Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. В. Левин, В. П. Павлов, Теоретико-полевой метод восстановления тензора напряжений в Земле с подвижным ядром, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 439–445

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf507>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:59:54

ТЕОРЕТИКО-ПОЛЕВОЙ МЕТОД ВОССТАНОВЛЕНИЯ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ В ЗЕМЛЕ С ПОДВИЖНЫМ ЯДРОМ

Предложен метод восстановления тензора напряжений в земной коре, учитывающий в рамках теории возмущений влияние перемещений твердого ядра Земли. В первом порядке теории возмущений плотность и давление оказываются функциями суммы потенциалов всех учитываемых сил. Даны оценки полного изменения свободной энергии. Вычислена широтная зависимость плотности свободной энергии.

Замечательному ученому и человеку
Владимиру Яковлевичу Файнбергу.

1. ВВЕДЕНИЕ

Согласно современным геофизическим представлениям твердое внутреннее ядро Земли способно перемещаться в окружающем расплавленном веществе жидкого внешнего ядра под влиянием приливных сил Луны и Солнца [1]–[3]. Перемещение ядра и соответствующее смещение центра тяжести Земли должно приводить к смещению оси ее вращения, которое проявляется как чандлеровское “качание” географического полюса. Это явление рассматривалось как возможный источник деформаций земной коры [4], проводились оценки связи вариаций вращения Земли с землетрясениями [5]–[9].

Целью данной работы является оценка влияния чандлеровских перемещений твердого ядра на напряженное состояние твердой оболочки Земли и оценка соответствующего энерговыделения. Мы исходим из современных представлений о структурной модели Земли – сфероида, состоящего из твердой оболочки с заполненной вязкой жидкостью сферической полостью, внутри которой имеется более плотное твердое ядро. Общая задача об описании движения твердого ядра под действием притяжения Солнца и Луны и о вычислении соответствующих перемещений полюса весьма сложна. Мы будем считать заданными (по данным измерений) эти перемещения, связывая их с изменениями положения центра тяжести Земли и проходящей через этот центр тяжести оси ее вращения. Здесь мы учтем только влияние чандлеровских перемещений и в связи с этим

* Институт океанологии им. П.П. Ширшова РАН, Москва, Россия

† Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, Москва, Россия

не будем учитывать приливных явлений, неоднородность твердой оболочки и т.п. При этом нас будет интересовать и широтная зависимость изучаемых модельных эффектов.

2. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ

Метод, позволяющий восстановить вариации напряжений в коре, мы проиллюстрируем на примере простой ситуации, когда вращение Земли стационарно и отсутствуют все эффекты, связанные с внешними воздействиями (приливные явления, перемещения оси вращения и т.п.). Выберем вращающуюся систему координат с началом в центре тяжести Земли. В этой системе участок коры покоится, и условие его равновесия имеет вид

$$\mathbf{0} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \rho [\mathbf{\Omega}[\mathbf{\Omega} \mathbf{r}]] + \mathbf{K}. \quad (1)$$

Здесь все силы в правой части отнесены к единичному объему, ρ и $\mathbf{r}$ – плотность участка коры и его радиус-вектор, φ – потенциал сил тяготения, второй член – центробежная сила ($\mathbf{\Omega}$ – угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси), сила Кориолиса равна нулю (участок коры покоится!), $\mathbf{K}$ – сила, вызванная напряжениями в коре. Эта сила является дивергенцией тензора напряжений σ_{ik} , для которого выберем самое грубое (так называемое гидростатическое) приближение:

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik}p, \quad K_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial r_k} = -\frac{\partial p}{\partial r_i}, \quad (2)$$

где p – давление.

Потенциал сил тяготения возьмем в приближении потенциала однородного эллипсоида вращения,

$$\varphi = \varphi_0 - 2\pi\gamma\rho_0 R^2 \left[1 - (\alpha + \beta \cos^2 \theta) \left(\frac{\mathbf{r}}{R} \right)^2 \right], \quad (3)$$

где параметры φ_0 , α и β подбираются из условий, чтобы сумма гравитационного и центробежного потенциалов имела в качестве поверхности уровня поверхность эллипсоида вращения, γ – ньютоновская постоянная, ρ_0 – средняя плотность Земли, R – полярный радиус, θ – широта участка коры.

Давление p и плотность ρ – скалярные (относительно группы вращений) функции векторных аргументов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{\Omega}$. Из предположения, что эти функции аналитические, следует, что они могут зависеть только от скалярных комбинаций векторных аргументов, $a = \mathbf{r}^2$, $b = (\mathbf{\Omega} \mathbf{r})$. Тогда из условий равновесия (1) для скалярной функции $p(a, b)$ получится система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1} \mathbf{\Omega}^2 \right), \\ \frac{\partial p}{\partial b} &= -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b \right), \end{aligned} \quad (4)$$

условием совместности которой является следующее линейное дифференциальное уравнение на плотность:

$$\frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1} \mathbf{\Omega}^2} \frac{\partial \rho}{\partial a} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b} \frac{\partial \rho}{\partial b} = 0. \quad (5)$$

Решением последнего уравнения, как известно, является первый интеграл системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{a} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1} \Omega^2 \right)^{-1}, \quad \dot{b} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b \right)^{-1}. \quad (6)$$

Он имеет вид произвольной функции $\rho(\xi_0)$, зависящей от комбинации $\xi_0 = \varphi - 2^{-1} \times (\Omega^2 a - b^2)$. Заметим, что условие $\xi_0 = \xi_0^0 = \text{const}$ в соответствии с выбором параметров гравитационного потенциала описывает поверхность Земли, что позволяет без труда поставить граничное условие для интегрирования уравнения (4) для давления.

В итоге решение системы уравнений для тензора напряжений с естественным (нулевым) граничным условием на поверхности Земли имеет вид

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik} \int_{\xi_0}^{\xi_0^0} \rho(\xi_0) d\xi_0. \quad (7)$$

3. ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ СМЕЩЕНИЙ ОСИ

В нестационарном случае центр тяжести Земли меняет свое положение. В этой ситуации мы продолжаем использовать вращающуюся систему отсчета с началом в центре тяжести. Тогда вектор угловой скорости Ω вращения Земли проходит через центр тяжести и, вообще говоря, зависит от времени. Мы пренебрегаем как изменением скорости вращения, так и вариациями наклона оси вращения к плоскости эклиптики. В итоге условие равновесия во вращающейся с угловой скоростью Ω системе координат примет вид

$$\mathbf{0} = -\rho \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} - \rho \ddot{\mathbf{x}} - \rho [\Omega [\Omega \mathbf{r}]] + \mathbf{K}, \quad (8)$$

где в правой части появился второй член – сила инерции, обусловленная смещением центра тяжести $\mathbf{x}(t)$.

Будем считать отклонение центра тяжести от равновесного положения малым и моделируем его зависимость от времени на основе данных о вариациях положения полюса. По аналогии со стационарным случаем плотность и тензор напряжений будем искать в виде

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_0(\mathbf{r}^2, \Omega \mathbf{r}) + \rho_1(\mathbf{r}^2, \Omega \mathbf{r}, \mathbf{r} \ddot{\mathbf{x}}), \\ \sigma_{ik} &= -\delta_{ik} p_0(\mathbf{r}^2, \Omega \mathbf{r}) - \delta_{ik} p_1(\mathbf{r}^2, \Omega \mathbf{r}, \mathbf{r} \ddot{\mathbf{x}}) + (r_i r_k r_l^{-2} - 3^{-1} \delta_{ik}) p_2(\mathbf{r}^2, \Omega \mathbf{r}, \mathbf{r} \ddot{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь члены с индексом 0 отвечают стационарному случаю, а остальные члены являются малыми добавками, связанными с нестационарностью. Кроме того, в тензор напряжений добавлен член, отвечающий за сдвиговые напряжения, чтобы сделать модель более реалистичной в нестационарном случае, а для малых добавок, учитывая структуру членов с силами инерции в уравнении (7), введен еще один скалярный аргумент $c = \mathbf{r} \ddot{\mathbf{x}}$. Сохраним обозначения a и b для комбинаций $\mathbf{r}^2$ и $\Omega \mathbf{r}$.

Разложим условия равновесия в ряд теории возмущений по отклонениям от стационарных значений. В нулевом порядке мы должны потребовать выполнения условия (2).

Поэтому очевидно, что добавки к плотности и тензору напряжений должны иметь как минимум первый порядок малости, а функция p_0 – совпадать с уже найденной функцией $p(a, b)$.

Вычислим связанные с нестационарностью добавки к плотности свободной энергии $F = 2^{-1}\sigma_{ik}u_{ik}$, выразив ее через тензор напряжений в приближении линейной теории упругости, когда тензор деформаций имеет вид

$$u_{ik} = (9K)^{-1}\delta_{ik}\sigma_{ll} + (2\mu)^{-1}(\sigma_{ik} - 3^{-1}\sigma_{ll}).$$

Получим

$$\begin{aligned} F &= (18K)^{-1}\sigma_{ll}^2 + (4\mu)^{-1}(\sigma_{ik}^2 - 3^{-1}\sigma_{ll}^2) = \\ &= (2K)^{-1}(p_0 + p_1)^2 + (4\mu)^{-1}\left(\frac{2}{3}p_2^2\right) \approx (2K)^{-1}(p_0^2 + 2p_0p_1). \end{aligned} \quad (10)$$

Таким образом, в первом порядке малости сдвиговая часть добавки к тензору напряжений не дает вклада. С учетом этого обстоятельства плотность и тензор напряжений следует искать в виде

$$\rho = \rho(\mathbf{r}^2, \mathbf{\Omega}\mathbf{r}, \mathbf{r}\ddot{\mathbf{x}}), \quad \sigma_{ik} = -\delta_{ik}p(\mathbf{r}^2, \mathbf{\Omega}\mathbf{r}, \mathbf{r}\ddot{\mathbf{x}}). \quad (11)$$

Тогда нестационарное условие равновесия примет вид системы уравнений, аналогичной (4),

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial a} &= -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1}\mathbf{\Omega}^2 \right), \\ \frac{\partial p}{\partial b} &= -\rho \left(\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b \right), \\ \frac{\partial p}{\partial c} &= -\rho. \end{aligned} \quad (12)$$

Условием разрешимости этой системы является аналог уравнения (5) – система уравнений

$$\begin{aligned} \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1}\mathbf{\Omega}^2} \frac{\partial \rho}{\partial a} - \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b} \frac{\partial \rho}{\partial b} &= 0, \\ \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial a} + 2^{-1}\mathbf{\Omega}^2} \frac{\partial \rho}{\partial a} + \frac{\partial \rho}{\partial c} &= 0, \\ \frac{1}{\frac{\partial \varphi}{\partial b} - b} \frac{\partial \rho}{\partial b} - \frac{\partial \rho}{\partial c} &= 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Ее решением будет произвольная функция $\rho(\xi)$ новой комбинации

$$\xi = \varphi - 2^{-1}(\mathbf{\Omega}^2 a - b^2) + c = \varphi - 2^{-1}(\mathbf{\Omega}^2 \mathbf{r}^2 - (\mathbf{\Omega}\mathbf{r})^2) + \mathbf{r}\ddot{\mathbf{x}}, \quad (14)$$

а тензор напряжений выразится формулой аналогичной (7),

$$\sigma_{ik} = \delta_{ik} \int_{\xi}^{\xi^0} \rho(\xi) d\xi. \quad (15)$$

Чтобы найти добавку к плотности свободной энергии, связанную с нестационарностью, следует подставить это выражение в первое равенство соотношений (9) и сохранить только члены первого порядка малости. В итоге получаем

$$\delta F = (2K)^{-1} \delta \sigma_{ll}^2 = (K)^{-1} p \delta p = (K)^{-1} p \rho \delta \xi = (K)^{-1} p \rho c = (K)^{-1} p \rho \ddot{x}. \quad (16)$$

4. ЧИСЛЕННЫЕ ОЦЕНКИ

Далее удобно перейти в систему координат, где ось z направлена вдоль вектора угловой скорости вращения Земли, а долгота рассматриваемого участка земной коры равна нулю,

$$\mathbf{r} = r(\cos \theta, 0, \sin \theta), \quad \Omega = \Omega(0, 0, 1). \quad (17)$$

Возьмем для наблюдаемых перемещений положения полюса $\mathbf{y}(t)$ грубое приближение

$$\mathbf{y}(t) = y(\cos(\nu t) - 1, \sin(\nu t), 0), \quad (18)$$

где $\nu/2\pi$ – частота моды с максимальной амплитудой, а в качестве начального момента наблюдений выберем полдень в новолунии. Тогда смещение центра тяжести $\mathbf{x}(t)$ будет приближенно описываться похожей формулой (мы пренебрегаем различием склонений Солнца и Луны)

$$\mathbf{x}(t) = y(\sin \gamma)^{-1}(\cos(\nu t) - 1, \sin(\nu t), \cos \gamma), \quad \cos \gamma = \sin \delta \cos(\omega t), \quad (19)$$

где $(\pi/2 - \delta)$ – угол наклона оси вращения к эклиптике, ω – угловая скорость вращения Земли вокруг Солнца. Поэтому в этом приближении

$$\mathbf{r} \ddot{\mathbf{x}} = ry \frac{d^2}{dt^2} ((\sin \gamma)^{-1} ((\cos(\nu t) - 1) \cos \theta + \cos \gamma \sin \theta)). \quad (20)$$

Далее, зависимость плотности от глубины $h = R_\theta - r$ для глубин, много меньших радиуса Земли, приблизим формулой, описывающей рост плотности с глубиной

$$\rho = \rho_R \left(1 + \kappa \left(1 - \frac{r}{R_\theta} \right) \right), \quad \kappa \approx 4.5, \quad (21)$$

где ρ_R – плотность на поверхности, а $R_\theta = R(1 + \varepsilon \cos^2 \theta)$ – радиус точки на поверхности на данной широте, причем параметр ε выражается через параметры гравитационного потенциала и имеет порядок $1/300$. Пренебрегая членами порядка ε , получим

$$\begin{aligned} p &= \int_{\xi}^{\xi^0} \rho(\xi) d\xi = 4\pi\gamma\rho_0\rho_R R^2 3^{-1} \int_x^1 dx x(1 + \kappa - \kappa x) = \\ &= 2\pi\gamma\rho_0\rho_R R^2 3^{-2} (3 + \kappa - 3(1 + \kappa)x^2 + 2\kappa x^3), \quad x = \frac{r}{R}. \end{aligned} \quad (22)$$

Подсчитаем изменение добавки к плотности свободной энергии за половину периода перемещений полюса, т.е. вычислим разность этих добавок для времен $t = \pi/\nu$ и

$t = 0$. Для этого достаточно вычислить разность выражений (20) для этих времен. Взяв $2\pi/\nu = 425$ суток (период основной чандлеровской моды), $\delta = 23^\circ$, мы получим для искомой разности формулу

$$\mathbf{r}\ddot{\mathbf{x}}|_0^{\pi\nu^{-1}} = ry\omega^2 f(\theta), \quad f(\theta) = (0.136 \cos \theta + 0.06 \sin \theta). \quad (23)$$

Окончательно имеем

$$\delta F = (K)^{-1} p r r y \omega^2 f(\theta). \quad (24)$$

Чтобы оценить энерговыделение на единицу площади земной поверхности, формулу (24) следует проинтегрировать по r до некоторой глубины h_0 , ниже которой, как мы полагаем, очаги землетрясений возникают крайне редко. Возьмем в качестве h_0 глубину в 100 км и введем обозначение $\lambda = h_0/R_\theta$ ($\approx 1/64$). Удобно сделать интеграл безразмерным, проводя интегрирование по x , а все размерные постоянные вынести в множители. Мы получим таким образом формулу

$$\begin{aligned} \int_{R_\theta - h}^{R_\theta} \delta F dr &= K^{-1} \gamma \rho_0 \rho_R^2 y \omega^2 R^4 f(\theta) \times \\ &\times 4\pi 3^{-2} \int_{1-\lambda}^1 dx x(1 + \kappa - \kappa x)(3 + \kappa - 3(1 + \kappa)x^2 + 2\kappa x^3). \end{aligned} \quad (25)$$

Полезно подсчитать порядок размерного коэффициента в формуле (25). Взяв $K \approx 1.5 \cdot 10^{12} \text{ г/см} \cdot \text{с}^2$, $\rho_R \approx 2.8 \text{ г/см}^3$, $\gamma = 6.7 \cdot 10^{-8} \text{ см}^3 \text{ г}^{-1} \text{ с}^{-2}$, $\omega \approx 2 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$, $y \approx 10^3 \text{ см}$, $R \approx 6.4 \cdot 10^8 \text{ см}$, получим величину $1.3 \cdot 10^8 \text{ г} \cdot \text{с}^{-2}$, а умножив ее на площадь поверхности Земли ($\approx 5 \cdot 10^{18} \text{ см}^2$), получим энергию порядка $6.5 \cdot 10^{26} \text{ эрг}$. С учетом численных значений безразмерного интеграла ($\approx 3\lambda^2$), множителя перед ним и функции $f(\theta)$, получим $0.65 \cdot 10^{24} \text{ эрг}$.

Что касается широтной зависимости, то ввиду малости параметра ε она фактически определяется “кинематическим” множителем $f(\theta)$.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

Технический прием, позволивший выше найти вариации напряжений, состоит в использовании условий совместности уравнений равновесия. Следует отметить, что добавление в условие равновесия любых других потенциальных сил (например, приливных) приведет к тому, что скалярные динамические характеристики состояния коры окажутся функциями суммы всех потенциалов (ср. формулы (14) и (15)). Если же добавка к потенциалу мала, то изменение плотности свободной энергии всегда будет пропорционально ей, как это имеет место в формуле (16).

Сравним полученные результаты с данными сейсмических наблюдений. Отметим прежде всего, что суммарное изменение свободной энергии по порядку величины совпадает с энерговыделением в землетрясениях за тот же промежуток времени. Качественно совпадает и широтная зависимость вариаций плотности свободной энергии, с одной

стороны, и энергоснабжения в землетрясениях — с другой. Подчеркнем, что в исследованной модели широтная зависимость определяется в основном наклоном оси вращения Земли к плоскости эклиптики, а зависимость от центробежных эффектов пренебрежимо мала (см., например, формулу (21)). Таким образом, напрашивается вывод, что вариации свободной энергии могут служить триггером землетрясений.

Отметим далее, что зависимость вариаций свободной энергии от глубины эллипсоидального слоя, по которому интегрируется ее плотность, квадратична. Любопытно, что это обстоятельство не зависит от модельных предположений о характере изменений плотности с глубиной. Точное значение интеграла по x в формуле (25) есть

$$3\lambda^2(1 + \kappa\lambda + 4^{-1}(\kappa\lambda^2)) - \lambda^3(3 + 2^{-1}13\kappa\lambda + (\kappa\lambda)^2) + \lambda^4(4^{-1}3 + \kappa\lambda + 3^{-1}(\kappa\lambda)^2).$$

Видно, что зависимость от параметра κ , определяющего скорость роста плотности с глубиной, пренебрежимо мала: $\kappa\lambda \approx 0.007$. Кроме того, линейный по λ член в интеграле исчезает просто потому, что коэффициент при нем пропорционален давлению на нулевой глубине, равному нулю. Последнее, в свою очередь, связано с выбором приближения линейной теории упругости для свободной энергии. Оправданием этому выбору служит то, что учет нелинейных членов (например, кубичных по напряжениям в свободной энергии) приводит к уменьшению скорости звука с ростом давления, что противоречит наблюдениям в земной коре.

Благодарности. Авторы выражают благодарность Ю. Н. Авсюку, Г. А. Алексею, Г. С. Голицыну, О. И. Завьялову, А. М. Фридману и Л. О. Чехову за плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] Ю. Н. Авсюк. ДАН СССР. 1973. Т. 212. № 5. С. 1103–1105.
- [2] Ю. Н. Авсюк. Приливные силы и природные процессы. М.: ОИФЗ РАН, 1996.
- [3] Материалы конференции “Внутреннее ядро 2000”. Ред. Ю. Н. Авсюк. М.: ОИФЗ РАН, 2000.
- [4] J. M. Wahr. J. Geophys. Res. B. 1985. V. 90. № 11. P. 9363–9368.
- [5] N. N. Gor'kavyyi, V. A. Minin, T. A. Tajdakova, A. M. Fridman. Astronomical circular. 1989. V. 1540. P. 35–36.
- [6] B. F. Chao, R. S. Gross. Geophys. J. Int. 1995. № 122. P. 776–783.
- [7] B. F. Chao, R. S. Gross, D. N. Dong. Geophys. J. Int. 1995. № 122. P. 784–789.
- [8] Yu. N. Avsjuk, B. W. Levin. Natural hazards and variations of the Earth rotation. In: Proc. 7th Intern. Conf. HAZARDS-98 (Greece, Crete Island, 1998). Ed. J. Papadopoulos. Athens, 1998. P. 34.
- [9] Б. В. Левин, Е. Б. Чирков. Вулканология и сейсмология. 1999. Т. 6. С. 65–69.

Поступила в редакцию 27.IV.2001 г.