раздела 3 при проекции $\mathbf{V}(\mathcal{M}) \rightarrow \mathcal{M}$, то связность в $T\mathbf{V}(\mathcal{M})$ может быть получена из связности в $\mathbf{W}(\mathcal{M})$. А именно, рассмотрим связность на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, определенную как

$$\tilde{\tilde{\Gamma}}_{iB}^A = \bar{\Gamma}_{iB}^{0A}, \quad \tilde{\tilde{\Gamma}}_{\alpha B}^A = 0, \quad (6.5)$$

где коэффициенты $\bar{\Gamma}_{iB}^{0A}$ имеют вид (3.12). Можно проверить, что $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ действительно является симметричной симплектической связностью на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Заметим, что коэффициенты $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ по отношению к координатной системе x^i, η^α на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ не зависят от η^α .

Пусть $\bar{\mathcal{E}}$ — расширенное фазовое пространство системы без связей на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, которое построено в соответствии с п. 3.3. Пусть также $p_A, Y^A, \mathcal{C}^A$ и $\mathcal{P}^A$ обозначают импульсы, переменные конверсии, гостовские переменные и гостовские импульсы, соответственно. В данном случае скобка Пуассона (3.22) имеет вид

$$\begin{aligned} \{x^A, p_B\}_{\bar{\mathcal{E}}} &= \delta_B^A, & \{Y^A, Y^B\}_{\bar{\mathcal{E}}} &= \bar{D}^{AB}, \\ \{Y^A, p_B\}_{\bar{\mathcal{E}}} &= -\tilde{\tilde{\Gamma}}_{BC}^A Y^B, & \{\mathcal{C}^A, \mathcal{P}_B\}_{\bar{\mathcal{E}}} &= \delta_B^A, \\ \{p_A, p_B\}_{\bar{\mathcal{E}}} &= \bar{D}_{AB} + \frac{1}{2} \tilde{\tilde{R}}_{AB;CD} Y^C Y^D, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где $\tilde{\tilde{R}}$ обозначает кривизну связности $\tilde{\tilde{\Gamma}}$ на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$.

Специализируя конструкции раздела 4 на случай расширенного фазового пространства $\bar{\mathcal{E}}$, получаем единственный квантовый БРСТ-заряд $\widehat{\bar{\Omega}} \in \hat{\mathfrak{A}}^{\bar{\mathcal{E}}}$, удовлетворяющий соотношениям

$$[\widehat{\bar{\Omega}}, \widehat{\bar{\Omega}}]_* = 0, \quad p(\widehat{\bar{\Omega}}) = 1, \quad \text{gh}(\widehat{\bar{\Omega}}) = 1, \quad (6.7)$$

граничным условиям

$$\widehat{\bar{\Omega}}^0 = 0, \quad \widehat{\bar{\Omega}}^1 = -c^A D_{AB} Y^B, \quad \widehat{\bar{\Omega}}^2 = -c^A p_A \quad (6.8)$$

и дополнительным условиям $\widehat{\bar{\Omega}}^r \in \hat{\mathfrak{A}}_0^{\bar{\mathcal{E}}}$ и $\delta^* \widehat{\bar{\Omega}}^r = 0$ для $r \geq 3$.

Единственное квантовое БРСТ-инвариантное продолжение функции $f_0(x^A)$ есть решение уравнения

$$[\widehat{\bar{\Omega}}, f]_* = 0, \quad f|_{Y=0} = f_0, \quad f \in \hat{\mathfrak{A}}_0^{\bar{\mathcal{E}}}, \quad \text{gh}(f) = \text{gh}(f_0), \quad (6.9)$$

подчиненное дополнительному условию $\delta^* f = 0$.

Таким образом, можно найти *-умножение $*_{\mathbf{V}(\mathcal{M})}$ на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, что дает деформационное квантование скобки Пуассона (6.3) на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$. Важное наблюдение состоит в том, что $\widehat{\bar{\Omega}}^r$ не зависит от переменных η^α и p_α для $r \geq 3$. То же относится и к единственному БРСТ-инвариантному продолжению функции $f_0(x^i)$. Поскольку квантовое умножение в $\hat{\mathfrak{A}}^{\bar{\mathcal{E}}}$ очевидным образом сохраняет пространство функций, не зависящих от η^α и p_α , *-умножение $*_{\mathbf{V}(\mathcal{M})}$ сохраняет пространство не зависящих от η функций на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, определяя тем самым деформационное квантование скобки Дирака на $\mathcal{M}$. Для не зависящих от η функций $f_0(x)$ и $g_0(x)$ имеем

$$f_0 *_{\mathcal{M}} g_0 = f * g|_{Y=0} = f_0 g_0 - \frac{i\hbar}{2} \{f_0, g_0\}_{\mathcal{M}}^D + \dots, \quad (6.10)$$

где f и g обозначают единственные квантовые БРСТ-инвариантные продолжения функций f_0 и g_0 , $*$ – вейлевское умножение в $\hat{\mathfrak{A}}_0^{\bar{\mathcal{E}}}$, а многоточием обозначены члены высшего порядка по $\hbar$.

6.3. Полный БРСТ-заряд. Несмотря на то что БРСТ-заряд $\widehat{\bar{\Omega}}$, построенный выше, позволяет найти *-умножение для скобки Дирака на $\mathcal{M}$, БФВ–БРСТ-теория, определяемая $\widehat{\bar{\Omega}}$, не эквивалентна исходной системе второго рода на $\mathcal{M}$. Это связано с тем, что связи первого рода θ_α на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$ не были до сих пор приняты во внимание.

Способ включения исходных связей первого рода хорошо известен [10], [16]. Для этого необходимо найти БРСТ-инвариантное продолжение исходных связей первого рода и включить их вместе с их собственными гостовскими переменными в соответствующим образом расширенный БРСТ-заряд.

Специализируем общую конструкцию на рассматриваемый случай. Пусть $\bar{c}^\alpha$ и $\bar{p}_\alpha$ – гостовские переменные и сопряженные им импульсы, ассоциированные со связями первого рода θ_α . Тогда полный БРСТ-заряд $\widehat{\bar{\Omega}}_{\text{total}}$ имеет следующий вид:

$$\widehat{\bar{\Omega}}_{\text{total}} = \widehat{\bar{\Omega}} + \bar{c}^\alpha \bar{\theta}_\alpha = \widehat{\bar{\Omega}} + \bar{c}^\alpha \theta_\alpha + \bar{c}^\alpha Y^i \partial_i \theta_\alpha. \quad (6.11)$$

Поскольку $\bar{\theta}_\alpha$ является квантовым БРСТ-инвариантным продолжением θ_α , то БРСТ-заряд $\widehat{\bar{\Omega}}_{\text{total}}$ очевидным образом нильпотентен. Наконец, можно проверить, что $\widehat{\bar{\Omega}}_{\text{total}}$ определяет корректный спектр наблюдаемых.

6.4. Эквивалентность стандартному подходу. Чтобы завершить описание альтернативной формулировки, покажем, что $*$ -умножение (6.10) на $\mathcal{M}$ совпадает с $*$ -умножением, полученным в п. 4.5.

Заметим, что расширенное фазовое пространство $\mathcal{E}$, построенное в п. 3.3, может быть отождествлено с подмногообразием $\overline{\mathcal{E}}$, заданным уравнениями $\eta^\alpha = p_\beta = 0$. Поскольку $\widehat{\Omega}^r$ не зависят от переменных η^α и p_β для всех $r \geq 3$, они могут рассматриваться как функции на $\mathcal{E}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.1. Пусть $\widehat{\Omega}$ – единственный квантовый БРСТ-заряд системы без связей на $\mathbf{V}(\mathcal{M})$, полученный в п. 6.2, и $\widehat{\Omega}_0$ – единственный квантовый БРСТ-заряд для системы второго рода на $\mathcal{M}$, полученный в предложении 4.3. Тогда

$$\widehat{\Omega}^r = \widehat{\Omega}_0^r, \quad r \geq 3, \quad (6.12)$$

где $\widehat{\Omega}^r$ и $\widehat{\Omega}_0^r$ – соответствующие члены в разложении $\widehat{\Omega}$ и $\widehat{\Omega}_0$ по отношению к градуировке: $\deg \widehat{\Omega}_0^r = \deg \widehat{\Omega}^r = r$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение предложения может быть явно проверено для $r = 3$. Далее, предполагая, что равенство (6.12) справедливо для всех $r \leq p$, можно видеть, что соответствующие величины $\widehat{B}^p$ и $\widehat{B}^p$ (см. доказательство теоремы 4.1) действительно совпадают. Поскольку операторы δ и δ^* одни и те же в обоих случаях, получим, что $\widehat{\Omega}^{p+1} = \widehat{\Omega}_0^{p+1}$. Применение индукции завершает доказательство.

Из предложения 6.1 следует, что для произвольной функции f , зависящей только от x^i, Y^i и $\hbar$, справедливо равенство $[\widehat{\Omega}, f]_* = [\widehat{\Omega}_0, f]_*$. Это означает, что единственные БРСТ-инвариантные продолжения функций на $\mathcal{M}$, определяемые $\widehat{\Omega}$ и $\widehat{\Omega}_0$, действительно совпадают. В свою очередь, это приводит к тому, что $*$ -умножение (6.10) на $\mathcal{M}$ совпадает с $*$ -умножением, полученным в п. 4.5 с использованием БРСТ-заряда $\widehat{\Omega}_0$.

В качестве заключительного замечания отметим, что данное утверждение об эквивалентности может быть обобщено на случай, когда связность $\overline{\Gamma}$, входящая в симплектическую структуру на $\mathcal{E}$, есть произвольная симплектическая связность на $\mathbf{W}(\mathcal{M})$. В этом случае, однако, необходимо наделять $T\mathbf{V}(\mathcal{M})$ симметричной симплектической связностью, надлежащим образом построенной по связности $\overline{\Gamma}$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Суммируем результаты данной работы. Для системы со связями второго рода на произвольном симплектическом многообразии $\mathcal{M}$ построена эффективная система со связями первого рода (калибровочная система), эквивалентная исходной системе второго рода. Конструкция основывается на представлении симплектического многообразия как поверхности связей второго рода в кокасательном расслоении $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$, наделенном модифицированной симплектической структурой. Система второго рода на $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$, определенная связями, задающими вложение $\mathcal{M}$ в $\mathcal{T}_\omega^* \mathcal{M}$, и исходными связями второго рода, конвертирована в эффективную систему первого рода с помощью глобально-определенной формы стандартной процедуры конверсии. А именно, переменные конверсии вводятся как координаты на слоях векторного расслоения $\mathbf{W}(\mathcal{M}) = T\mathcal{M} \oplus \mathbf{V}(\mathcal{M})$,

которое ассоциировано с полным набором связей и наделено симплектической структурой, являющейся соответствующей матрицей Дирака. Фазовое пространство эффективной системы наделено специфической симплектической структурой, построенной с помощью симплектической связности на $\mathbf{W}(\mathcal{M})$. Представлен явный вид частной симплектической связности на $\mathbf{W}(\mathcal{M})$, которая в некотором смысле является минимальной. Замечательно, что эта связность ограничивается до дираковской связности на $\mathcal{M}$, т.е. симметричной связности, согласованной со скобкой Дирака на $\mathcal{M}$.

Построенная таким образом эффективная калибровочная система проквантована с помощью БФВ–БРСТ-процедуры. Соответствующая алгебра квантовых БРСТ-наблюдаемых явно построена, и *-умножение для скобки Дирака на $\mathcal{M}$ получено как квантовое умножение БРСТ-наблюдаемых.

В случае, когда эффективная калибровочная система построена с использованием частной (дираковской) связности, показано, что исходные связи второго рода принадлежат центру соответствующей алгебры относительно *-коммутатора. Также показано, что будучи ограниченным на поверхность связей, такое *-умножение совпадает с федосовским *-умножением, построенным по ограничению дираковской связности на поверхность связей.

Предложенный метод квантования является конструктивным, обладает явной ковариантностью в фазовом пространстве (т.е. ковариантностью по отношению к заменам локальных координат на фазовом пространстве) и не требует решения уравнений связей (что в физически содержательных теориях, как правило, неосуществимо). Интересной задачей является построение обобщения этого метода, обладающего также ковариантностью относительно замены базиса связей.

Благодарности. Мы хотим поблагодарить В. А. Долгушева, А. В. Карабегова, Р. Марнелиуса, А. М. Семихатова, А. А. Шарашова, И. Ю. Типунина и И. В. Тютина за обсуждение различных вопросов, касающихся тематики этой работы. Работа поддержана грантом INTAS-00-262. И. А. Б. признателен РФФИ за частичную поддержку работы грантом № 99-01-00980. Работа М. А. Г. частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-01155, грантом Президента Российской Федерации № 99-15-96037 и грантом Ландау. Работа С. Л. Л. частично поддержана грантом РФФИ № 00-02-17956 и грантом Министерства образования РФ № Е-00-33-184.

Список литературы

- [1] *Ф. А. Березин.* Изв. РАН. Сер. матем. 1974. Т. 38. С. 1116.
- [2] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz, and D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61.
- [3] *M. De Wilde and P. B. A. Lecomte.* Lett. Math. Phys. 1983. V. 7. P. 487.
- [4] *B. V. Fedosov.* J. Diff. Geom. 1994. V. 40. P. 213.
- [5] *B. Fedosov.* Deformation Quantization and Index Theory. Berlin: Akademie, 1996.
- [6] *M. A. Grigoriev and S. L. Lyakhovich.* Commun. Math. Phys., 2001. V. 218. № 2. P. 437; hep-th/0003114.
- [7] *I. A. Batalin and G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1977. V. 69. P. 309; *E. S. Fradkin and G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1975. V. 55. P. 224; *I. A. Batalin and E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1983. V. 122. P. 157; Phys. Lett. B. 1983. V. 128. P. 303; Ann. Inst. Henri Poincaré. 1988. V. 49. P. 145.

- [8] *M. Henneaux and C. Teitelboim.* Quantization of Gauge Systems. Princeton: Univ. Press, 1992.
- [9] *I. A. Batalin and E. S. Fradkin.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 326. P. 701.
- [10] *I. A. Batalin, E. S. Fradkin, and T. E. Fradkina.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 332. P. 723.
- [11] *M. Kontsevich.* Deformation quantization of Poisson manifolds. I. q-alg/9709040.
- [12] *A. S. Cattaneo and G. Felder.* A path integral approach to the Kontsevich quantization formula. q-alg/9902090.
- [13] *A. S. Cattaneo, G. Felder, and L. Tomassini.* From local to global deformation quantization of Poisson manifolds. q-alg/0012228.
- [14] *I. Gelfand, V. Retakh, and M. Shubin.* Fedosov Manifolds. dg-ga/9707024.
- [15] *I. A. Batalin and E. S. Fradkin.* Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 157.
- [16] *I. A. Batalin and I. V. Tyutin.* Int. J. Mod. Phys. A. 1991. V. 6. P. 3255.
- [17] *E. S. Fradkin and V. Y. Linetsky.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 431. P. 569; Nucl. Phys. B. 1995. V. 444. P. 577.
- [18] *I. A. Batalin and E. S. Fradkin.* Nucl. Phys. B. 1987. V. 279. P. 514.

Поступила в редакцию 3.V.2001 г.