Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Завьялов, О механизме появления нелинейных представлений группы Лоренца в квантовой теории поля, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 403–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf504>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 15:14:25

© 2001 г.

О. И. Завьялов*

О МЕХАНИЗМЕ ПОЯВЛЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Выявлен “механизм”, в силу которого релятивистская функция Вигнера имеет “правильный” закон преобразования по отношению к группе Лоренца, только если соответствующие релятивистские волновые функции обладают специальными трансформационными свойствами.

Эту статью я посвящаю Владимиру Яковлевичу Файнбергу, блестящие лекции которого по классической электродинамике я имел удовольствие слушать еще в свои студенческие годы и который уже в те (увы, давние) времена олицетворял для меня *идеальный образ настоящего мужчины* (физика-теоретика).

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная работа является прямым продолжением статей [1] и [2]. В них приведены соображения, указывающие на то, что преобразования (по отношению к группе Лоренца) релятивистских волновых функций свободных частиц (если квантовая механика таких частиц является самосогласованной) должны быть нелинейными. Ниже показано, как может возникнуть эта нелинейность. В [1] было установлено, что при изменении лоренцевой системы отсчета функция Вигнера свободных частиц изменяется только за счет импульсной переменной γ , причем соответствующему преобразованию сдвига ($\gamma \rightarrow \gamma + \nu$) подвергается лишь γ , которая *не входит* в “координатный” множитель $\exp(iq \operatorname{sh} \gamma)$ при волновой функции $\psi(\gamma)$. Именно,

$$W(\gamma, q; 0) \rightarrow W_q(\gamma + \nu, q; 0), \quad (1)$$

где ν — относительная скорость систем отсчета, а индекс q означает здесь, что переменная γ , фигурирующая помимо переменной q в указанном “координатном” множителе, остается постоянной и не подвергается сдвигу в (1) (в статье [1] это была формула (49)).

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

В статье [1] мы привели косвенные аргументы в пользу того, что нелинейность преобразований волновых функций имеет место и при ненулевых q . В данной статье мы превратим эти полуэвристические аргументы в технически последовательное доказательство.

Далее мы будем использовать методы, практически совпадающие с методами работ [1], [2]. Для того чтобы ввести адекватные этим методам термины в новой ситуации с ненулевыми q , мы все же явно выпишем здесь важную исходную формулу работы [1], выражающую вигнеровское распределение через волновую функцию $\psi_q(\gamma) = \psi(\gamma) \exp(iq \operatorname{sh} \gamma)$, где импульс p , первоначально входящий в волновую функцию ψ свободной частицы, есть $p = \operatorname{sh} \gamma$. Именно,

$$W(\gamma, q; 0) = \int d\gamma' d\gamma'' \frac{\operatorname{ch}(\gamma') \operatorname{ch}(\gamma'')}{2\pi \operatorname{ch} \gamma} \psi_q^*(\gamma') \psi_q(\gamma'') \delta\left(\gamma - \frac{\gamma' + \gamma''}{2}\right).$$

В работе [1] эта формула имела номер (40).

Фурье-преобразование $\widetilde{W}_q(\xi)$ функции $W(\gamma, q; 0)$ определено соотношением

$$\widetilde{W}_q(\xi) = \int d\gamma \exp(i\xi\gamma) \operatorname{ch} \gamma W(\gamma, q; 0). \quad (2)$$

Обратное к (2) преобразование имеет вид

$$W(\gamma, q; 0) = \frac{1}{2\pi \operatorname{ch} \gamma} \int d\xi \exp(-i\xi\gamma) \widetilde{W}_q(\xi). \quad (3)$$

Как и ранее, это соотношение означает, что

$$\widetilde{W}_q(\xi) = \frac{1}{2\pi} \widetilde{\psi}_q^*\left(-\frac{\xi}{2}\right) \widetilde{\psi}_q\left(\frac{\xi}{2}\right), \quad (4)$$

причем

$$\widetilde{\psi}_q(\xi) = \int d\gamma \exp(i\gamma\xi) \psi_q(\gamma) \operatorname{ch} \gamma. \quad (5)$$

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ВОЛНОВЫХ ФУНКЦИЙ

Согласно соотношениям (1) и (2) условие лоренц-инвариантности функции Вигнера при произвольных q имеет во введенных обозначениях следующий стандартный для наших рассуждений вид:

$$\widetilde{W}(\xi) \rightarrow \widetilde{W}_q^\nu(\xi) = \widetilde{W}_q + \delta\widetilde{W}_q = \widetilde{W}_q(\xi)(1 - i\xi\nu) - \nu \int d\eta \Delta(\xi - \eta) \widetilde{W}_q(\eta) \quad (6)$$

(последнее равенство, разумеется, справедливо только инфинитезимально). Напомним также, что

$$\Delta(\xi) = \int \frac{d\gamma}{2\pi} \operatorname{th} \gamma \exp(i\xi\gamma)$$

(это формула (30) работы [2]). Теперь можно, пользуясь условием (4) и фактически повторяя рассуждения статей [1], [2], получить формулы, задающие (инфинитезимальные) преобразования (по отношению к лоренцевым бустам ν) для волновых функций $\tilde{\psi}_q(\xi)$. Именно, мы утверждаем, что условие лоренц-инвариантности функции Вигнера будет выполнено, если при малом лоренцевом повороте с относительной скоростью ν волновая функция будет изменяться по правилу

$$\tilde{\psi}_q(\xi) \rightarrow \tilde{\psi}_q^\nu(\xi) = \tilde{\psi}_q(\xi) + \delta\tilde{\psi}_q(\xi) = \tilde{\psi}_q(\xi) - \nu\tilde{\Phi}_q(\xi)\tilde{\psi}_q(\xi). \quad (7)$$

При этом

$$\tilde{\Phi}_q(\xi) = \tilde{S}_q(\xi) + \tilde{A}_q(\xi) = i\xi + \int d\eta \frac{1}{\tilde{W}_q(2\xi)} \Delta(2\xi - 2\eta) \tilde{W}_q(2\eta) + \tilde{A}_q(\xi), \quad (8)$$

так что $\tilde{S}_q(\xi)$ – квазивещественная часть функции $\tilde{\Phi}_q(\xi)$, а квазимнимая часть $\tilde{A}_q(\xi)$ этой функции произвольна. Обозначения $\tilde{S}$ и $\tilde{A}$ связаны с терминами “симметричная” и “антисимметрическая” части функции $\tilde{\Phi}$ по отношению к введенной в [2] квазиинволюции (которая, напомним, соответствует обычному комплексному сопряжению для фурье-образов этих функций). Разумеется, фигурирующая в (8) квазимнимая часть $\tilde{A}_q(\xi)$ может, вообще говоря, зависеть как от q , так и от самой исходной волновой функции $\psi(\gamma)$.

Приведем еще и в этой статье сокращенное доказательство сформулированного только что важного утверждения о лоренц-инвариантности величины $W(\gamma, q; 0)$. Прежде всего снова упомянем о том, что вклад от квазимнимой функции $\tilde{A}_q(\xi)$, входящей (через $\tilde{\Phi}_q(\xi)$) из (7) в вариацию $\delta\tilde{\psi}_q(\xi)$, выпадает (в силу соотношения $\tilde{A}_q^*(-\xi) = -\tilde{A}_q(\xi)$) из вариации $\delta W(\gamma, q; 0)$. Таким образом, в $\tilde{\Phi}(\xi)$ можно сразу положить $\tilde{A}_q(\xi) = 0$. В этом случае будет справедливо равенство

$$\tilde{\Phi}_q(\xi) = \tilde{\Phi}_1(\xi) + \tilde{\Phi}_2(\xi), \quad (9)$$

где

$$\tilde{\Phi}_1(\xi) = i\xi, \quad \tilde{\Phi}_2(\xi) = \int d\eta \frac{1}{\tilde{W}_q(2\xi)} \Delta(2\xi - 2\eta) \tilde{W}_q(2\eta). \quad (10)$$

Каждое из этих двух квазивещественных слагаемых порождает свой вклад $\delta_1\tilde{\psi}_q(\xi)$ или $\delta_2\tilde{\psi}_q(\xi)$ в вариацию $\delta\tilde{\psi}_q(\xi)$ и соответственно свой вклад $\delta_1\tilde{W}_q(\xi)$ или $\delta_2\tilde{W}_q(\xi)$ в вариацию $\delta\tilde{W}_q(\xi)$. При этом в первом порядке по ν вклад $\delta_2\tilde{W}_q(2\xi)$ будет содержать член $\tilde{\Phi}(2\xi)\tilde{\psi}_q^*(-\xi)\tilde{\psi}_q(\xi)$, так что благодаря соотношению (4) фактор $\tilde{W}_q(2\xi)$, стоящий в знаменателе формулы (10), сократится. Таким образом,

$$\delta_1\tilde{W}_q(2\xi) = -2\nu\xi\tilde{W}_q(2\xi) \quad (11)$$

и

$$\delta_2\tilde{W}_q(2\xi) = -\nu \int d\eta \Delta(2\xi - \eta) \tilde{W}_q(\eta). \quad (12)$$

Окончательно будем иметь

$$\delta \widetilde{W}_q(2\xi) = -2i\nu \xi \widetilde{W}_q(2\xi) - \nu \int d\eta \Delta(2\xi - \eta) \widetilde{W}_q(\eta), \quad (13)$$

что и является условием лоренц-инвариантности для функции $\widetilde{W}_q(2\xi)$.

Свяжем теперь допустимую вариацию координатной волновой функции $\delta \widetilde{\psi}_q(\xi)$, фигурирующую в (7), с вариацией собственно волновой функции

$$\delta \widetilde{\psi}(\xi) = \delta \int d\gamma \exp(i\gamma\xi) \operatorname{ch} \gamma \psi(\gamma).$$

Поскольку по нашему предположению переменные, входящие в “координатный” множитель, никак не преобразуются при лоренцевых поворотах, то именно эта последняя величина и является независимой, целиком определяя все другие вариации. В частности,

$$\delta \widetilde{\psi}_q(\xi) = \int d\eta \widetilde{D}_q(\xi - \eta) \delta \widetilde{\psi}(\eta), \quad (14)$$

где

$$\widetilde{D}_q(\xi) = \int \frac{d\gamma}{2\pi} \exp(i\gamma\xi) \exp(iq \operatorname{sh} \gamma) \quad (15)$$

(последнее равенство, конечно, нужно понимать в смысле обобщенных функций). Имеем

$$\lim_{q \rightarrow 0} \widetilde{D}_q(\xi) = \delta(\xi).$$

Соотношение (14), по существу, использует тот факт, что величина $\psi_q(\gamma)$ представляет собой сдвиг функции $\psi(\gamma)$ на вектор q , т.е.

$$\widetilde{\psi}_q(\xi) = \int d\eta \widetilde{D}_q(\xi - \eta) \widetilde{\psi}(\eta). \quad (16)$$

Отметим также соотношение

$$\int d\eta \widetilde{D}_{-q}(\xi - \eta) \widetilde{D}_q(\eta - \xi') = \delta(\xi - \xi'), \quad (17)$$

так что равенства, обратные к (14) и (16), имеют вид

$$\delta \widetilde{\psi}(\xi) = \int d\eta \widetilde{D}_{-q}(\xi - \eta) \delta \widetilde{\psi}_q(\eta) \quad (18)$$

и

$$\widetilde{\psi}(\xi) = \int d\eta \widetilde{D}_{-q}(\xi - \eta) \widetilde{\psi}_q(\eta). \quad (19)$$

Таким образом, с учетом закона трансформации (см. формулу (7)) в терминах нашего основного объекта $\delta\tilde{\psi}(\xi)$ получаем правило

$$\begin{aligned}\delta\tilde{\psi}(\xi) &= -\nu \int d\eta_1 \tilde{D}_{-q}(\xi - \eta_1) \tilde{\Phi}_q(\eta_1) \tilde{\psi}_q(\eta_1) = \\ &= -\nu \int d\eta_1 d\eta_2 \tilde{D}_{-q}(\xi - \eta_1) \tilde{\Phi}_q(\eta_1) \tilde{D}_q(\eta_1 - \eta_2) \tilde{\psi}(\eta_2).\end{aligned}\quad (20)$$

Теперь нам осталось доказать, что вся совокупность преобразований (20) (при различных q) сводится фактически к единому преобразованию в том смысле, что все они согласованы друг с другом и, в частности, со стандартным исходным преобразованием при $q = 0$, которое впервые было получено в работе [2]. Иными словами, нам предстоит убедиться, что существует способ выбрать квазимнимые функции $\tilde{A}_q(\xi)$ такие, что для всех функций $\psi(\gamma)$ и всех q будет выполнено равенство

$$\int d\eta_1 d\eta_2 \tilde{D}_{-q}(\xi - \eta_1) \tilde{\Phi}_q(\eta_1) \tilde{D}_q(\eta_1 - \eta_2) \tilde{\psi}(\eta_2) = \tilde{\Phi}_0(\xi) \tilde{\psi}(\xi). \quad (21)$$

Это ключевое равенство, разумеется, будет выполнено, если удастся удовлетворить уравнению

$$\int d\lambda \tilde{D}_{-q}(\xi - \lambda) \tilde{\Phi}_q(\lambda) \tilde{D}_q(\lambda - \eta) = \tilde{\Phi}_0(\xi) \delta(\xi - \eta). \quad (22)$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$\tilde{\Phi}_q(\lambda) \delta(\lambda - \eta) = \int d\beta \tilde{D}_q(\lambda - \beta) \tilde{\Phi}_0(\beta) \tilde{D}_{-q}(\beta - \eta). \quad (23)$$

С учетом базовых свойств функции Вигнера [3], доказанных в [4], можно утверждать, что интеграл в правой части соотношения (23) удовлетворяет своеобразной “теореме о среднем”. Точнее говоря, существует такая функция $\beta_{q,A_0}^*(\lambda, \eta)$, что величину $\tilde{\Phi}_0$, взятую в фиксированной точке $\beta = \beta^*$, можно вынести за знак этого интеграла. Возьмем теперь произвольную основную функцию $\varphi(\eta)$, которая, однако, нигде на вещественной оси не обращается в нуль, и проинтегрируем с этим весом равенство (23). Находим

$$\tilde{\Phi}_q(\lambda) = \int d\eta d\beta \tilde{D}_q(\lambda - \beta) \tilde{\Phi}_0(\beta) \tilde{D}_{-q}(\beta - \eta) \varphi(\eta) [\varphi(\lambda)]^{-1}. \quad (24)$$

Очевидно, что правая часть (24) в рассматриваемой ситуации не зависит ни от λ , ни от самой φ и что на самом деле равенство (24) сводится к равенству

$$\tilde{\Phi}_q(\lambda) = \tilde{\Phi}_0(\beta_{q,A_0}^*(\lambda, \lambda)). \quad (25)$$

В найденном нами решении есть произвол, связанный с неоднозначностью выбора квазимнимой функции $\tilde{A}_0(\xi)$, содержащейся в $\tilde{\Phi}_0(\xi)$ (в обозначениях работы [2] — это та самая квазимнимая функция $A(\xi)$, которую еще нужно было найти после рассмотрения

случая $q = 0$, исследованного в этой работе). Указанным произволом нужно распорядиться таким образом, чтобы квазивещественная часть $\tilde{S}_q(\xi)$ функции $\tilde{\Phi}_q(\xi)$ имела надлежащий вид (8). Дело здесь в том, что наличие в $\tilde{\Phi}_0(\xi)$ квазимнимой компоненты в сочетаниях с ненулевыми функциями $\tilde{D}_q$ и $\tilde{D}_{-q}$ сказывается не только на квазимнимой составляющей величины $\tilde{\Phi}_q(\xi)$, но и на ее квазивещественной составляющей. Определяя величину $\tilde{A}_0(\xi)$ по (23) из условия совпадения квазивещественной части функции $\tilde{\Phi}_q(\xi)$ с правой частью соотношения (9) (см. также (10)), мы найдем тем самым и нужную нам функцию $\tilde{A}_q(\xi)$ как квазимнимую часть величины $\tilde{\Phi}_q(\xi)$ при этой избранной функции $\tilde{A}_0(\xi)$. К сожалению, мы должны ограничиться сейчас этими общими соображениями типа “теоремы существования”, так как нам не удалось написать сколько-нибудь компактные явные формулы, решающие эту сложную задачу.

Благодарности. Работа была поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 01-01-01043).

Список литературы

- [1] О. И. Завьялов. ТМФ. 2001. Т. 127. № 1. С. 75.
- [2] О. И. Завьялов. Труды МИАН им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 228. С. 136.
- [3] E. Wigner. Phys. Rev. 1932. V. 40. P. 749.
- [4] О. И. Завьялов, А. М. Малюков. ТМФ. 1999. Т. 119. С. 67.

Поступила в редакцию 20.IV.2001 г.