Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Н. Зайкин, М. Я. Пальчик, Конформно-инвариантная регуляризация и скелетные разложения в калибровочной теории, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 409–421

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf505>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 15:34:27

© 2001 г.

В. Н. Зайкин*, М. Я. Пальчик†

КОНФОРМНО-ИНВАРИАНТНАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И СКЕЛЕТНЫЕ РАЗЛОЖЕНИЯ В КАЛИБРОВОЧНОЙ ТЕОРИИ

Рассмотрена конформно-инвариантная регуляризация абелевой калибровочной теории в евклидовом пространстве четной размерности $D \geq 4$ и регуляризованные скелетные разложения для вершин и высших функций Грина. Калибровочному полю A_μ и евклидову току j_μ ставятся в соответствие регуляризованные поля A_μ^ε и j_μ^ε с масштабными размерностями $l_A^\varepsilon = 1 - \varepsilon$, $l_j^\varepsilon = D - 1 + \varepsilon$. Постулируются особые правила перехода к пределу $\varepsilon = 0$. Эти правила различны для поперечной и продольной частей поля A_μ^ε и тока j_μ^ε . Показано, что в пределе $\varepsilon = 0$ возникают конформно-инвариантные поля A_μ и j_μ , каждое из которых преобразуется по прямой сумме двух неприводимых представлений конформной группы. Показано, что при снятии регуляризации получается хорошо определенная скелетная теория, построенная из конформных двух- и трехточечных функций. Рассмотрены скелетные уравнения для поперечной части вершины и спинорного пропагатора в конформной квантовой электродинамике (КЭД). Для простоты в данной работе рассматривается абелево калибровочное поле A_μ , однако все полученные результаты очевидным образом могут быть обобщены на случай неабелевой теории.

Старшему товарищу и учителю, профессору Владимиру Яковлевичу Файнбергу в год его семидесятипятилетнего юбилея посвящается

1. Рассматривается конформно-инвариантная калибровочная теория в пространстве четной размерности $D \geq 4$. Традиционно [1], [2] для учета конформной симметрии используются скелетные разложения. Явный вид пропагаторов и вершин, входящих в скелетные графы, определяется из условия конформной симметрии теории. В результате приближенное конформное решение теории может быть записано в виде суммы конформно-инвариантных графов.

В калибровочной теории при таком подходе возникает известная трудность. Она состоит в том, что формальные выражения для конформных пропагаторов калибровочного поля A_μ и тока j_μ имеют вид (см. [1]–[3])

$$\langle A_\mu(x_1) A_\nu(x_2) \rangle \sim \partial_\mu \partial_\nu \ln x_{12}^2, \quad \langle j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) \rangle \sim (\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) (x_{12}^2)^{-D+2} \quad (1)$$

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: zaykin@lpi.ru

† Институт автоматизации и телеметрии СО РАН, Новосибирск, Россия

и не могут быть использованы для вычислений скелетных графов. Действительно, первый из них продолжен, а второй включает плохо определенный при четных $D \geq 4$ множитель $(x_{12}^2)^{-D+2}$. Эта проблема рассматривалась многими авторами [4]–[7]. В частности, в работах [4] и подробнее в [2], [3] получены конформно-инвариантные скелетные разложения. Однако использованный в этих работах сложный математический аппарат, основанный на теории представлений конформной группы, делает затруднительным интерпретацию и дальнейшее развитие этих результатов.

В данной работе предлагается простой путь решения упомянутой выше проблемы, основанный на введении конформно-инвариантной регуляризации с последующим переопределением регуляризованных полей. Переопределение полей оказывается таким, что при снятии регуляризации получают хорошо определенные выражения для скелетных графов. Полученные результаты находятся в полном соответствии с выводами работ [2], [4]. Для удобства в данной работе рассмотрено абелево поле A_μ и абелев ток j_μ . Все результаты, однако, легко обобщаются на неабелеву теорию [2], [3].

Пусть A_μ^ε и j_μ^ε – регуляризованные поля. Зададим их с помощью следующих трех условий:

1. A_μ^ε и j_μ^ε – конформные поля с масштабными размерностями

$$l_A^\varepsilon = 1 - \varepsilon, \quad l_j^\varepsilon = D - l_A^\varepsilon = D - 1 + \varepsilon. \quad (2)$$

Это означает, в частности, что при преобразованиях инверсии $Rx_\mu = -x_\mu/x^2$ поля A_μ^ε и j_μ^ε преобразуются по следующему закону [1], [2]:

$$A_\mu^\varepsilon \xrightarrow{R} (x^2)^{-1+\varepsilon} g_{\mu\nu}(x) A_\nu(Rx), \quad j_\mu^\varepsilon(x) \xrightarrow{R} (x^2)^{-D+1-\varepsilon} g_{\mu\nu}(x) j_\nu^\varepsilon(Rx), \quad (3)$$

где

$$g_{\mu\nu}(x) = \delta_{\mu\nu} - 2 \frac{x_\mu x_\nu}{x^2}. \quad (4)$$

Напомним, что нормальные размерности полей A_μ и j_μ суть $l_A = 1$ и $l_j = D - 1$, соответственно.

2. Поля A_μ^ε и j_μ^ε имеют следующее разложение по ε :

$$A_\mu^\varepsilon = A_{1\mu}^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} A_{2\mu}^\varepsilon, \quad j_\mu^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_{1\mu}^\varepsilon + j_{2\mu}^\varepsilon, \quad (5)$$

где $A_{1,2\mu}^\varepsilon$ и $j_{1,2\mu}^\varepsilon$ – хорошо определенные при $\varepsilon = 0$ поля. Ниже будет показано, что конформно-инвариантные функции, включающие поля $A_{1\mu}^\varepsilon$ или $A_{2\mu}^\varepsilon$, *различны*. То же справедливо и в отношении функций, включающих поля $j_{1\mu}^\varepsilon$ или $j_{2\mu}^\varepsilon$.

3. Поля $A_{1\mu}^\varepsilon$, $j_{1\mu}^\varepsilon$ в пределе $\varepsilon = 0$ совпадают с введенными в работе [2] неприводимыми конформными полями A_μ^{long} и j_μ^{tr} ,

$$A_{1\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = A_\mu^{\text{long}}, \quad j_{1\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = j_\mu^{\text{tr}}, \quad (6)$$

удовлетворяющими условиям

$$A_\mu^{\text{long}}(x) = \partial_\mu \varphi(x), \quad \partial_\mu j_\mu^{\text{tr}}(x) = 0, \quad (7)$$

где $\varphi(x)$ – скалярное поле нулевой размерности [1], [2]. Эти условия конформно-инвариантны.

Главные по ε члены разложения (5) запишем теперь в виде

$$A_\mu^\varepsilon|_{\varepsilon \ll 1} \simeq A_\mu^{\text{long}} + \sqrt{\varepsilon} \tilde{A}_\mu, \quad j_\mu^\varepsilon|_{\varepsilon \ll 1} \simeq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_\mu^{\text{tr}} + \tilde{j}_\mu. \quad (8)$$

Поля $\tilde{A}_\mu = A_{2\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ и $\tilde{j}_\mu = j_{2\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0}$ также совпадают с введенными в работах [2], [4] другими неприводимыми конформными полями (подробнее см. п. 3). В п. 2 показано, что поля $A_{1\mu}^\varepsilon$ и $A_{2\mu}^\varepsilon$ (и поля $j_{1\mu}^\varepsilon$, $j_{2\mu}^\varepsilon$) взаимно ортогональны, т.е.

$$\langle A_{1\mu}^\varepsilon A_{2\nu}^\varepsilon \rangle = 0, \quad \langle j_{1\mu}^\varepsilon j_{2\nu}^\varepsilon \rangle = 0, \quad (9)$$

и, следовательно, для регуляризованных пропагаторов имеют место разложения

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^\varepsilon A_\nu^\varepsilon \rangle|_{\varepsilon \ll 1} &= \langle A_\mu^{\text{long}} A_\nu^{\text{long}} \rangle + \varepsilon \langle \tilde{A}_\mu \tilde{A}_\nu \rangle + O(\varepsilon), \\ \langle j_\mu^\varepsilon j_\nu^\varepsilon \rangle|_{\varepsilon \ll 1} &= \frac{1}{\varepsilon} \langle j_\mu^{\text{tr}} j_\nu^{\text{tr}} \rangle + \langle \tilde{j}_\mu \tilde{j}_\nu \rangle + O(\varepsilon^0), \end{aligned} \quad (10)$$

где через $O(\varepsilon)$ обозначены продольные, а через $O(\varepsilon^0)$ – поперечные слагаемые, которые не дают вклада в скелетные разложения. Заметим, что поле $\tilde{A}_\mu$ включает поперечную часть калибровочного поля, но не сводится к ней, и аналогично поле $\tilde{j}_\mu$ содержит продольную часть полного евклидова тока и также не сводится к ней (см. далее формулы (18), (20)). С теоретико-полевой точки зрения разложения (5), (8) и свойство (9) можно рассматривать как следствие особой структуры перенормировки калибровочного поля в конформной теории. Напомним, что поперечной и продольной частям калибровочного поля можно сопоставить разные константы перенормировок z_3 и z'_3 . Задание регуляризованных полей в форме (5) соответствует такому выбору перенормировочных констант компонент $\tilde{A}_\mu$ и A_μ^{long} , чтобы в главном по ε порядке выполнялось условие $z_3/z'_3 \sim \varepsilon$, где $z'_3 = z'_3(\varepsilon)$ – константа перенормировки поля A_μ^{long} , а $z_3 = z_3(\varepsilon)$ – константа перенормировки поля $\tilde{A}_\mu$, включающего поперечную часть.

Ниже мы рассмотрим пропагаторы и трехточечные функции регуляризованных полей A_μ^ε , j_μ^ε , а затем исследуем скелетные графы в пределе $\varepsilon = 0$. Мы покажем, что поля $\tilde{A}_\mu$, $\tilde{j}_\mu$ дают вклад в скелетные графы наравне с полями A_μ^{long} , j_μ^{tr} , образуя конформно-инвариантные свертки,

$$\int dx \langle \dots \tilde{A}_\mu(x) \rangle \langle \tilde{j}_\mu^{\text{tr}}(x) \dots \rangle + \int dx \langle \dots A_\mu^{\text{long}}(x) \rangle \langle \tilde{j}_\mu(x) \dots \rangle, \quad (11)$$

где точки обозначают поля материи.

В то же время свертка

$$\int dx \langle \dots \tilde{A}_\mu(x) \rangle \langle \tilde{j}_\mu(x) \dots \rangle \quad (12)$$

не дает вклада в скелетные графы в пределе $\varepsilon = 0$. В формальном подходе именно эта свертка приводит к расходящимся интегралам. Отсутствие ее в графах при $\varepsilon = 0$ есть следствие асимптотического условия (8), как будет показано в п. 3.

2. Рассмотрим пропагаторы регуляризованных полей. Согласно (2) и (3) конформно-инвариантные выражения для них имеют вид

$$D_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) = \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) A_\nu^\varepsilon(x_2) \rangle = C_A (x_{12}^2)^{-1+\varepsilon} g_{\mu\nu}(x_{12}), \quad (13)$$

$$\Delta_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) = \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) j_\nu^\varepsilon(x_2) \rangle = \tilde{C}_j (x_{12}^2)^{-D+1-\varepsilon} g_{\mu\nu}(x_{12}), \quad (14)$$

где

$$C_A = \frac{1}{\alpha} \frac{(-1)^{\frac{D-2}{2}}}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})},$$

$\tilde{C}_j$ и α – нормировочные константы.

Как будет показано далее, в пределе $\varepsilon = 0$ эти выражения переходят в выражения (1). Представим (13) и (14) в виде разложений по ε и найдем вклады полей A_μ^{long} , $\tilde{A}_\mu$ и j_μ^{tr} , $\tilde{j}_\mu$ в эти разложения. Запишем правую часть (13) в виде

$$\begin{aligned} (x^2)^{-1+\varepsilon} g_{\mu\nu}(x) &= \frac{1}{2\varepsilon(1-\varepsilon)} \left[\partial_\mu \partial_\nu - \frac{\varepsilon}{D-2+2\varepsilon} \delta_{\mu\nu} \square \right] (x^2)^\varepsilon = \\ &= \frac{1}{2} \left[\left(1 + \frac{D-3}{D-2} \varepsilon \right) \partial_\mu \partial_\nu - \frac{\varepsilon}{D-2} (\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \right] \ln x^2 + O(\varepsilon), \end{aligned}$$

откуда следует

$$D_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) = \left(1 + \varepsilon \frac{D-3}{D-2} \right) D_{\mu\nu}^{\text{long}}(x_{12}) + \varepsilon D_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x_{12}) + O(\varepsilon), \quad (15)$$

где

$$D_{\mu\nu}^{\text{long}}(x) = \frac{1}{2} C_A \partial_\mu \partial_\nu \ln x^2, \quad D_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x) = -\frac{1}{2(D-2)} C_A (\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \ln x^2. \quad (16)$$

Сравнивая этот результат с разложением (10) для пропагатора $D_{\mu\nu}^\varepsilon$, мы, во-первых, убеждаемся в справедливости условия ортогональности (9) для полей $A_{1\mu}^\varepsilon$ и $A_{2\mu}^\varepsilon$, а во-вторых, находим, что

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^{\text{long}}(x_1) A_\nu^{\text{long}}(x_2) \rangle &= D_{\mu\nu}^{\text{long}}(x_{12}), \\ \langle \tilde{A}_\mu(x_1) \tilde{A}_\nu(x_2) \rangle &= D_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x_{12}) - \frac{D-3}{D-2} D_{\mu\nu}^{\text{long}}(x_{12}). \end{aligned} \quad (17)$$

Пропагатор (13) в пределе $\varepsilon = 0$ удовлетворяет “калибровочному” условию

$$\alpha \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \square^{\frac{D-2}{2}} \partial_\nu D_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) = \alpha \square^{\frac{D-2}{2}} \partial_\nu D_{\mu\nu}^{\text{long}}(x_{12}) = \partial_\mu \delta(x_{12}). \quad (18)$$

Рассмотрим теперь функцию Грина (14). Действуя аналогично, представим ее в виде

$$\begin{aligned} \Delta_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) &= \frac{\tilde{C}_j}{2(D-1+\varepsilon)(D-2+2\varepsilon)} \times \\ &\times \left[(\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) (x_{12}^2)^{-D+2-\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{D-2+\varepsilon} \partial_\mu \partial_\nu (x_{12}^2)^{-D+2-\varepsilon} \right]. \end{aligned} \quad (19)$$

Главный по ε член разложения можно получить с помощью соотношения [8]

$$\frac{1}{(x^2)^{\frac{D}{2}+k+\varepsilon}} \Big|_{\varepsilon \rightarrow 0} = -\frac{1}{\varepsilon} \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{4^k \Gamma(\frac{D}{2} + k) \Gamma(k+1)} \square^k \delta(x).$$

Из (19) находим

$$\Delta_{\mu\nu}^\varepsilon(x_{12}) = \frac{1}{\varepsilon} \Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x_{12}) + \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(x_{12}) + O(\varepsilon^0), \quad (20)$$

где

$$\Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x_{12}) = -\frac{(D-2)\pi^{\frac{D}{2}}}{2^{D-2}\Gamma(D)\Gamma(\frac{D}{2})} \tilde{C}_j (\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \square^{\frac{D-4}{2}} \delta(x_{12}). \quad (21)$$

Из (19) и (20) следует, что в пределе $\varepsilon = 0$ имеет место тождество Уорда

$$\partial_\mu^{x_1} \langle j_\mu(x_1) j_\nu(x_2) \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \partial_\mu^{x_1} \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) j_\nu^\varepsilon(x_2) \rangle = \partial_\mu^{x_1} \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(x_{12}) = C_j \partial_\nu \square^{\frac{D-2}{2}} \delta(x_{12}), \quad (22)$$

где

$$C_j = \frac{\pi^{\frac{D}{2}}}{2^{D-2}\Gamma(\frac{D}{2})\Gamma(D)} \tilde{C}_j.$$

Заметим, что разложение (20) для пропагатора $\Delta_{\mu\nu}^\varepsilon$ находится в полном соответствии с условиями (9) и (10).

Рассмотрим теперь регуляризованные трехточечные функции Грина полей A_μ^ε и j_μ^ε . Пусть $\psi(x)$ – спинорное поле с масштабной размерностью d . В соответствии с (8) имеем при малых ε

$$\langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle \Big|_{\varepsilon \ll 1} = \langle A_\mu^{\text{long}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle + \sqrt{\varepsilon} \langle \tilde{A}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle, \quad (23)$$

$$\langle j_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle \Big|_{\varepsilon \ll 1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \langle j_\mu^{\text{tr}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle + \langle \tilde{j}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle. \quad (24)$$

Конформно-инвариантные функции Грина, входящие в правые части этих выражений, имеют вид [1], [2]

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^{\text{long}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= G_\mu^{\text{long}}(x_1 x_2 x_3) = \\ &= -\frac{1}{2} g^{\text{long}} \partial_\mu^{x_1} \left[\frac{\hat{x}_{23}}{(x_{23}^2)^{d+\frac{1}{2}}} \ln \frac{x_{12}^2}{x_{13}^2} \right] = \\ &= g^{\text{long}} \frac{\hat{x}_{23}}{(x_{23}^2)^{d+\frac{1}{2}}} \lambda_\mu^{x_1}(x_2 x_3), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\langle \tilde{A}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \tilde{G}_\mu(x_1 x_2 x_3) = g \frac{1}{(x_{23}^2)^{d-\frac{1}{2}}} \frac{\hat{x}_{21} \gamma_\mu \hat{x}_{13}}{x_{12}^2 x_{13}^2}, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \langle j_\mu^{\text{tr}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= Q_\mu^{\text{tr}}(x_1 x_2 x_3) = \frac{\hat{x}_{21}}{(x_{12}^2)^{\frac{D}{2}}} \gamma_\mu \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(x_{23}^2)^{d-\frac{D-1}{2}}} - \\ &- \lambda_\mu^{x_1}(x_2 x_3) (x_{12}^2 x_{13}^2)^{-\frac{D-2}{2}} \frac{\hat{x}_{23}}{(x_{23}^2)^{d-\frac{D-3}{2}}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \langle \tilde{j}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= \tilde{Q}_\mu(x_1 x_2 x_3) = \\ &= -e \frac{\Gamma(\frac{D}{2})}{\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\hat{x}_{21}}{(x_{12}^2)^{\frac{D}{2}}} \gamma_\mu \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{\frac{D}{2}}} \frac{1}{(x_{23}^2)^{d-\frac{D-1}{2}}}, \end{aligned} \quad (28)$$

где

$$\lambda_\mu^{x_1}(x_2 x_3) = \frac{(x_{21})_\mu}{x_{21}^2} - \frac{(x_{31})_\mu}{x_{31}^2}, \quad g^{\text{long}} = (-1)^{\frac{D-2}{2}} \frac{1}{2^{D-1} \pi^{\frac{D}{2}} \Gamma(\frac{D}{2})} \left(\frac{e}{\alpha} \right),$$

g , e и α – нормировочные константы.

Функция Грина $\langle A_\mu^{\text{long}} \psi \bar{\psi} \rangle$ продольна, а функция $\langle j_\mu^{\text{tr}} \psi \bar{\psi} \rangle$ поперечна. Регуляризованная функция Грина $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ в пределе $\varepsilon = 0$ удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} \alpha \lim_{\varepsilon=0} \square_{x_1}^{\frac{D-2}{2}} \partial_\mu^{x_1} \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= \alpha \square_{x_1}^{\frac{D-2}{2}} \partial_\mu^{x_1} \langle A_\mu^{\text{long}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \\ &= -e [\delta(x_{12}) - \delta(x_{13})] \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle. \end{aligned} \quad (29)$$

Функция Грина $\langle j_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ в пределе $\varepsilon = 0$ удовлетворяет тождеству Уорда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon=0} \partial_\mu^{x_1} \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= \partial_\mu^{x_1} \langle \tilde{j}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \\ &= -e [\delta(x_{12}) - \delta(x_{23})] \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (30)$$

Рассмотрим точные выражения для функций Грина $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ и $\langle j_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ при произвольном ε . Напомним, что размерности полей A_μ^ε и j_μ^ε равны $l_A^\varepsilon = 1 - \varepsilon$ и $l_j^\varepsilon = D - 1 + \varepsilon$, соответственно (см. (2)).

Как известно, существуют две конформно-инвариантные функции $G_{1\mu}^\varepsilon$ и $G_{2\mu}^\varepsilon$, преобразующиеся при конформных преобразованиях так же, как $\langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle$,

$$G_{1\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) = g^{\text{long}} \frac{\hat{x}_{23}}{(x_{23}^2)^{d+\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}}} (x_{12}^2 x_{13}^2)^{\frac{\varepsilon}{2}} \lambda_\mu^{x_1}(x_2 x_3), \quad (31)$$

$$G_{2\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) = g \frac{\hat{x}_{21}}{(x_{12}^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} \gamma_\mu \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{1-\frac{\varepsilon}{2}}} (x_{23}^2)^{-d+\frac{1-\varepsilon}{2}}, \quad (32)$$

и аналогично две инвариантные функции $Q_{1\mu}^\varepsilon$, $Q_{2\mu}^\varepsilon$, преобразующиеся так же, как $\langle j_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle$,

$$\begin{aligned} Q_{1\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) &= \frac{\hat{x}_{21}}{(x_{12}^2)^{\frac{D+\varepsilon}{2}}} \gamma_\mu \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{\frac{D+\varepsilon}{2}}} (x_{23}^2)^{-d+\frac{D-1+\varepsilon}{2}} - \\ &- \lambda_\mu^{x_1}(x_2 x_3) (x_{12}^2 x_{13}^2)^{-\frac{D-2+\varepsilon}{2}} \frac{\hat{x}_{23}}{(x_{23}^2)^{d-\frac{D-3+\varepsilon}{2}}}, \end{aligned} \quad (33)$$

$$Q_{2\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) = -e \frac{\Gamma(\frac{D+\varepsilon}{2})}{\pi^{\frac{D}{2}}} \frac{\hat{x}_{21}}{(x_{12}^2)^{\frac{D+\varepsilon}{2}}} \gamma_\mu \frac{\hat{x}_{13}}{(x_{13}^2)^{\frac{D+\varepsilon}{2}}} (x_{23}^2)^{-d+\frac{D-1+\varepsilon}{2}}. \quad (34)$$

При $\varepsilon = 0$ эти функции переходят в функции (25)–(28), т.е.

$$G_{1\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = G_\mu^{\text{long}}, \quad G_{2\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \tilde{G}_\mu, \quad Q_{1\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = Q_\mu^{\text{tr}}, \quad Q_{2\mu}^\varepsilon|_{\varepsilon=0} = \tilde{Q}_\mu. \quad (35)$$

Определим теперь регуляризованные конформно-инвариантные функции $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ и $\langle j_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ соотношениями

$$G_\mu^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) = \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = G_{1\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) + \sqrt{\varepsilon} G_{2\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3), \quad (36)$$

$$Q_\mu^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) = \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} Q_{1\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3) + Q_{2\mu}^\varepsilon(x_1 x_2 x_3). \quad (37)$$

В силу формул (35) они удовлетворяют всем требованиям (5)–(8), а при $\varepsilon \ll 1$ совпадают с (23) и (24). Функции Грина (36), (37) удовлетворяют так называемым “условиям ампутации” (при подходящем выборе нормировки)

$$\int dx \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) A_\nu^\varepsilon(x) \rangle \langle j_\nu^\varepsilon(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle, \quad (38)$$

$$\int dx \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) j_\nu^\varepsilon(x) \rangle \langle A_\nu^\varepsilon(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle, \quad (39)$$

$$\int dx \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) j_\rho^\varepsilon(x) \rangle \langle A_\rho^\varepsilon(x) A_\nu^\varepsilon(x_2) \rangle = \delta_{\mu\nu} \delta(x_1 - x_2). \quad (40)$$

Эти утверждения можно проверить непосредственными вычислениями, если воспользоваться интегральными соотношениями, приведенными в приложении XII книги [2]. Условия ампутации (38), (39) выполняются также для высших функций Грина (при некоторых общих предположениях относительно парциальных разложений, см. [2], [4]) и могут быть записаны в операторной форме

$$\int dy \langle j_\mu^\varepsilon(x) j_\nu^\varepsilon(y) \rangle A_\nu^\varepsilon(y) = j_\mu^\varepsilon(x), \quad \int dy \langle A_\mu^\varepsilon(x) A_\nu^\varepsilon(y) \rangle j_\nu^\varepsilon(y) = A_\mu^\varepsilon(x). \quad (41)$$

Первое из уравнений (41) в пределе $\varepsilon = 0$ эквивалентно полевым уравнениям в α -калибровке. Действительно, подставляя (20) и (23) в левую часть (39), находим

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int dx \langle j_\mu^\varepsilon(x_1) j_\nu^\varepsilon(x) \rangle \langle A_\nu^\varepsilon(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \\ = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \int dx \Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}(x_1 - x) \langle \tilde{A}_\nu(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle + \\ + \int dx \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(x_1 - x) \langle A_\nu^{\text{long}}(x) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (42)$$

Сравнивая полученное выражение с правой частью (39), находим, учитывая (21) и (23),

$$(\delta_{\mu\nu} \square_{x_1} - \partial_\mu^{x_1} \partial_\nu^{x_1}) \square_{x_1}^{\frac{D-4}{2}} \langle \tilde{A}_\nu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \langle j_\mu^{\text{tr}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle, \quad (43)$$

$$\begin{aligned} \alpha \partial_\mu^{x_1} \square_{x_1}^{\frac{D-2}{2}} \langle A_\mu^{\text{long}}(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \partial_\mu^{x_1} \langle \tilde{j}_\mu(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle = \\ = -e [\delta(x_{12}) - \delta(x_{13})] \langle \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle. \end{aligned} \quad (44)$$

Аналогичные уравнения будут иметь место при $\varepsilon = 0$ и для всех высших функций Грина, и, следовательно, уравнения (43), (44) можно записать в операторной форме

$$(\delta_{\mu\nu} \square - \partial_\mu \partial_\nu) \square^{\frac{D-4}{2}} \tilde{A}_\nu(x) = j_\mu^{\text{tr}}(x), \quad \alpha \partial_\mu \square^{\frac{D-2}{2}} A_\mu^{\text{long}}(x) = \partial_\mu \tilde{j}_\mu(x). \quad (45)$$

При $D = 4$ уравнения (45) совпадают с полевыми уравнениями в КЭД в α -калибровке (см. также работы [2], [4]).

3. Рассмотрим теперь скелетные графы. Нас будут интересовать прежде всего интегралы по внутренней линии, соответствующей калибровочному полю. Использование формальных выражений (1) и (25)–(29) для их вычисления привело бы к упомянутым в начале статьи трудностям. Воспользуемся поэтому полученными выше регуляризованными выражениями (13), (14) и (31)–(34). Запишем типичный интеграл по внутренней линии в виде

$$B^\varepsilon(x_1 x_2 x_3 x_4) = \int dz_1 dz_2 \langle A_\mu^\varepsilon(z_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \langle j_\mu^\varepsilon(z_1) j_\nu^\varepsilon(z_2) \rangle \langle A_\nu^\varepsilon(z_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle. \quad (46)$$

Выражение в правой части (46) конформно-инвариантно при всех ε . Используя (20) и (23), находим

$$\begin{aligned} B(x_1 x_2 x_3 x_4) &= \lim_{\varepsilon=0} B^\varepsilon(x_1 x_2 x_3 x_4) = \\ &= \int dz_1 dz_2 \tilde{G}_\mu(z_1 x_1 x_2) \Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}(z_{12}) \tilde{G}_\nu(z_2 x_3 x_4) + \\ &+ \int dz_1 dz_2 G_\mu^{\text{long}}(z_1 x_1 x_2) \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(z_{12}) G_\nu^{\text{long}}(z_2 x_3 x_4). \end{aligned} \quad (47)$$

Можно показать, что оба интеграла в (47) сходятся. Функция $B(x_1 x_2 x_3 x_4)$ может быть также записана в терминах функций Грина (27), (28) и (17). Для этого воспользуемся соотношениями (39), (40) и перепишем правую часть соотношения (46) в форме

$$B^\varepsilon(x_1 x_2 x_3 x_4) = \int dz_1 dz_2 \langle j_\mu^\varepsilon(z_1) \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle \langle A_\mu^\varepsilon(z_1) A_\nu^\varepsilon(z_2) \rangle \langle j_\nu^\varepsilon(z_2) \psi(x_3) \bar{\psi}(x_4) \rangle, \quad (48)$$

где функции $\langle j_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ и $\langle A_\mu^\varepsilon A_\nu^\varepsilon \rangle$ определены формулами (37) и (13).

В пределе $\varepsilon = 0$ находим, учитывая (24) и (15), что

$$\begin{aligned} B(x_1 x_2 x_3 x_4) &= \lim_{\varepsilon=0} B^\varepsilon(x_1 x_2 x_3 x_4) = \\ &= \int dz_1 dz_2 Q_\mu^{\text{tr}}(z_1 x_1 x_2) \tilde{D}_{\mu\nu}(z_{12}) Q_\nu^{\text{tr}}(z_2 x_3 x_4) + \\ &+ \int dz_1 dz_2 \tilde{Q}_\mu(z_1 x_1 x_2) D_{\mu\nu}^{\text{long}}(z_{12}) \tilde{Q}_\nu(z_2 x_3 x_4), \end{aligned} \quad (49)$$

где функции Q_μ^{tr} , $\tilde{Q}_\mu$ и $\tilde{D}_{\mu\nu}$, $D_{\mu\nu}^{\text{long}}$ даются формулами (27), (28) и (17).

Существенно, что выражения (47) и (49) включают в себя только свертки (11), тогда как свертка типа (12) не дает в них вклада. При построении скелетных графов можно пользоваться любым из представлений (47) или (49) для функции $B(x_1 x_2 x_3 x_4)$.

Теоретико-групповой смысл этих утверждений может быть понят, если воспользоваться результатами работ [2], [4] (подробнее см. [9]). Как показано в этих работах,

появление двух различных конформных калибровочных полей $\tilde{A}_\mu$, A_μ^{long} и двух конформных токов j_μ^{tr} , $\tilde{j}_\mu$ связано с особой структурой представлений конформной группы в целых точках $l_A = 1$, $l_j = D - 1$ [10], [11]. Поле A_μ^{long} принадлежит инвариантному подпространству H_0^A полного пространства H^A векторных полей с размерностью $l_A = 1$. Оно преобразуется по неприводимому представлению T_0^A , действующему в H_0^A . Поле $\tilde{A}_\mu$ является представителем класса эквивалентности, принадлежащего фактор-пространству $\tilde{H}^A = H^A / H_0^A$. Оно преобразуется по действующему в $\tilde{H}^A$ неприводимому представлению $\tilde{T}^A$, которое неэквивалентно представлению T_0^A . Эта конструкция подробно рассмотрена в книге [2]. Полное калибровочное поле A_μ является прямой суммой полей $\tilde{A}_\mu$ и A_μ^{long} и преобразуется по прямой сумме T_A неприводимых представлений T_0^A и $\tilde{T}^A$. Представление T_A действует в прямой сумме пространств H_0^A и $\tilde{H}^A$. Запишем это в виде

$$A = \tilde{A} \oplus A^{\text{long}} \subset H_A = \tilde{H}^A \oplus H_0^A, \quad T_A = \tilde{T}^A \oplus T_0^A. \quad (50)$$

Скалярное произведение двух полей $A \subset H_A$ задается [2], [4], [9] в виде суммы двух слагаемых,

$$(A, A) = (\tilde{A}, \tilde{A})_1 + (A^{\text{long}}, A^{\text{long}})_2, \quad (51)$$

с ядрами $\Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}$ и $\tilde{\Delta}_{\mu\nu}$,

$$\begin{aligned} (\tilde{A}, \tilde{A})_1 &= \int dz_1 dz_2 \tilde{A}_\mu(z_1) \Delta_{\mu\nu}^{\text{tr}}(z_{12}) \tilde{A}_\nu(z_2), \\ (A^{\text{long}}, A^{\text{long}})_2 &= \int dz_1 dz_2 A_\mu^{\text{long}}(z_1) \tilde{\Delta}_{\mu\nu}(z_{12}) A_\nu^{\text{long}}(z_2). \end{aligned} \quad (52)$$

Возвращаясь к (46), (47), мы можем рассматривать поле A_μ^ε при $\varepsilon \rightarrow 0$ как элемент пространства H_A , задавая скалярное произведение по формуле (при этом надо учесть, что $A_\mu^\varepsilon|_{\varepsilon \ll 1} \simeq A_\mu^{\text{long}} + \sqrt{\varepsilon} \tilde{A}_\mu$)

$$(A, A) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (A^\varepsilon, A^\varepsilon)_\varepsilon = (\tilde{A}_\mu, \tilde{A}_\mu)_1 + (A_\mu^{\text{long}}, A_\mu^{\text{long}})_2, \quad (53)$$

где

$$(A^\varepsilon, A^\varepsilon)_\varepsilon = \int dz_1 dz_2 A_\mu^\varepsilon(z_1) \Delta_{\mu\nu}^\varepsilon(z_{12}) A_\nu^\varepsilon(z_2). \quad (54)$$

Таким образом, поле $A_\mu^\varepsilon|_{\varepsilon \ll 1}$ можно рассматривать как новую реализацию рассмотренного в работах [2], [4], [9] представления T_A (см. также соотношение (46)).

Аналогичным образом поперечный ток j_μ^{tr} принадлежит инвариантному подпространству H_0^j пространства H^j векторных полей с размерностью $l_j = D - 1$. В пространстве H_0^j задано неприводимое представление T_0^j . Другое неприводимое представление $\tilde{T}^j$, неэквивалентное T_0^j , задано в фактор-пространстве $\tilde{H}^j = H^j / H_0^j$, реализованном как пространство токов $\tilde{j}_\mu$. Введем полный ток j_μ , задавая его как прямую сумму токов j_μ^{tr} и $\tilde{j}_\mu$ (подробнее см. [2], [4], [9]). Аналогично разложениям (50) получим

$$j = j^{\text{tr}} \oplus \tilde{j} \in H_j = H_0^j \oplus \tilde{H}^j, \quad T_j = T_0^j \oplus \tilde{T}^j. \quad (55)$$

Скалярное произведение на пространстве H_j имеет вид

$$(j, j) = (j^{\text{tr}}, j^{\text{tr}})_1 + (\tilde{j}, \tilde{j})_2, \quad (56)$$

где

$$\begin{aligned} (j^{\text{tr}}, j^{\text{tr}})_1 &= \int dz_1 dz_2 j_\mu^{\text{tr}}(z_1) \tilde{D}_{\mu\nu}(z_{12}) j_\nu^{\text{tr}}(z_2), \\ (\tilde{j}, \tilde{j})_2 &= \int dz_1 dz_2 \tilde{j}_\mu(z_1) D_{\mu\nu}^{\text{long}}(z_{12}) \tilde{j}_\nu(z_2). \end{aligned} \quad (57)$$

Следовательно, регуляризованный ток

$$j_\mu^\varepsilon|_{\varepsilon \ll 1} \simeq \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_\mu^{\text{tr}} + \tilde{j}_\mu$$

можно рассматривать как элемент пространства H_j в новой реализации, а свертку (49) как скалярное произведение на нем,

$$(j, j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (j^\varepsilon, j^\varepsilon)_\varepsilon = (j^{\text{tr}}, j^{\text{tr}})_1 + (\tilde{j}, \tilde{j})_2, \quad (58)$$

где

$$(j^\varepsilon, j^\varepsilon)_\varepsilon = \int dz_1 dz_2 j_\mu^\varepsilon(z_1) D_{\mu\nu}^\varepsilon(z_{12}) j_\nu^\varepsilon(z_2). \quad (59)$$

Мы получили, таким образом, регуляризованную скелетную теорию, хорошо определенную в пределе $\varepsilon = 0$. Остается рассмотреть предельный переход для внешних линий, соответствующих полю $A_\mu^\varepsilon = A_{1\mu}^\varepsilon + \sqrt{\varepsilon} A_{2\mu}^\varepsilon$. Каждый граф с такими внешними линиями эквивалентен совокупности скелетных графов с двумя типами внешних линий: $A_{1\mu}^\varepsilon$ и $A_{2\mu}^\varepsilon$. Внутренним линиям во всех таких графах по-прежнему соответствует поле A_μ^ε . Теперь после перехода к полям $A_{1\mu}^\varepsilon$ и $A_{2\mu}^\varepsilon$ на внешних линиях можно положить $\varepsilon = 0$ на всех линиях, как внутренних, так и внешних. На каждой внутренней линии мы получим выражение (47), на внешних — неприводимые конформные поля $\tilde{A}_\mu, A_\mu^{\text{long}}$. В результате мы имеем скелетную теорию, определяющую функции Грина этих полей. Заметим, что продольную часть

$$\tilde{A}_\mu^{\text{long}} = \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \tilde{A}_\nu$$

можно опустить во всех графах. Действительно, на внутренних линиях поле $\tilde{A}_\mu$ входит в виде свертки

$$\int dx \tilde{A}_\mu(x) j_\mu^{\text{tr}}(x)$$

и, следовательно, поле $\tilde{A}_\mu^{\text{long}}$ исчезает. На внешних линиях продольная часть $\tilde{A}_\mu^{\text{long}}$ исчезает при переходе к ампутированным вершинам (см. (41), (42)). Следовательно, во всех графах можно сделать замену

$$\begin{aligned} \tilde{A}_\mu &\rightarrow \tilde{A}_\mu^{\text{tr}}, \quad \text{или} \\ \tilde{D}_{\mu\nu} &\rightarrow \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{\partial_\mu \partial_\rho}{\square} \right) \tilde{D}_{\rho\nu}, \quad \langle \tilde{A}_\mu \psi \bar{\psi} \rangle \rightarrow \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{\partial_\mu \partial_\rho}{\square} \right) \langle \tilde{A}_\rho \psi \bar{\psi} \rangle. \end{aligned}$$

Введем теперь калибровочное поле

$$A_\mu(x) = \left(\delta_{\mu\rho} - \frac{\partial_\mu \partial_\rho}{\square} \right) \tilde{A}_\rho + A_\mu^{\text{long}}. \quad (60)$$

Все функции Грина этого поля очевидным образом выражаются через суммы построенных выше скелетных графов. Это поле, как показано в работах [2], [4], [9], преобразуется по приводимому представлению T_A в особой реализации конформных преобразований (см. (50)). В этой работе мы рассмотрели другую реализацию калибровочного поля – в виде пары конформных полей $\tilde{A}_\mu$ и A_μ^{long} . В отличие от (60) она сохраняет явную ковариантность скелетной теории относительно обычных конформных преобразований, (см. (3) при $\varepsilon = 0$).

Полученную выше скелетную теорию можно переписать в форме “ампутированных” функций Грина. Рассмотрим опять скелетные графы при $\varepsilon \neq 0$ и “ампутируем” внешние концы, используя условие (39). На внутренних линиях перейдем к выражению (48). Внешним линиям теперь соответствует ток

$$j_\mu^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} j_{1\mu}^\varepsilon + j_{2\mu}^\varepsilon.$$

Перейдем, как и выше, к скелетным графам с двумя типами внешних линий $j_{1\mu}^\varepsilon$ и $j_{2\mu}^\varepsilon$ и рассмотрим предел $\varepsilon = 0$ в каждом из графов. В результате получим скелетную теорию, построенную из функций Грина (23), (24) и пропагаторов (16). Внешним линиям при $\varepsilon = 0$ соответствуют конформные токи j_μ^{tr} , $\tilde{j}_\mu$. Заметим, что поперечная часть тока $\tilde{j}_\mu$ не дает вклада в скелетные графы, так как поле $\tilde{j}_\mu$ входит в них только в виде свертка

$$\int dx \tilde{j}_\mu A_\mu^{\text{long}}.$$

Мы можем, следовательно, опустить нефизическую [2] поперечную часть

$$j_\mu^{\text{tr}} = \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \right) \tilde{j}_\nu$$

во всех графах. Введем полный евклидов ток

$$j_\mu(x) = j_\mu^{\text{tr}}(x) + \frac{\partial_\mu \partial_\nu}{\square} \tilde{j}_\nu(x). \quad (61)$$

Все функции Грина этого тока могут быть выражены через суммы построенных выше скелетных графов. Ток (61) преобразуется по приводимому представлению T_j в особой реализации конформных преобразований, рассмотренной в работах [2], [4].

Нетрудно видеть, что полученная таким образом конформная скелетная теория калибровочно-инвариантна. Это легко проверяется для каждого скелетного графа, если воспользоваться тождеством Уорда (30) для внешних линий, соответствующих току.

4. Рассмотрим в заключение скелетные уравнения КЭД. Регуляризованное уравнение для функции Грина $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ в главном приближении имеет вид (“трехгаммное” приближение)

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= \int dy_1 dy_2 dy_3 dz_1 dz_2 \langle j_\nu^\varepsilon(z_1) j_\rho^\varepsilon(z_2) \rangle \langle A_\nu^\varepsilon(z_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(y_4) \rangle \times \\ &\times G^{-1}(y_{41}) \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \rangle G^{-1}(y_{23}) \langle A_\rho(z_2) \psi(y_3) \bar{\psi}(x_3) \rangle, \end{aligned} \quad (62)$$

где

$$G(x_{12}) = \langle \psi(x_1) \bar{\psi}(x_2) \rangle = \frac{\hat{x}_{12}}{(x_{12}^2)^{d+\frac{1}{2}}}.$$

Вследствие конформной симметрии координатное выражение, возникающее в правой части после вычисления интегралов, должно совпадать с координатным выражением для функции $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$. Следовательно, после отделения координатной зависимости уравнение (62) сводится к алгебраическим уравнениям для безразмерных параметров (подробнее см. [2])

$$e, g, d, \alpha, \quad (63)$$

где g и e – нормировочные константы в (26) и (28), d – размерность спинорного поля, α – калибровочный параметр в (44). В пределе $\varepsilon = 0$ мы должны получить из (62) два уравнения: одно для функции $\langle \tilde{A}_\mu \psi \bar{\psi} \rangle$, другое для функции $\langle A_\mu^{\text{long}} \psi \bar{\psi} \rangle$.

Рассмотрим переход к пределу $\varepsilon \rightarrow 0$. Полагая $\varepsilon = 0$ на внутренней фотонной линии в (62), получим

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(x_2) \bar{\psi}(x_3) \rangle &= \int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 \langle A_\mu^\varepsilon(x_1) \psi(y_1) \bar{\psi}(y_2) \rangle \times \\ &\times G^{-1}(y_{23}) B(y_3 x_3 x_2 y_4) G^{-1}(y_{41}), \end{aligned} \quad (64)$$

где величина $B(y_3 x_3 x_2 y_4)$ дается выражением (47). Теперь положим $\varepsilon \rightarrow 0$ на внешней фотонной линии. Функцию $\langle A_\mu^\varepsilon \psi \bar{\psi} \rangle$ при $\varepsilon \ll 1$, входящую в левую и правую части уравнения, представим в виде (23). Приравнявая коэффициенты в нулевом и первом порядках разложения по $\sqrt{\varepsilon}$, получим два уравнения

$$\tilde{G}_\mu(x_1 x_2 x_3) = \int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 \tilde{G}_\mu(x_1 y_1 y_2) G^{-1}(y_{23}) B(y_3 x_3 x_2 y_4) G^{-1}(y_{41}), \quad (65)$$

$$G_\mu^{\text{long}}(x_1 x_2 x_3) = \int dy_1 dy_2 dy_3 dy_4 G_\mu^{\text{long}}(x_1 y_1 y_2) G^{-1}(y_{23}) B(y_3 x_3 x_2 y_4) G^{-1}(y_{41}), \quad (66)$$

где $\tilde{G}_\mu$ и G_μ^{long} – функции (26), (25).

Можно показать, что интегралы в правых частях (65), (66) могут быть преобразованы к виду

$$f_1(e, g, d, \alpha) \tilde{G}_\mu(x_1 x_2 x_3) \quad (67)$$

и

$$f_2(e, g, d, \alpha) G_\mu^{\text{long}}(x_1 x_2 x_3), \quad (68)$$

соответственно, где функции f_1 и f_2 представляют собой интегралы от гипергеометрических функций, параметры которых зависят только от e, g, d, α . Подобное представление было получено авторами при рассмотрении “трехгаммного” приближения в скалярной теории. Выражения для функций f_1 и f_2 будут даны в другой работе. Вычисляя интегралы в каждом из уравнений и сокращая координатную зависимость, получим два уравнения для параметров (63). Эти уравнения определяют зависимость [2] констант e, g и размерности d от калибровочного параметра α . Второе из возникающих уравнений относится к калибровочному сектору. Оно эквивалентно уравнению для пропагатора $\langle \psi \bar{\psi} \rangle$. В этом можно убедиться, если подействовать производной $\partial_\mu \square_{x_1}^{\frac{D-2}{2}}$ на обе части уравнения (66) и воспользоваться затем калибровочным условием (44) при $D = 4$. Отметим в заключение, что уравнения (65) и (66) можно переписать в виде уравнений для функции Грина $\langle A_\mu \psi \bar{\psi} \rangle$, где A_μ – поле (60).

Благодарности. Данная статья является завершением работы, начатой по инициативе академика Е. С. Фрадкина. Основные результаты были получены авторами совместно с ним в 1999 г. Авторы статьи выражают благодарность Российскому фонду фундаментальных исследований за поддержку (грант № 99-02-18414). Один из авторов (В.Н.З.) также выражает благодарность INTAS (грант № 99-1-590).

Список литературы

- [1] *I. T. Todorov, M. G. Mintchev, V. B. Petkova.* Conformal Invariance in Quantum Field Theory. Piza: Scuola Normale Superiore, 1978.
- [2] *E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik.* Conformal Quantum Field Theory in D -dimensions. Dordrecht: Kluwer Acad. Publishers, 1996.
- [3] *E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik.* Phys. Rep. 1998. V. 300. P. 1.
- [4] *M. Ya. Palchik.* J. Phys. 1983. V. 16. P. 1523; *A. A. Кожеевников, М. Я. Пальчик, А. А. Померанский.* ЯФ. 1983. Т. 37. С. 481; *E. S. Fradkin, A. A. Kozhevnikov, M. Ya. Palchik, A. A. Pomeranskii.* Commun. Math. Phys. 1983. V. 91. P. 52.
- [5] *B. Biniger, C. Fronsdal, W. Heidenreich.* J. Math. Phys. 1983. V. 24. P. 2828.
- [6] *Р. П. Зайков.* ТМФ. 1985. Т. 65. № 1. С. 70.
- [7] *P. Furlan, V. B. Petkova, G. M. Sotkov, I. T. Todorov.* Nuovo Cim. 1985. V. 8. P. 1; *V. B. Petkova, G. M. Sotkov, I. T. Todorov.* Commun. Math. Phys. 1985. V. 97. P. 227.
- [8] *И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Н. Я. Виленкин.* Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. М.: Физматгиз, 1962.
- [9] *E. S. Fradkin, M. Ya. Palchik.* Conformally invariant Green functions of current and energy-momentum tensor in spaces of even dimension $D \geq 4$. hep-th/9712045.
- [10] *V. K. Dobrev, G. Mack, V. B. Petkova, S. G. Petkova, I. T. Todorov.* Harmonic Analysis on the n -dimensional Lorentz Group and Its Application to Conformal Quantum Field Theory. Lect. Notes Phys. V. 63. Berlin: Springer, 1977.
- [11] *А. У. Климык.* Матричные элементы и коэффициенты Клебша–Гордана представлений групп. Киев: Наукова думка, 1979.

Поступила в редакцию 20.IV.2001 г.