Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. В. Ефимов, Амплитуды при высоких энергиях в нелокальной теории, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 395–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf503>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:08:57

© 2001 г.

Г. В. Ефимов*

АМПЛИТУДЫ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ

В нелокальной квантовой теории скалярного поля, допускающей рост амплитуд $\sim e^{B\|p^2\|^\rho}$ в комплексной p^2 -плоскости, получено ограничение на полное поперечное сечение рассеяния: $\sigma_{\text{tot}}(s) \leq C s^{\rho-1} \ln^2 s$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Поведение амплитуд рассеяния при высоких энергиях является одной из центральных проблем физики элементарных частиц. Стандартные методы квантовой теории поля надежны при вычислениях по теории возмущений, лишь когда энергии взаимодействующих частиц не столь высоки и эффективные константы связи малы. При увеличении энергии эффективные константы связи растут, так что следующие поправки по теории возмущений начинают играть определяющую роль. В настоящее время используются различные приближения, связанные с суммированием определенных типов диаграмм Фейнмана при помощи метода ренормгруппы. Однако методы суммирования рядов теории возмущений еще далеки от завершенности. Поэтому крайне важно знать строгие ограничения на поведение амплитуд рассеяния при высоких энергиях, следующие из так называемых первых принципов, т.е. из общих аксиоматических основ квантовой теории поля.

Стандартный путь доказательства хорошо известного ограничения Фруассара на полное поперечное сечение в локальной квантовой теории скалярного поля основан на комбинации трех условий: унитарности, аналитичности амплитуды упругого рассеяния в эллипсе Мартена–Лемана и полиномиальной ограниченности амплитуд в локальной квантовой теории поля (см., например, [1], [2]). Поэтому ограничение Фруассара рассматривается как внутреннее свойство локальной квантовой теории поля.

В данной статье получено ограничение на амплитуду упругого рассеяния при высоких энергиях в нелокальной квантовой теории поля (НКТП), в которой рост амплитуд в комплексной области импульсных переменных больше линейной экспоненты по импульсу: так называемые существенно нелокализуемые полевые теории [3], [4]

$$\mathcal{A} \sim e^{(l^2 p^2)^\rho}, \quad \rho \geq 1. \quad (1)$$

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия

Параметр l определяет масштаб области нелокального взаимодействия.

Исторически НКТП развивалась как физически приемлемая попытка устранить ультрафиолетовые расходимости, связанные с локальным характером взаимодействия, и не имевшая непосредственного приложения к физике элементарных частиц. В настоящее время, однако, в рамках методов НКТП удается описать кварки и глюоны в области конфайнмента. Так предположение о том, что пропагаторы кварков описываются целыми функциями первого порядка роста в комплексной p^2 -плоскости, лежит в основе виртонной модели и модели конфайнированных кварков [5]. Предположение, что вакуум КХД реализуется самодуальным однородным вакуумным глюонным полем, приводит к аналитическому конфайнменту кварков и глюонов [6]. Другими словами, то, что пропагаторы кварков и глюонов являются целыми аналитическими функциями в комплексной плоскости p^2 , гарантирует конфайнмент, т. е. кварки и глюоны не могут существовать в свободном состоянии как обычные частицы, однако существуют как переносящие взаимодействие виртуальные частицы. При этом S -матрица унитарна на пространстве физических состояний – адронов. Расчеты показали, что перечисленные модели правильно описывают физику адронов при низких энергиях [7]. Следует также отметить, что аналитический конфайнмент в упомянутых моделях реализуется именно целыми функциями первого порядка роста ($\rho = 1$ в формуле (1)), так что есть основания считать, что случай с $\rho = 1$ играет выделенную роль в физике частиц.

Однако существует сильное предубеждение против релятивистской НКТП. Главное возражение состоит в том, что формфакторы (см. [5], [8]), пропагаторы и амплитуды (см. [6]), которые являются целыми аналитическими функциями, убывающими в евклидовом импульсном пространстве, быстро растут в физической области. Коэффициенты разложения по теории возмущений для любой амплитуды растут в физической области как

$$\mathcal{M}(s_{ij}) = \sum_{n=0}^{\infty} g^{n_0+2n} \mathcal{M}^{(n)}(s_{ij}), \quad \mathcal{M}^{(n)}(s_{ij}) \sim e^{ns_{ij}^{\rho}} \quad \text{при } s_{ij} \rightarrow +\infty,$$

где $s_{ij} = (k_i + k_j)^2$ и $\rho \geq 1$.

Это означает, что режим сильной константы связи в нелокальной теории наступает при $g^2 e^{(l^2 s)^{\rho}} \geq 1$, т. е. при относительно невысоких энергиях, сравнимых с величиной области конфайнмента s , приблизительно равной 1 ГэВ^2 . Следовательно, нельзя пользоваться вычислениями по теории возмущений при более высоких энергиях. Необходимо привлекать методы суммирования рядов теории возмущений, что в настоящее время представляется весьма сложной задачей. В локальных перенормируемых теориях режим сильной связи наступает при $g^2 \ln s \geq 1$ и с практической точки зрения эта граница весьма далека.

Однако следует напомнить и подчеркнуть, что математическое доказательство существования НКТП находится на том же уровне строгости, что и локальной КТП. Аксиоматическая теория НКТП сформулирована в [3], [4], где доказаны основные теоремы аксиоматического подхода. Лагранжев формализм развит в [8], где в каждом порядке теории возмущений была доказана унитарность S -матрицы и было показано, что аналитические свойства амплитуд в любой конечной области комплексных импульсных пе-

ременных в локальной и нелокальной теориях совпадают.

Для того чтобы получить ограничение сверху на полное поперечное сечение в НКТП, необходимо предположить, что существует такой метод суммирования рядов теории возмущений, что точная S -матрица унитарна и аналитические особенности амплитуд в любой конечной области комплексных импульсных переменных в локальной и нелокальной теориях совпадают. В частности, амплитуда упругого рассеяния аналитична в эллипсе Мартена–Лемана. Кстати, то же самое предположение делается и в локальной КТП. Первый результат для класса существенно нелокализуемых теорий, в которых рост амплитуд во всем импульсном пространстве ограничен экспонентой $e^{b\|p^2\|^\rho}$, $\rho > 1/2$, был получен в [9]. Авторы показали, что полное поперечное сечение ограничено функцией

$$\sigma_{\text{tot}}(s) < C s^{1+2\rho}.$$

Эта оценка представляется весьма завышенной. С физической точки зрения при высоких энергиях полное поперечное сечение при нелокальном взаимодействии, по крайней мере, не должно расти быстрее поперечного сечения при локальном взаимодействии, поскольку “нелокальные частицы”, имеющие некоторую протяженность, должны становиться все более и более прозрачными.

В этой работе показано, что ограничение Фруассара на полное поперечное сечение в нелокальной теории при $\rho = 1$ то же самое, что и в локальной теории. Наша основная идея состоит в следующем. При доказательстве в работе [9] используется ограниченность амплитуд в нелокальной теории во всей области комплексной переменной, в то время как нам достаточно знать ограничение на амплитуду упругого рассеяния только при вещественных и положительных s и в малой комплексной окрестности $t = 0$. Для получения этого ограничения S -матрицу следует рассматривать как унитарный оператор на пространстве Фока физических состояний.

2. УНИТАРНОСТЬ НА МАССОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Для простоты будем рассматривать однокомпонентное скалярное поле. Обобщение на другие поля не вносит никаких принципиально новых трудностей.

Пространство Фока $\mathcal{F}$ физических частиц состоит из векторов

$$F = f_0 |0\rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n d\vec{k}_j f_n(\vec{k}) |\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle,$$

где

$$|\vec{k}_1, \dots, \vec{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a_{\vec{k}_1}^{\dagger} \cdot \dots \cdot a_{\vec{k}_n}^{\dagger} |0\rangle.$$

Вектор $|0\rangle$ описывает вакуум, нормированный условием $\langle 0 | 0 \rangle = 1$. Норма состояния $F \in \mathcal{F}$ определяется как

$$\|F\|^2 = \langle F, F \rangle = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \int \prod_{j=1}^n d\vec{k}_j |f_n(\vec{k})|^2 < \infty.$$

S -матрица может быть представлена в форме

$$S = I + iT, \\ T = \sum_{n_1=2}^{\infty} \sum_{n_2=2}^{\infty} \int \prod_{j=1}^{n_1} \frac{d\vec{k}_j}{\sqrt{2\omega_j}} \int \prod_{l=1}^{n_2} \frac{d\vec{p}_l}{\sqrt{2\omega_l}} \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{n_1!}} a_{\vec{k}_1}^+ \cdot \dots \cdot a_{\vec{k}_{n_1}}^+ T_{n_1 n_2}(k, p) a_{\vec{p}_1} \cdot \dots \cdot a_{\vec{p}_{n_2}} \frac{1}{\sqrt{n_2!}}, \quad (2)$$

где

$$k_j = (\omega_j, \vec{k}_j), \quad \omega_j = \sqrt{m^2 + \vec{k}_j^2}, \quad \vec{k}_j \in \mathbf{R}^3, \\ T_{n_1 n_2}(k, p) = \sum_{v=0}^{\min(n_1, n_2)} \sum_{\{a, b\}} M_{a_1 b_1}(k, p) \cdot \dots \cdot M_{a_v b_v}(k, p), \\ M_{ab}(k, p) = \delta^{(4)} \left(\sum_{j=1}^a k_j - \sum_{l=1}^b p_l \right) \mathcal{M}_{ab}(k, p).$$

Предполагается, что S -матрица перенормирована и удовлетворяет условию стабильности:

$$S | 0 \rangle = | 0 \rangle, \quad S | \vec{k} \rangle = | \vec{k} \rangle,$$

т.е. вакуумные петли устранены и одночастичные состояния перенормированы. Функции $\mathcal{M}_{ab}(k, p)$ состоят из связанных диаграмм Фейнмана и зависят от релятивистски-инвариантных импульсных переменных на массовой поверхности:

$$s_{ij} = (k_i - k_j)^2 > 0, \quad s_{lm} = (p_l - p_m)^2 > 0, \quad t_{il} = (k_i - p_l)^2 < 0,$$

где $i, j = 1, \dots, b$ и $l, m = 1, \dots, a$.

Если S -матрица унитарна:

$$S^+ S = S S^+ = I,$$

то мы имеем очевидное неравенство

$$\|T\| = \|S - I\| \leq \|S\| + \|I\| \leq 2, \quad (3)$$

откуда следует, что неравенство

$$|\langle F, TF \rangle| \leq 2 \langle F, F \rangle \quad (4)$$

справедливо для любого $F \in \mathcal{F}$. Это неравенство является главным инструментом нашего исследования.

3. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Рассмотрим амплитуду упругого рассеяния. Введем вектор

$$F = \iint d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) | \vec{k}_1, \vec{k}_2 \rangle \quad (5)$$

с нормой

$$\langle F, F \rangle = \iint d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 |f(\vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2.$$

Тогда подмодульное выражение в левой части неравенства (4) имеет вид

$$\begin{aligned} \langle F, TF \rangle = \iint \frac{d\vec{k}_1 d\vec{k}_2}{\sqrt{2\omega_1 2\omega_2}} \iint \frac{d\vec{p}_1 d\vec{p}_2}{\sqrt{2E_1 2E_2}} \delta^{(4)}(k_1 + k_2 - p_1 - p_2) \times \\ \times f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) \mathcal{M}(s, t) f(\vec{p}_1, \vec{p}_2), \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathcal{M}(s, t) = \mathcal{M}_{22}(k_1, k_2; p_1, p_2)$, $s = (k_1 + k_2)^2$ и $t = (k_1 - p_1)^2$.

Чтобы выделить поведение амплитуды $\mathcal{M}(s, t)$ при $s \rightarrow \infty$, введем функцию

$$f(\vec{k}_1, \vec{k}_2) = \frac{1}{\kappa^3} \phi\left(\frac{(\vec{k}_1 - \vec{q})^2}{\kappa^2}\right) \phi\left(\frac{(\vec{k}_2 + \vec{q})^2}{\kappa^2}\right), \quad (7)$$

где $\phi(u)$ — положительная функция с ограниченным носителем

$$\text{supp } \phi(u) = \left\{ u: 0 < u < \frac{1}{2} \right\}$$

и нормировкой

$$\int \frac{d\vec{k}}{\kappa^3} \phi^2\left(\frac{\vec{k}^2}{\kappa^2}\right) = 2\pi \int_0^{\frac{1}{2}} du \sqrt{u} \phi^2(u) = 1,$$

так что $\langle F, F \rangle = 1$. Параметры $\vec{q}$ и κ выбраны таким образом, что

$$Q^2 = \vec{q}^2 + m^2 \gg m^2, \quad \kappa^2 \ll m^2 \ll Q^2.$$

Для $\kappa \rightarrow 0$ имеем

$$|f(\vec{k}_1, \vec{k}_2)|^2 \rightarrow \delta(\vec{k}_1 - \vec{q}) \delta(\vec{k}_2 + \vec{q}).$$

Введем новые переменные в интеграле (6), с определенной в (7) функцией f :

$$\vec{k}_1 \rightarrow \vec{k}_1 + \vec{q}, \quad \vec{k}_2 \rightarrow \vec{k}_2 - \vec{q}, \quad \vec{p}_1 \rightarrow \vec{p}_1 + \vec{q}, \quad \vec{p}_2 \rightarrow \vec{p}_2 - \vec{q}.$$

Область интегрирования ограничена условиями

$$(\vec{k}_j)^2 \leq \frac{\kappa^2}{2}, \quad (\vec{p}_j)^2 \leq \frac{\kappa^2}{2}, \quad j = 1, 2.$$

Для больших $Q \gg m^2$ имеем

$$\omega_{\pm} = \sqrt{m^2 + (\vec{k} \pm \vec{q})^2} = Q \pm (\vec{k} \vec{n}) + O\left(\frac{\kappa}{Q^2}\right) = Q \left[1 + O\left(\frac{\sqrt{\kappa^2}}{Q}\right)\right],$$

$$\vec{n} = \frac{\vec{q}}{Q} \rightarrow \frac{\vec{q}}{|\vec{q}|}, \quad (\vec{n})^2 = \frac{\vec{q}^2}{Q^2} \rightarrow 1.$$

При $Q \rightarrow \infty$ получаем

$$\begin{aligned} \langle F, TF \rangle &\rightarrow \frac{1}{(\pi\kappa^2)^3 s} \iint d\vec{k}_1 d\vec{k}_2 \iint d\vec{p}_1 d\vec{p}_2 \times \\ &\times \phi\left(\frac{\vec{k}_1^2}{\kappa^2}\right) \phi\left(\frac{\vec{k}_2^2}{\kappa^2}\right) \phi\left(\frac{\vec{p}_1^2}{\kappa^2}\right) \phi\left(\frac{\vec{p}_2^2}{\kappa^2}\right) \times \\ &\times \delta^{(3)}(\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \delta((\vec{k}_1 - \vec{k}_2 - \vec{p}_1 + \vec{p}_2) \vec{n}) \times \\ &\times \mathcal{M}(s, -[(\vec{k}_1 - \vec{p}_1)^2 - (\vec{n}(\vec{k}_1 - \vec{p}_1))^2]) = \\ &= \frac{\pi\kappa^2}{2s} \int_0^1 du \Phi^2(u) \mathcal{M}(s, -u\kappa^2). \end{aligned}$$

Положительная функция $\Phi(u)$ удовлетворяет условиям

$$\Phi(u) = \int d\vec{l} \phi(\vec{l}^2) \phi((\vec{l} + \vec{r})^2)|_{\vec{r}^2=u},$$

$$\text{supp } \Phi(u) = \{u: 0 \leq u \leq 1\}, \quad \Phi(0) = 1, \quad \Phi(u) \leq 1.$$

Таким образом, при больших $s \rightarrow \infty$ неравенство (4) для положительных функций $\Phi(u)$ и любых значений параметра $\kappa^2 < s$ выглядит следующим образом:

$$\left| \kappa^2 \int_0^1 du \Phi^2(u) \mathcal{M}(s, -u\kappa^2) \right| \leq \frac{4}{\pi} s, \quad 0 < \kappa^2 < s. \quad (8)$$

4. НЕЛОКАЛЬНАЯ КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Будем предполагать, что S -матрица (2) содержит все точные амплитуды. Другими словами, существует такой метод суммирования рядов теории возмущений, что:

- а) S -матрица унитарна;
- б) аналитические свойства амплитуд в любой конечной области импульсного комплексного пространства совпадают в локальной и нелокальной квантовых теориях поля;
- в) амплитуды $M_n(x_1, \dots, x_n)$ в x -пространстве являются обобщенными функциями, которые определены на пространстве основных функций Z_γ , (см. [3], [4], [8]), состоящем из целых аналитических функций, которые удовлетворяют неравенству

$$|f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)| \leq A \exp\left(\sum_{i=1}^n [-a_i |x_i|^{2\gamma} + b_i |y_i|^{2\gamma}]\right), \quad (9)$$

где A , a_i и b_i – положительные постоянные и $\gamma > 1$;

г) $\tilde{Z}_\gamma = Z_\rho$ при $2\rho = 2\gamma/(2\gamma - 1) > 1$;

д) амплитуды $M_n(p_1, \dots, p_n)$ в комплексном импульсном p^2 -пространстве удовлетворяют неравенству

$$|M_n(p_1, \dots, p_n)| \leq A \exp\left(\sum_{i,j=1}^n A_{ij} |(p_i p_j)|^\rho\right), \quad (10)$$

где A и A_{ij} – постоянные.

Амплитуда упругого рассеяния $\mathcal{M}(s, t)$ для больших вещественных положительных s и малых вещественных t может быть оценена как

$$|\mathcal{M}(s, t)| \simeq R(s) e^{h(s)t}, \quad (11)$$

где

$$R(s) \leq A e^{a s^\rho}, \quad h(s) \leq b s^{\rho-1}$$

и A , a и b – постоянные. Из оценки (11) и неравенства (8) следует, что

$$\frac{R(s)}{h(s)} \leq C s, \quad R(s) \leq C s^\rho.$$

Другими словами, для больших вещественных положительных s и малых вещественных t имеем

$$|\mathcal{M}(s, t)| \leq A s^\rho, \quad |t| \leq \frac{B}{s^{\rho-1}}. \quad (12)$$

5. ОГРАНИЧЕНИЕ ФРУАССАРА

Вывод ограничения Фруассара на полное поперечное сечение в локальной теории приведен в [1]. Выведем ограничение Фруассара для рассматриваемого нами случая. Мнимая часть амплитуды упругого рассеяния записывается как

$$\mathcal{I}(s, t) = \frac{1}{8\pi} \operatorname{Im} \mathcal{M}(s, t) = \frac{s^{\frac{1}{2}}}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) a_l(s) P_l(\cos \theta),$$

где $\cos \theta = 1 + 2t/(s - 4m^2)$, $t < 0$.

Предполагаются справедливыми следующие утверждения:

а) условие унитарности

$$0 \leq a_l(s) \leq 1;$$

б) функция $\mathcal{M}(s, t)$ аналитична в эллипсе Мартэна–Лемана, задаваемом условием

$$|\cos \theta| < 1 + \frac{8m^2}{s - 4m^2};$$

в) справедливо неравенство (12).

Воспользуемся неравенством

$$P_l(x) > \frac{C}{\sqrt{1+l}} (1 + \sqrt{2x-2})^l \sim \frac{C}{\sqrt{l}} \left(1 + \frac{b}{s^{\frac{\rho}{2}}}\right)^l$$

при $x = 1 + t/s \sim 1 + B/s^\rho > 1$ (здесь и далее знак $\sim$ означает асимптотику при больших s). При $t_0 = B/s^{\rho-1}$ имеем соотношение

$$C\sqrt{l}a_l(s) \left(1 + \frac{b}{s^{\frac{\rho}{2}}}\right)^l < 2la_l(s)P_l\left(1 + \frac{t_0}{s}\right) < s^\rho,$$

поэтому

$$a_l(s) < \frac{C}{\sqrt{l}} \exp\left(\rho \ln s - \frac{cl}{s^{\frac{\rho}{2}}}\right).$$

Величина $a_l(s) \ll 1$ для $l > L = Cs^{\rho/2} \ln s$, откуда следует

$$\mathcal{I}(s, 0) < \frac{s^{\frac{1}{2}}}{k} \sum_{l=0}^L (2l+1) \approx 2L^2 \sim Cs^\rho \ln^2 s.$$

Конечный результат, так называемое ограничение Фруассара, получается с помощью оптической теоремы:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \sim \frac{\mathcal{I}(s, 0)}{s} \leq Cs^{\rho-1} \ln^2 s. \quad (13)$$

Эта оценка сверху для нелокальной теории при $\rho = 1$ совпадает с ограничением Фруассара локальной теории:

$$\sigma_{\text{tot}}(s) \leq C \ln^2 s. \quad (14)$$

Благодарности. Работа была поддержана грантом РФФИ № 01-02-17200.

Список литературы

- [1] *Р. Иден.* Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. М.: Наука, 1970.
- [2] *P. D. B. Collins and E. J. Squires.* Regge Poles in Particle Physics. Berlin: Springer, 1968.
- [3] *В. Я. Файнберг, М. З. Иофа.* ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 1644; ТМФ. 1969. Т. 1. С. 187.
- [4] *М. А. Соловьев.* Тр. ФИАН. 1993. Т. 209. С. 121.
- [5] *G. V. Efimov, M. A. Ivanov.* Quark Confinement Model of Hadrons. Bristol: IOP, 1993.
- [6] *G. V. Efimov and S. N. Nedelko.* Phys. Rev. D. 1995. V. 51. P. 176.
- [7] *G. V. Efimov and G. Ganbold.* Meson Spectrum and Analytic Confinement. hep-ph/0103101.
- [8] *Г. В. Ефимов.* Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
- [9] *V. Ya. Fainberg and M. Z. Iofa.* Nuovo Cimento A. 1971. V. 5. P. 275.

Поступила в редакцию 27.IV.2001 г.