Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Брийе, В. А. Рубаков, Ф. Циммершид, Т. Чракян, Простая модель монопольного катализа распада нуклона, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 361–377

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf501>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 17:36:39

© 2001 г. И. Бриёе*, В. А. Рубаков†, Ф. Циммершид‡, Т. Чракян§

ПРОСТАЯ МОДЕЛЬ МОНОПОЛЬНОГО КАТАЛИЗА РАСПАДА НУКЛОНА

Представлена простая модель, в которой нуклон рассматривается как скирмион, причем и монополь, и скирмион представляют собой гладкие решения классических полевых уравнений, а несохранение барионного числа, обусловленное классическим аналогом треугольной аномалии, явным образом встроено в теорию, и нет необходимости рассмотрения лептонов. С помощью численного анализа показано, что не существует статических классических решений с ненулевым барионным числом в присутствии монополя, т.е. что монополярный катализ скирмионного распада действительно происходит классическим образом.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интересное свойство магнитных монополей в калибровочных теориях заключается в том, что они могут осуществлять катализ распада нуклона с интенсивностью на уровне сильных взаимодействий [1], [2]. Однако задача конкретного расчета сечения монополярного катализа остается нерешенной. Такой расчет должен учитывать два различных типа физики больших расстояний – взаимодействие кварк–монополь и эффекты КХД, а также явления, происходящие на малых расстояниях и ответственные за несохранение барионного числа. Большинство соответствующих эффектов являются непертурбативными, что делает сложным даже полукачественное вычисление.

Подход к решению данной задачи был предложен в работе [3]. Было предложено применить нуклонную модель Скирма [4], которая действительно достаточно хорошо работает при описании низкоэнергетических свойств барионов [5], [6]. В модели Скирма нуклон является, по существу, объектом классической теории поля – солитоном. Поскольку монополь 'т Хофта–Полякова также является солитоном, монополь-нуклонное взаимодействие можно описывать на уровне классической теории поля.

В подходе работы [3] монополь рассматривается как точечный объект. Несохраниение барионного числа учитывается посредством граничных условий, которые наклады-

*Physique-Mathématique, Université de Mons-Hainaut, Mons, Belgium

†Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия

‡Fachbereich Physik, Universität Kaiserslautern, Kaiserslautern, Germany

§Mathematical Physics, National University of Ireland Maynooth (NUIM), Maynooth, Co. Kildare, Ireland

ваются на поле Скирма в центре монополя, т.е. в точке сингулярности. Не до конца очевидно, действительно ли конкретные механизмы несохранения барионного числа порождают предполагаемое граничное условие в пределе, когда размер монополя стремится к нулю. Кроме того, при численных расчетах может оказаться, что иметь дело с сингулярностью и граничными условиями, накладываемыми в этой сингулярности, неудобно. Еще одно усложнение, присущее подходу [3], возникает из-за того, что сферически-симметричное поле Скирма на фоне монополя соответствует электрически заряженному объекту (“протону”); поэтому чтобы нарушение барионного числа не противоречило закону сохранения электрического заряда, требуется вводить в рассмотрение лептоны.

В настоящей работе мы предлагаем упрощенную модель, в которой как монополь, так и скирмион являются гладкими решениями классических полевых уравнений, несохранение барионного числа явно встроено в теорию и является результатом классического аналога [7], [8] треугольной аномалии и нет необходимости включать в рассмотрение лептоны. Это достигается ценой того, что поле Скирма в присутствии монополя не несет электрического заряда; из-за этого наша модель скорее соответствует катализированному монополем распаду нейтрона, чем распаду протона.

Мы сосредоточимся на двух аспектах нашей модели. Во-первых, мы выясним, происходит ли несохранение барионного числа без подавления, на классическом уровне. Для этого нам необходимо рассмотреть область вблизи ядра монополя. Конечно, использовать нелинейную сигма-модель для описания физики вблизи ядра нереалистично, однако этот шаг неизбежен при классическом расчете монополярного катализа. Путем численного анализа мы покажем, что независимо от размера ядра монополя не существует состояний с ненулевым барионным числом в присутствии монополя ’т Хофта–Полякова, т.е. что монополярный катализ нуклонного распада действительно имеет место.

Во-вторых, мы найдем, что режим “точечного” монополя устанавливается, когда два масштаба, соответствующие размерам и массам монополя и скирмиона, различаются не слишком сильно: наши результаты являются устойчивыми, когда отношение размеров монополя и скирмиона меньше 0.03, а отношение масс меньше 1. Это удачное свойство модели с точки зрения будущего численного анализа скирмионного распада в скирмион-монополярных столкновениях. Таким образом, наша модель может представлять собой разумную исходную точку для полуреалистического вычисления сечения монополярного катализа.

Настоящая работа построена следующим образом. Наша модель представлена в разделе 2. Свойства монополя и скирмиона напоминаются в разделе 3. Основные результаты, как аналитические, так и численные, представлены в разделе 4. В разделе 5 сформулированы заключительные замечания.

2. МОДЕЛЬ

Напомним сначала, что простейшая теория, включающая скирмионы, имеет $SU(2)_L \times SU(2)_R$ глобальную симметрию и содержит сигма-поле $U(x)$ со значениями в $SU(2)$. Мы хотим ввести несохранение барионного числа через классическую аномалию в барионном токе. Барионное число аномально, если $SU(2)_L$ или $SU(2)_R$, или обе

эти группы калибровочные. Модель должна также обладать магнитными монополями; если не расширять группу симметрии, монополи должны быть связаны с калибровочной частью $SU(2)_L \times SU(2)_R$. Сделать калибровочной только группу $SU(2)_L$ недостаточно: в этом случае поле Скирма полностью нарушит калибровочную группу, не останется ненарушенной никакой электромагнитной подгруппы $U(1)$ и не возникнет магнитных монополей. Поэтому мы приходим к полностью локальной группе $SU(2)_L \times SU(2)_R$ с калибровочными потенциалами

$$\begin{aligned} SU(2)_L : & A_\mu, \\ SU(2)_R : & B_\mu. \end{aligned}$$

Реалистические монополи имеют очень малый размер. Поэтому надо нарушить неабелеву симметрию до абелевой подгруппы при высоких энергиях. В связи с этим мы вводим два хиггсовых триплета Φ_A и Φ_B соответственно в $(\mathbf{3}, \mathbf{1})$ - и $(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ -представлениях. Они нарушают $SU(2)_L \times SU(2)_R$ до $U(1)_L \times U(1)_R$. Электромагнитная группа является векторной подгруппой в $U(1)_L \times U(1)_R$; поэтому в некоторый момент следует нарушить аксиальную группу $U(1)$. Для простоты рассмотрим минимальную возможность, т.е. не будем вводить дополнительные поля Хиггса. Тогда аксиальная группа $U(1)$ нарушена самим полем Скирма. Существование относительно дальнего действия аксиального калибровочного поля является нереалистичной чертой нашей модели, однако в данной работе мы будем исследовать динамику вблизи ядра монополя, а поэтому неважно, является ли аксиальная группа $U(1)$ в самом деле дальнедействующей. Нетрудно обобщить нашу модель, введя еще одно поле Хиггса, которое нарушает аксиальную группу $U(1)$, но не электромагнитную подгруппу.

В итоге наша модель имеет $SU(2)_L \times SU(2)_R$ калибровочную симметрию с полем Скирма и двумя полями Хиггса в представлениях

$$\begin{aligned} U &\in SU(2), \quad U : (\mathbf{2}, \bar{\mathbf{2}}), \\ \Phi_A & : (\mathbf{3}, \mathbf{1}), \\ \Phi_B & : (\mathbf{1}, \mathbf{3}). \end{aligned}$$

Для упрощения вычислений возьмем калибровочные константы, константы хиггсова самодействия и вакуумные средние поля Хиггса одинаковыми в левом и правом секторах:

$$g_A = g_B \equiv g, \quad \lambda_A = \lambda_B \equiv \lambda, \quad v_A = v_B \equiv v.$$

Действие этой модели имеет вид

$$\begin{aligned} S = & \int d^4x \left[-\frac{1}{2g^2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}^2) - \frac{1}{2g^2} \text{Tr}(G_{\mu\nu}^2) \right] - \\ & - \int d^4x \left[\frac{1}{2} \text{Tr}(D_\mu \Phi_A)^2 + \frac{1}{2} \text{Tr}(D_\mu \Phi_B)^2 \right] - \\ & - \int d^4x \left[\frac{\lambda}{8} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi_A^2) + v^2 \right)^2 + \frac{\lambda}{8} \left(\frac{1}{2} \text{Tr}(\Phi_B^2) + v^2 \right)^2 \right] + \\ & + \int d^4x \left[-\frac{F_\pi^2}{16} \text{Tr}(U^\dagger D_\mu U)^2 + \frac{1}{32e^2} \text{Tr}([U^\dagger D_\mu U, U^\dagger D_\nu U]^2) \right] + \Gamma_{\text{ВЗВ}}, \quad (1) \end{aligned}$$

где $F_{\mu\nu}$ и $G_{\mu\nu}$ – напряженности полей A_μ и B_μ , Φ_A и Φ_B – (2×2) -матрицы из соответствующих алгебр $SU(2)_L$ и $SU(2)_R$,

$$\begin{aligned} D_\mu U &= \partial_\mu U + A_\mu U - U B_\mu, \\ D_\mu \Phi_A &= \partial_\mu \Phi_A + [A_\mu, \Phi_A], \\ D_\mu \Phi_B &= \partial_\mu \Phi_B + [B_\mu, \Phi_B], \end{aligned}$$

а F_π и e – соответственно константа распада пиона и постоянная Скирма. Последний член в (1) – член Весса–Зумино–Виттена (ВЗВ) – введен с целью учета аномалий [7]. В отличие от подхода работы [3], на нашей модели этот член почти не сказывается. Мы пренебрегаем им в большей части статьи и обсуждаем его эффект в конце работы.

В полном согласии с работами [7], [8] калибровочно-инвариантный барионный ток равен

$$\begin{aligned} j_\mu &= \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(U^\dagger D_\nu U D_\rho U^\dagger D_\sigma U) + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(F_{\rho\sigma} D_\nu U U^\dagger + G_{\rho\sigma} U^\dagger D_\nu U). \end{aligned} \quad (2)$$

В отсутствие калибровочного поля, $A_\mu = B_\mu = 0$, этот ток сводится к топологическому току

$$k_\mu = \frac{1}{24\pi^2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}(U^\dagger \partial_\nu U \partial_\rho U^\dagger \partial_\sigma U),$$

тогда как в присутствии калибровочного поля он имеет аномалию:

$$\partial_\mu j_\mu = \frac{1}{16\pi^2} \text{Tr}(\tilde{F}_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \tilde{G}_{\mu\nu} G_{\mu\nu}).$$

Топологически нетривиальные калибровочные поля приводят, таким образом, к несохранению барионного числа; в частности, они могут топологически раскрутить скирмион (ср. [8]–[10]).

3. МОНОПОЛЬ И СКИРМИОН

В отсутствие поля Скирма U левый и правый секторы этой модели отщепились бы друг от друга, модель свелась бы к двум тождественным экземплярам $SU(2)$ -модели Джорджи–Глэшоу и существовало бы два типа монополей 'т Хофта–Полякова. В присутствии поля Скирма аксиальная группа $U(1)$ нарушена и существует только один тип монополей. Для монопольного решения с нулевым барионным числом имеем $U(\mathbf{x}) = 1$ во всем пространстве, тогда как $A_i(\mathbf{x}) = B_i(\mathbf{x})$ и $\Phi_A(\mathbf{x}) = \Phi_B(\mathbf{x})$ являются в точности монопольными полями модели Джорджи–Глэшоу. Размер монополя определяется массой векторных бозонов; при $v \gg F_\pi$ имеем $m_V = 2gv$, а потому

$$r_{\text{mon}} = \frac{1}{2gv}. \quad (3)$$

При больших v масса монополя равна удвоенной массе $SU(2)$ -монополя, т.е.

$$M_{\text{mon}} = 4\pi D_{\text{mon}} \frac{v}{g}, \quad (4)$$

где численная константа $D_{\text{мон}}$ слабо зависит от λ/g^2 и равна [11]

$$D_{\text{мон}}\left(\frac{\lambda}{g^2}\right) \approx 2.4 \quad (5)$$

при $\lambda/g^2 = 0.5$. Оценки (3)–(5) служат опорными точками в нашем исследовании монополь-скирмионной системы.

В режиме слабой калибровочной связи в модели имеется скирмион. Если не учитывать калибровочные поля, он становится стандартным скирмионом в $SU(2)$ сигма-модели. Его радиус, определенный в работе [5], составляет

$$r_{\text{Sk}} = \frac{2.1}{eF_\pi},$$

а его масса –

$$M_{\text{Sk}} = 4\pi D_{\text{Sk}} \frac{F_\pi}{e}, \quad D_{\text{Sk}} \approx 2.9. \quad (6)$$

Для того чтобы в дальнейшем воспроизвести ситуацию, существующую в теориях Большого объединения, мы будем рассматривать главным образом такую область параметров, в которой отношения $r_{\text{мон}}/r_{\text{Sk}}$ и $M_{\text{Sk}}/M_{\text{мон}}$ малы.

4. ИСЧЕЗАЮЩЕЕ БАРИОННОЕ ЧИСЛО

Нашей основной целью является рассмотрение конфигураций с ненулевым барионным числом в присутствии монополя. Мы увидим, что барионное число не обязательно должно быть целочисленным и что не существует статических классических решений с ненулевым барионным числом. Метод, применяемый в такой ситуации, стандартен [12], [10], [13]: наложим связь, обеспечивающую ненулевое значение барионного числа, найдем статическое классическое решение системы со связью и исследуем поведение энергии как функции барионного числа.

4.1. Сферически-симметричный анзац. Будем искать сферически-симметричные решения системы со связью. Чтобы записать анзац, заметим, что действие (1) инвариантно относительно пространственного отражения $x^0 \rightarrow x^0$, $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$, производимого вместе с перестановкой левой и правой групп $SU(2)$, т.е.

$$\begin{aligned} A_0 &\leftrightarrow B_0, & A_i &\rightarrow -B_i, & B_i &\rightarrow -A_i, \\ \Phi_A &\rightarrow -\Phi_B, & \Phi_B &\rightarrow -\Phi_A, & U &\rightarrow U^\dagger. \end{aligned} \quad (7)$$

В случае статического поля при $A_0 = B_0 = 0$ наиболее общий сферически-симметричный анзац, согласованный с этой дискретной симметрией¹⁾, имеет вид

$$\begin{aligned} A_i &= -\frac{i}{2} \left[\frac{a_1(r)-1}{r} \varepsilon_{ijk} \sigma_j \hat{x}_k + \frac{a_2(r)}{r} (\sigma_i - \hat{x}_i \hat{x} \cdot \vec{\sigma}) + \frac{a_3(r)}{r} \hat{x}_i \hat{x} \cdot \vec{\sigma} \right], \\ B_i &= -\frac{i}{2} \left[\frac{a_1(r)-1}{r} \varepsilon_{ijk} \sigma_j \hat{x}_k - \frac{a_2(r)}{r} (\sigma_i - \hat{x}_i \hat{x} \cdot \vec{\sigma}) - \frac{a_3(r)}{r} \hat{x}_i \hat{x} \cdot \vec{\sigma} \right], \\ \Phi_A &= \Phi_B = i v h(r) \hat{x} \cdot \vec{\sigma}, & U &= \cos f(r) + i \hat{x} \cdot \vec{\sigma} \sin f(r), \end{aligned} \quad (8)$$

¹⁾При численном анализе мы использовали наиболее общий сферически-симметричный анзац без наложения симметрии (7). Однако при этом оказалось, что решения всегда имеют эту симметрию.

где $\hat{x}$ – единичный радиус-вектор. При таком анзаце регулярность поля Скирма в начале координат требует, чтобы значение $f(0)$ было кратным π ; без потери общности положим $f(0) = \pi$. Другие условия, обеспечивающие регулярность полей в начале координат, имеют вид

$$a_1(0) = 1, \quad a_2(0) = a_3(0) = 0, \quad h(0) = 0.$$

Удобно ввести безразмерную координату $\rho = gvr$. Тогда расстояния измеряются, по существу, в единицах размера ядра монополя. Статический функционал энергии при этом записывается (в пренебрежении членом ВЗВ в формуле (1)) как

$$\begin{aligned} H &= \frac{4\pi v}{g} \int d\rho \mathcal{E}(\rho), \\ \mathcal{E} &= \left[\left(a_1' + \frac{a_2 a_3}{\rho} \right)^2 + \left(a_2' - \frac{a_1 a_3}{\rho} \right)^2 + \frac{1}{2\rho^2} (a_1^2 + a_2^2 - 1)^2 \right] + \\ &+ 2 \left[\rho^2 (h')^2 + 2(a_1^2 + a_2^2)h^2 + \frac{\lambda}{4g^2} \rho^2 (h^2 - 1)^2 \right] + \\ &+ \kappa_1 (X^2 + 2Y^2) + \frac{4\kappa_2}{\rho^2} Y^2 (2X^2 + Y^2), \end{aligned} \quad (9)$$

где штрих обозначает производную по ρ ,

$$X = \rho f' - a_3, \quad Y = a_1 \sin f - a_2 \cos f \quad (10)$$

и введены безразмерные параметры

$$\kappa_1 = \frac{F_\pi^2}{8v^2}, \quad \kappa_2 = \frac{g^2}{64e^2}. \quad (11)$$

Заметим, что в терминах этих параметров отношения размеров и масс монополя и скирмиона, даваемых формулами (3)–(6), равны

$$\frac{r_{\text{mon}}}{r_{\text{Sk}}} = 0.084 \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}}, \quad \frac{M_{\text{Sk}}}{M_{\text{mon}}} = 27 \sqrt{\kappa_1 \kappa_2}, \quad (12)$$

где для определенности положено $\lambda = 0.5g^2$. Эти отношения должны быть малыми в пределе точечного монополя.

Функционал энергии (9) по-прежнему инвариантен относительно радиальных калибровочных преобразований, которые сдвигают $f(\rho)$ и $a_3(\rho)$ следующим образом:

$$f(\rho) \rightarrow f(\rho) + \alpha(\rho), \quad a_3(\rho) \rightarrow a_3(\rho) + \rho \partial_\rho \alpha(\rho), \quad (13)$$

и вращают (a_1, a_2) . Эта калибровочная симметрия является остаточной от аксиальной $U(1)$ -симметрии (калибровочная инвариантность относительно векторной симметрии $U(1)$ фиксирована требованием симметрии (7)). Мы вскоре фиксируем остающийся калибровочный произвол.

Из равенств (9) и (10) немедленно следует, что в отсутствие монополя, т.е. когда $a_1(\infty) = 1$ и $a_2(\infty) = 0$, сходимость пропорционального Y^2 члена в интеграле энергии

требует, чтобы значение $f(\infty)$ было кратным π . Это означает, что топологическое число поля Скирма является целочисленным, а потому сохраняющимся. С другой стороны, в присутствии монополя имеем $a_1(\infty) = a_2(\infty) = 0$, и сходимость энергии не накладывает никаких связей на $f(\infty)$. В присутствии монополя топологическое число поля Скирма произвольно.

Для сферически-симметричного поля калибровочно-инвариантное барионное число принимает вид

$$B = \int_0^\infty d\rho b(\rho),$$

$$b(\rho) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{d\rho} \left[-f + \frac{1}{2}(a_1^2 - a_2^2) \sin 2f - a_1 a_2 \cos 2f \right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \left[(a_1 a_2' - a_1' a_2) - \frac{a_3}{\rho} (a_1^2 + a_2^2 - 1) \right]. \quad (14)$$

Как и топологическое число поля Скирма, барионное число также может быть нецелым.

4.2. Система со связью. При рассмотрении конфигураций с ненулевым барионным числом было бы естественно наложить связь, включающую барионное число, например считать, что значение B из (14) фиксировано. Однако мы выберем несколько иную связь, которая упрощает уравнения. Заметим сначала, что одно из уравнений Эйлера–Лагранжа, следующих из соотношений (9), а именно уравнение

$$\rho \frac{\delta H}{\delta a_3} = 0, \quad (15)$$

не содержит вторых производных. В действительности это уравнение не является полностью независимым: его производная по ρ есть следствие других уравнений Эйлера–Лагранжа (подобно производной по времени от закона Гаусса). Если значение $\delta H / \delta a_3$ равно нулю при одном значении ρ , то оно равно нулю всюду, если только выполнены уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка. Идея состоит в том, чтобы наложить связь, которая изменила бы получающиеся уравнения так, чтобы левая часть уравнения (15) могла быть ненулевой константой при том, что уравнения второго порядка остались бы неизменными. Подходящим видом такой связи является условие, что фиксирована величина

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho \left(f' - \frac{a_3}{\rho} \right). \quad (16)$$

Действительно, добавляя эту связь с лагранжевым множителем Λ к гамильтониану (9), находим, что единственное изменение в получающихся уравнениях состоит в том, что равенство (15) принимает вид

$$\rho \frac{\delta H}{\delta a_3} + \frac{\Lambda}{\pi} = 0. \quad (17)$$

Последующая процедура состоит в том, чтобы вообще не учитывать последнее уравнение, решить исходные уравнения Эйлера–Лагранжа второго порядка и найти Λ из уравнения (17) (последний шаг не является необходимым).

Заметим, что наложенная связь инвариантна относительно калибровочных преобразований (13). В действительности эту связь можно записать в полностью калибровочно-инвариантном виде, поскольку

$$f' - \frac{a_3}{\rho} \propto \hat{x}_i \operatorname{Tr} \left(\frac{\Phi_A}{|\Phi_A|} D_i U U^\dagger \right).$$

Заметим еще, что выражение (16) совпадает с выражением для барионного числа (14), за исключением членов в последнем, содержащих a_1 и a_2 . Это указывает на то, что условие фиксации выражения (16) должно приводить к ненулевому барионному числу (действительно, ниже мы увидим, что интеграл (16) дает очень хорошее приближение к барионному числу).

Тот факт, что нам больше не надо рассматривать вариации a_3 , значительно упрощает анализ. Теперь можно наложить калибровочное условие $a_3 = 0$ непосредственно в гамильтониане. Задача, таким образом, сводится к решению уравнений Эйлера–Лагранжа, следующих из функционала

$$\begin{aligned} \tilde{H} \equiv H|_{a_3=0} &= \frac{4\pi v}{g} \int d\rho \tilde{\mathcal{E}}(\rho), \\ \tilde{\mathcal{E}} &= \left[(a'_1)^2 + (a'_2)^2 + \frac{1}{2\rho^2} (a_1^2 + a_2^2 - 1)^2 \right] + \\ &+ 2 \left[\rho^2 (h')^2 + 2(a_1^2 + a_2^2)h^2 + \frac{\lambda}{4g^2} \rho^2 (h^2 - 1)^2 \right] + \\ &+ \kappa_1 (\rho^2 (f')^2 + 2Y^2) + \frac{4\kappa_2}{\rho^2} Y^2 (2\rho^2 (f')^2 + Y^2), \end{aligned} \quad (18)$$

где Y определяется в (10). Все эти уравнения имеют второй порядок. Их вид не слишком многое проясняет, и мы не будем воспроизводить все эти уравнения. Запишем только уравнение, полученное вариацией $\tilde{H}$ по f :

$$\frac{\partial}{\partial \rho} \left[(\kappa_1 \rho^2 + 8\kappa_2 Y^2) f' \right] = 2 \left[\kappa_1 + 4\kappa_2 (f')^2 + 4 \frac{\kappa_2}{\rho^2} Y^2 \right] (a_1 \cos f + a_2 \sin f) Y. \quad (19)$$

Очевидно, что a_1 и a_2 экспоненциально спадают при больших ρ :

$$a_1, a_2 \propto C e^{-2\rho} + C' e^{-\sqrt{4+2\kappa_1}\rho}.$$

Отсюда следует, что вне ядра монополя уравнение (19) принимает вид

$$(\rho^2 f')' = 0,$$

и его решение есть

$$f(\rho) = f_\infty + \frac{c_f}{\rho}, \quad (20)$$

где f_∞ и c_f – константы. В действительности только асимптотическое значение f_∞ является свободным параметром (при заданных κ_1 и κ_2); постоянная c_f является функцией f_∞ для решений полной системы.

Итак, система уравнений Эйлера–Лагранжа, соответствующих функционалу (18), допускает однопараметрическое семейство решений, параметризованных асимптотическими значениями f_∞ . Барионное число и энергия для решений определяются величиной f_∞ .

4.3. Численные результаты. Мы численно получили семейства решений при различных значениях κ_1 и κ_2 и вычислили их энергии и барионные числа. Представим наши результаты для фиксированного значения хиггсова самодействия $\lambda/g^2 = 0.5$. С хорошей точностью барионное число является линейной функцией f_∞ : согласно соотношению (14) в калибровке $a_3 = 0$ имеем

$$B = \frac{\pi - f_\infty}{\pi} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\rho (a_1 a'_2 - a'_1 a_2). \quad (21)$$

Последний интеграл здесь мал; его свойства обсуждаются ниже.

Наш первый результат состоит в том, что энергия всегда является монотонной функцией барионного числа. Это показано на рис. 1 для трех наборов параметров (κ_1, κ_2) . Тем самым не существует статических решений с ненулевым барионным числом в присутствии монополя.

Рис. 1. Энергия (отсчитываемая от массы монополя и выраженная в единицах массы скирмиона) в зависимости от барионного числа для $\kappa_2 = 0.1$ и $\kappa_1 = 0.01$ (сплошная линия), $\kappa_1 = 0.001$ (штриховая линия), $\kappa_1 = 0.0001$ (пунктирная линия).

Заметим, что третий набор параметров, $\kappa_1 = 10^{-4}$ и $\kappa_2 = 0.1$, соответствует очень малому размеру ядра монополя по сравнению с размером скирмиона, $r_{\text{mon}}/r_{\text{Sk}} = 2.7 \cdot 10^{-3}$. Естественно ожидать, что в этом случае реализуется режим “точечного” монополя. Обсудим это подробнее с целью оценки области изменений параметров, при которых устанавливается этот режим.

Нас интересует ситуация, когда монополь является малым и тяжелым:

$$\frac{r_{\text{mon}}}{r_{\text{Sk}}} \ll 1, \quad \frac{M_{\text{mon}}}{M_{\text{Sk}}} \gg 1.$$

Такая ситуация возникает при малых значениях κ_1/κ_2 и $\kappa_1\kappa_2$ (см. формулы (12)). В этом случае поле Скирма не влияет на ядро монополя, т.е. профили $a_1(\rho)$ и $h(\rho)$ совпадают с неискаженными профилями монополя (и потому не зависят от барионного числа), тогда как $a_2(\rho)$ мало. Первые два члена в выражении (18) тогда несущественны, и свойства радиального поля Скирма f определяются функционалом энергии

$$(E - M_{\text{mon}})[f] = 4\pi \frac{F_\pi}{\sqrt{512}e} \int d\rho (\tilde{\mathcal{E}} - \tilde{\mathcal{E}}_{\text{mon}})(\rho),$$

$$\tilde{\mathcal{E}} - \tilde{\mathcal{E}}_{\text{mon}} = \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} [\rho^2 (f')^2 + 2Y^2] + 4\sqrt{\frac{\kappa_2}{\kappa_1}} \frac{Y^2}{\rho^2} [2\rho^2 (f')^2 + Y^2], \quad (22)$$

где мы использовали соотношения (11). Поля a_1 и h в этом выражении являются *спектаторами* (они соответствуют неискаженному монополю). Именно это мы подразумеваем под режимом “точечного” монополя. В некотором смысле монополь никогда не является точечным, потому что его ядро влияет на асимптотическое поведение радиального поля Скирма (это свойство обсуждается ниже). Поэтому правильнее говорить о *монополе-спектаторе*.

Имеется несколько свойств режима монополя-спектатора, которые можно использовать для оценки области изменения параметров, где он в самом деле реализуется:

1. Профили a_1 и h должны совпадать с неискаженными профилями монополя.
2. Профиль $f(\rho)$ должен зависеть от *отношения* κ_1/κ_2 , а не от общей амплитуды величин $\kappa_{1,2}$; в частности, при фиксированном значении f_∞ второй асимптотический коэффициент c_f в (20) должен зависеть только от κ_1/κ_2 (это следует из выражения (22)).
3. Барионное число должно равняться $(\pi - f_\infty)/\pi$ (это следует из соотношения (21) и $a_2 = 0$).
4. Энергия, отсчитываемая от массы монополя и выраженная в единицах скирмионной массы, должна зависеть только от барионного числа и *отношения* κ_1/κ_2 ,

$$\frac{E - M_{\text{mon}}}{M_{\text{Sk}}} = \Delta E \left(B, \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right)$$

(это снова следует из выражения (22)).

Свойства 2–4 проиллюстрированы на рис. 2–4. Свойство 1 особенно полезно для выяснения того, при каких значениях κ_1 (т.е. F_π/v) режим монополя-спектатора устанавливается при заданном κ_2 (т.е. при заданном g^2/e^2). Мы приводим соответствующие графики на рис. 5.

Рис. 2–5 показывают, что режим монополя-спектатора устанавливается при достаточно больших κ_1 и κ_2 , достигающих значений $\kappa_1 = 0.01$ и $\kappa_2 = 0.1$. Эти значения параметров соответствуют $r_{\text{mon}} \sim 0.03r_{\text{Sk}}$ и $M_{\text{Sk}} \sim M_{\text{mon}}$. “Точечный” монополь не обязательно должен быть очень малым и очень тяжелым.

Рис. 2. Асимптотический коэффициент c_f (см. (20)) при $f_\infty = 0$ как функция κ_1 при фиксированных отношениях $\kappa_1/\kappa_2 = 0.1$ (квадраты) и $\kappa_1/\kappa_2 = 0.01$ (кружки).

4.4. Радиальное поле Скирма. Обсудим теперь, как асимптотическое поведение радиальной функции Скирма, а именно константы c_f при заданном f_∞ , зависит от свойств ядра монополя в режиме монополя-спекатора. При малых значениях отношения κ_1/κ_2 асимптотическая формула (20) перестает быть справедливой при $\rho > 1$, где монополярная функция a_1 уже экспоненциально затухает (т.е. несколько вне ядра). Действительно, член $8\kappa_2 Y^2$ в левой части (19) становится сравнимым с $\kappa_1 \rho^2$ при

$$a_1 \sin f \sim \sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_2}} \rho. \quad (23)$$

Отсюда следует, что режим (20) прекращается, когда a_1 мало и $\rho \sim |\ln a_1|/2$ больше единицы. Для грубой оценки учтем только этот эффект, положим $\sin f \sim 1$ в левой части и $\rho \sim 1$ в правой части (23) и найдем, что асимптотический режим (20) прекращается при

$$\rho \sim \rho_c = \frac{1}{4} \left| \ln \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right|.$$

При этом значении ρ функция $f(\rho)$ должна быть достаточно близка к своему значению при $\rho = 0$, т.е. $f(\rho_c) \sim \pi$. Отсюда

$$\frac{c_f}{\rho_c} \sim (\pi - f_\infty),$$

Рис. 3. Барионное число как функция κ_1 для двух значений отношения κ_1/κ_2 : (а) – $(B-1)$ при $f_\infty = 0$; (б) – $(B-0.5)$ при $f_\infty = \pi/2$.

т.е.

$$c_f \sim \frac{1}{4}(\pi - f_\infty) \left| \ln \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right|$$

с точностью до членов, изменяющихся медленнее чем логарифмически. Это показывает, что c_f зависит от отношения κ_1/κ_2 логарифмически. Мы подтвердили это ожидание численным анализом, хотя вместо коэффициента $\pi/4$ при $f_\infty = 0$ мы получили

$$c_f = 0.61 \left| \ln \left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2} \right) \right| + \text{const}$$

в режиме монополя-спектатора. Поэтому в терминах физических координат r радиальная функция Скирма вне ядра монополя ведет себя как

$$f(r) = f_\infty + \text{const} \cdot \frac{r_{\text{mon}}}{r} \left| \ln \left(\frac{r_{\text{mon}}}{r_{\text{Sk}}} \right) \right|.$$

Во всем пространстве, кроме некоторой области, близкой к ядру монополя, конфигурация с наименьшей энергией при данном барионном числе дается не зависящим от r

Рис. 4. Энергия как функция барионного числа при различных κ_1 и фиксированных отношениях $\kappa_1/\kappa_2 = 0.1$ (а) и $\kappa_1/\kappa_2 = 0.01$ (б). При $\kappa_1 \leq 0.0001$ кривые неразличимы.

радиально направленным полем, $f = \cos f_\infty + i\hat{x} \cdot \vec{\sigma} \sin f_\infty$, тогда как $f(r)$ изменяется от π до f_∞ вблизи $\rho \sim \rho_c$.

Грубая оценка для энергии конфигураций, например при $B = 1$, получается интегрированием плотности энергии $(F_\pi^2/8)r^2(f')^2$ по области $r \geq r_c \equiv gv\rho_c$. Пользуясь асимптотическим поведением (20), получаем

$$E - M_{\text{mon}} \sim \frac{F_\pi^2}{gv} \frac{c_f^2}{\rho_c},$$

т.е. с точностью до логарифмов

$$E - M_{\text{mon}} \sim \frac{F_\pi^2}{gv}. \quad (24)$$

Отсюда видно, что скирмион теряет большую часть своей массы при приближении к монополю. Это иллюстрируется на рис. 6.

Рис. 5. Профили функций a_1 , a_2 , h и f при $\kappa_2 = 1$ и $\kappa_1 = 1$ (пунктирная линия), $\kappa_1 = 0.1$ (штриховая линия), $\kappa_1 = 0.01$ (сплошная линия). При $\kappa_1 \leq 0.01$ профили a_1 , a_2 и h неразличимы и совпадают с профилями монополей.

Заметим мимоходом, что если бы барионное число сохранялось, то существовали бы скирмион-монопольные связанные состояния с энергией связи, почти равной массе скирмиона. Это согласуется с результатами работ [3], [14], [15].

4.5. Влияние члена Весса–Зумино–Виттена. Обсудим теперь последний член в действии (1) – член ВЗВ. В контексте нашего рассмотрения его основной эффект состоит в появлении плотностей заряда, индуцированных полем Скирма и калибровочным полем [16]. Подходящей калибровкой для вычисления этого эффекта является калибровка $U = 1$. В этой калибровке член ВЗВ равен [7] (мы выписываем члены, которые не обращаются в нуль в случае $SU(2)$)

$$\Gamma_{\text{ВЗВ}} = \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Z_{\mu\nu\lambda\rho},$$

$$Z_{\mu\nu\lambda\rho} = -\frac{n}{48\pi^2} \text{Tr} \left[A_\mu A_\nu \partial_\lambda B_\rho + B_\mu B_\nu \partial_\lambda A_\rho + \frac{1}{2} (A_\mu A_\nu B_\lambda B_\rho + B_\mu A_\nu B_\lambda A_\rho) \right],$$

где n – целое число (число цветов в КХД). Для общих сферически-симметричных полей непосредственное вычисление дает

$$\int d^3x \epsilon^{\mu\nu\lambda\rho} Z_{\mu\nu\lambda\rho} = \frac{n}{48\pi^2} \int dr 4\pi r^2 Z,$$

$$Z = \frac{\tilde{a}_0}{r^2} \left[\frac{\tilde{b}_3}{r} (\tilde{b}_1 \tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 \tilde{b}_2) - \tilde{b}_2' (\tilde{a}_2 - \tilde{b}_2) - \tilde{b}_1' (\tilde{a}_1 - \tilde{b}_1) \right] + (\tilde{a} \leftrightarrow \tilde{b}),$$

Рис. 6. Энергия (отсчитываемая от массы монополя и выраженная в единицах массы скирмиона) для конфигураций с барионным числом $B = 1$ как функция κ_1 при фиксированном значении κ_2 .

где $\tilde{a}_i$ и $\tilde{b}_i$ – радиальные поля в калибровке $U = 1$ (при написании этой формулы мы не предполагаем симметрии (7); поле B_i имеет тот же вид, что и A_i из (8), но с заменой a_i на b_i) и

$$\tilde{a}_0 = i \operatorname{Tr}(\hat{x} \cdot \vec{\sigma} A_0), \quad \tilde{b}_0 = i \operatorname{Tr}(\hat{x} \cdot \vec{\sigma} B_0).$$

Используя симметрию (7), получаем

$$Z = \frac{2(\tilde{a}_0 + \tilde{b}_0)}{r^2} \left(\tilde{a}_2 \tilde{a}_2' - \frac{\tilde{a}_1 \tilde{a}_2 \tilde{a}_3}{r} \right).$$

Тем самым член ВЗВ индуцирует плотность (вектороподобного) электрического заряда в окрестности монополя.

Нам надо проверить, что вызванное этим эффектом кулоновское самодействие не разрушает наш предыдущий анализ. Оценим кулоновскую энергию, используя приближение монополя-спектатора. Возвращаясь к исходной калибровке $a_3 = b_3 = 0$ и полагая $a_2 = b_2 = 0$, получаем

$$Z = \frac{2(a_0 + b_0)}{r^2} a_1 a_1' \sin^2 f.$$

Плотность электрического заряда индуцируется в области, где f значительно отличается от π . Это происходит в области $\rho \gtrsim \rho_c$, где a_1 мало. Используя соотношение (23),

находим, что с точностью до логарифмических факторов полный индуцированный заряд

$$Q \sim [a_1(\rho_c) \sin f(\rho_c)]^2 \sim \frac{\kappa_1}{\kappa_2} \sim \frac{e^2 F_\pi^2}{g^2 v^2}.$$

Поскольку $r_c \sim r_{\text{мон}} \sim (gv)^{-1}$, получаем оценку с точностью до логарифмических факторов для кулоновской энергии,

$$E_{\text{Coul}} \sim \frac{g^2 Q^2}{r_c} \sim \frac{F_\pi^2}{gv} \left(\frac{e^2 F_\pi}{v} \right)^2,$$

которая очень мала по сравнению с (24). Поэтому скирмион в присутствии монополя является (почти) нейтральным в нашей модели, а кулоновская энергия пренебрежимо мала. Таким образом, член ВЗВ в действии можно не учитывать.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

При фиксированных параметрах модели κ_1 и κ_2 мы построили семейство решений со связью, вдоль которого барионное число монотонно стремится к нулю, а энергия монотонно убывает, стремясь к массе монополя. Эти решения, однако, обладают различным поведением поля Скирма на пространственной бесконечности, т.е. различными значениями радиальной функции Скирма при $r = \infty$. Можно было бы усомниться в том, что эта система действительно может двигаться вдоль такого пути в конфигурационном пространстве: в калибровке $A_0 = B_0 = 0$ кинетическая энергия содержит член

$$\frac{\pi F_\pi}{2} \int dr r^2 \dot{f}^2,$$

который расходится, если f_∞ изменяется со временем. Кроме того, барионный ток (2) имеет пространственные компоненты, асимптотическое поведение которых при больших r (по прежнему в калибровке $A_0 = B_0 = 0$) имеет вид

$$j_i = \frac{\hat{x}_i}{4\pi^2 r^2} \dot{f}. \quad (25)$$

При $\dot{f}_\infty \neq 0$ имеется поток барионного числа при $r \rightarrow \infty$,

$$F = \int j_i d\Sigma^i = \frac{1}{\pi} \dot{f}_\infty.$$

Это могло бы служить указанием на вытекание барионного числа через пространственную бесконечность.

Действительно, эволюция с бесконечной кинетической энергией невозможна; поэтому в калибровке $A_0 = B_0 = 0$ асимптотическое значение f_∞ не может меняться со временем. Чтобы понять, как в такой калибровке система может двигаться вдоль рассматриваемого пути с изменяющимся барионным числом (например, от $B = 1$ к $B = 0$), мы должны сначала преобразовать каждое решение со связью из нашего семейства к

калибровке, в которой $f(r)$ быстро стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$. Согласно выражениям (13) и (20) каждая конфигурация из нового семейства имеет ненулевое значение a_3 , и поэтому $a_3 = -c_f/\rho$ при больших ρ . Вследствие калибровочной инвариантности новые конфигурации имеют те же самые барионное число и энергию, что и исходные.

Движение вдоль нового пути в конфигурационном пространстве не требует бесконечной кинетической энергии. Действительно, в калибровке $A_0 = B_0 = 0$ электрическое поле при больших r изменяется по закону

$$F_{0i} \propto \frac{\dot{a}_3}{r} \propto \frac{\dot{c}_f}{r^2},$$

и интеграл от F_{0i}^2 сходится. Кроме того, барионный ток (25) обращается в нуль при $r \rightarrow \infty$, а поэтому барионное число не вытекает через пространственную бесконечность. Оно просто исчезает.

Благодарности. Данная работа была выполнена в рамках проектов SC/2000/020 и IC/2000/021 Enterprise-Ireland и была частично (в отношении В.А.Р.) поддержана Советом по президентским грантам и Государственной поддержке ведущих научных школ (грант № 00-15-96626), РФФИ (грант № 99-01-18410) и CRDF (грант № RP1-2103).

Список литературы

- [1] *B. A. Rubakov.* Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. С. 658; *V. A. Rubakov.* Nucl. Phys. B. 1982. V. 203. P. 311.
- [2] *C. G. Callan.* Phys. Rev. D. 1982. V. 25. P. 2141; 1982. V. 26. P. 2058; Nucl. Phys. B. 1983. V. 212. P. 391.
- [3] *C. G. Callan and E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 239. P. 161.
- [4] *T. H. R. Skyrme.* Proc. Roy. Soc. London A. 1961. V. 260. P. 127.
- [5] *G. S. Adkins, C. R. Nappi, and E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 228. P. 552.
- [6] *I. Zahed and G. E. Brown.* Phys. Rep. C. 1986. V. 142. P. 1.
- [7] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1983. V. 223. P. 422; P. 433.
- [8] *E. D'Hoker and E. Farhi.* Phys. Lett. B. 1984. V. 134. P. 86; Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 109.
- [9] *V. Rubakov.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 256. P. 509.
- [10] *J. Ambjørn and V. A. Rubakov.* Nucl. Phys. B. 1985. V. 256. P. 434.
- [11] *Е. Б. Богомоловый, М. С. Маринов.* ЯФ. 1976. Т. 23. С. 676.
- [12] *I. Affleck.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 191. P. 429.
- [13] *T. Akiba, H. Kikuchi, and T. Yanagida.* Phys. Rev. D. 1988. V. 38. P. 1937.
- [14] *Y. Brihaye, B. Kleihaus, and D. H. Tchrakian.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 1136.
- [15] *B. Kleihaus, D. H. Tchrakian, and F. Zimmerschied.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 816.
- [16] *J. Goldstone and F. Wilczek.* Phys. Rev. Lett. 1981. V. 47. P. 986.

Поступила в редакцию 20.IV.2001 г.