Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. А. Болохов, Л. Д. Фаддеев, Инфракрасные переменные для $SU(3)$ поля Янга–Миллса, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 2, 276–290

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf51>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.12

26 апреля 2023 г., 14:03:15

ИНФРАКРАСНЫЕ ПЕРЕМЕННЫЕ ДЛЯ $SU(3)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Самодуальная параметризация $SU(2)$ поля Янга–Миллса, предложенная Ниemi и Фаддеевым для описания инфракрасного предела теории, обобщается на случай калибровочной группы $SU(3)$. Показано, что простая дуальность калибровочного поля $SU(2)$ не переносится буквально на старший ранг. Алгебраические структуры, возникающие в лагранжиане для новых компактных переменных, интерпретируются в терминах произведения групп $SU(2)^{\otimes 3}$.

Ключевые слова: поле Янга–Миллса, компактные переменные, дуальность, струноподобные солитоны, формы Кириллова, максимальная абелева калибровка.

1. ВВЕДЕНИЕ

В серии работ [1]–[3] Ниemi и Фаддеев рассматривали варианты замены независимых переменных для теории Янга–Миллса, при которых использовались полевые величины с компактными значениями. В случае группы $SU(2)$ такой переменной является поле $\mathbf{n}(x)$ со значениями на двумерной сфере S^2 . Вариант, предложенный в работах [1], [2], был основан на использовании связности Чо [4] для калибровочной группы $SU(2)$ и ее обобщения на старшие ранги. Вариант замены переменных из работы [3], развитый для случая $SU(2)$, существенно отличается от предыдущего и, как сейчас нам представляется, более адекватно описывает теорию в инфракрасном пределе.

В этой работе мы рассматриваем обобщение второго подхода на случай калибровочной группы $SU(3)$. Перенос нашего предложения на ранг более двух не представляет принципиальных трудностей, и мы ограничиваемся примером группы $SU(3)$, для того чтобы не перегружать явные формулы.

При заменах переменных, предложенных в работах [1]–[3], поле $\mathbf{n}$ возникает в лагранжиане Янга–Миллса посредством структур

$$\begin{aligned} e_2 &= (\partial_\mu \mathbf{n})^2, \\ e_4 &= (\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}, \mathbf{n})^2. \end{aligned}$$

*Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: timur@pdmi.ras.ru, faddeev@pdmi.ras.ru

Как показано в работах [5]–[7], лагранжиан

$$\mathcal{L} = a(\partial_\mu \mathbf{n})^2 + b(\partial_\mu \mathbf{n} \times \partial_\nu \mathbf{n}, \mathbf{n})^2 \quad (1)$$

допускает решения в виде стационарных струноподобных солитонов.

Основным стимулом работ [1]–[3] была гипотеза о том, что такие возбуждения остаются и в полной теории Янга–Миллса. С этой точки зрения естественно посмотреть, как поле $\mathbf{n}(x)$ и структура $ae_2 + be_4$ обобщаются на старший ранг.

В варианте работы [3] появились два набора переменных типа $\mathbf{n}(x)$, которые мы называли “электрическими” и “магнитными”. Оба набора переменных вошли в лагранжиан Янга–Миллса сходным образом, что позволило авторам говорить о новой дуальности. Как мы покажем здесь, простая дуальность калибровочного поля $SU(2)$ не переносится буквально на старший ранг. Лагранжиан “электрических” переменных образует более сложное выражение по сравнению с “магнитными”, и, кроме того, появляется дополнительная угловая “электрическая” переменная, для которой нет соответствующей “магнитной” величины. Более подробно этот вопрос будет обсуждаться ниже после написания явных формул.

В разделе 2 при помощи техники максимальной абелевой калибровки [8] воспроизводятся результаты работы [3]. В разделе 3 приводится описание параметризации $SU(3)$ поля Янга–Миллса. Раздел 4 дает алгебраическую интерпретацию обобщения модельного лагранжиана (1).

В работе приняты следующие обозначения. Греческие индексы μ, ν, λ отвечают координатам пространства-времени, латинские индексы k, l обозначают пространственные координаты, индексы a, b, c нумеруют весовые векторы алгебры $su(3)$. По повторяющимся внутренним индексам производится суммирование, при этом некоторые знаки сумм указаны явно. Квадраты и квадраты модулей выражений считаются содержащими повторяющиеся индексы, в частности

$$a_\mu b_\mu \equiv -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \\ |a_\mu b_\nu - c_\mu d_\nu|^2 \equiv \sum_{\mu, \nu} (a_\mu b_\nu - c_\mu d_\nu)(\bar{a}_\mu \bar{b}_\nu - \bar{c}_\mu \bar{d}_\nu).$$

2. ЛАГРАНЖИАНЫ $SU(2)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Здесь мы приведем основные результаты и выводы статьи [3] в виде, удобном для дальнейшего обобщения.

Лагранжиан поля Янга–Миллса инвариантен по отношению к преобразованиям некоммутативной калибровочной группы. В этой группе можно выбрать абелеву подгруппу, порождаемую экспонентами элементов (с коэффициентами, зависящими от координат) подалгебры Картана соответствующей алгебры Ли. Калибровочные преобразования, производимые такой подгруппой, будем называть абелевыми преобразованиями.

В статье [3] лагранжиан $SU(2)$ теории Янга–Миллса выражается через величины, инвариантные относительно абелевых преобразований. При определенном выборе новых переменных получающийся лагранжиан содержит в себе выражение, сходное с модельным лагранжианом (1). Напомним эту технику, с тем чтобы далее обобщить ее на случай группы $SU(3)$.

Пусть $A_\mu(x)$ – поле Янга–Миллса, $\mu = 0, 1, 2, 3$; $A_\mu(x) \in su(2)$. В качестве базиса алгебры $su(2)$ естественно выбрать матрицы

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица σ_3 образует базис подалгебры Картана алгебры $su(2)$ и, как было определено выше, участвует в абелевых преобразованиях:

$$A_\mu \rightarrow e^{i\beta'\sigma_3} A_\mu e^{-i\beta'\sigma_3} - \partial_\mu \beta' \sigma_3. \quad (2)$$

Разложим поле A_μ на картанову компоненту A_μ^3 и комплексную компоненту B_μ , отвечающую корневому вектору:

$$A_\mu = A_\mu^3 \sigma_3 + B_\mu \sigma_+ + \overline{B}_\mu \sigma_-.$$

Это разложение соответствует максимальной абелевой калибровке, которая часто используется в решеточных моделях [8]. По отношению к абелевым преобразованиям (2) компонента B_μ ведет себя как заряженное поле:

$$B_\mu \rightarrow e^{2i\beta'} B_\mu,$$

а A_μ^3 – как абелево калибровочное поле:

$$A_\mu^3 \rightarrow A_\mu^3 - \partial_\mu \beta'.$$

В переменных A_μ^3, B_μ лагранжиан $SU(2)$ поля Янга–Миллса выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} \text{tr}([\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu])^2 = \\ &= ((\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3) + i(B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu))^2 + \nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\mu \overline{B}_\nu - \nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\nu \overline{B}_\mu, \end{aligned} \quad (3)$$

где ∇_μ – действие абелевой части ковариантной производной, т.е.

$$\nabla_\mu B = (\partial_\mu + 2iA_\mu^3)B.$$

Путем добавления к лагранжиану фиксирующих калибровку слагаемых $|\nabla_\mu B_\mu|^2$ можно избавиться от “нежелательных” перекрестных членов $\nabla_\mu B_\nu \overline{\nabla}_\nu \overline{B}_\mu$, в результате чего лагранжиан (3) переписывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_g = \int \mathcal{L} + |\nabla_\mu B_\mu|^2 &= \int ((\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)^2 - (B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu)^2 + \\ &+ 4i(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)(B_\mu \overline{B}_\nu - \overline{B}_\mu B_\nu) + |\nabla_\mu B_\nu|^2). \end{aligned} \quad (4)$$

Мы ввели здесь знаки интеграла, так как данное равенство использует интегрирование по частям.

Комбинация

$$J_\mu = \frac{i}{2\rho^2} (\partial_\mu \bar{B}_\nu B_\nu - \partial_\mu B_\nu \bar{B}_\nu),$$

где $\rho^2 = B_\nu \bar{B}_\nu$, при абелевых преобразованиях (2) ведет себя как $-2A_\mu^3$, следовательно, замена

$$C_\mu = A_\mu^3 + \frac{1}{2} J_\mu \quad (5)$$

позволяет избавиться от абелево-неинвариантного поля A_μ^3 . В терминах переменных C_μ, J_μ последнее слагаемое в выражении (4) переписывается следующим образом:

$$|\nabla_\mu B_\nu|^2 = |\partial_\mu B_\nu|^2 - \rho^2 J_\mu^2 + 4\rho^2 C_\mu^2. \quad (6)$$

В случае общего положения векторы $B_\mu, \bar{B}_\mu$ определяют двумерную плоскость в четырехмерном пространстве-времени. Пусть комплексные векторы $\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu$ образуют базис в этой плоскости, т.е. подчиняются условиям

$$\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu : \quad \mathbf{e}_\mu \mathbf{e}_\mu = 0, \quad \mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\mu = 1. \quad (7)$$

Тогда с помощью введенной ранее плотности ρ для вектора B_μ можно записать следующее разложение:

$$B_\mu = \rho (\cos \alpha e^{i\beta+i\gamma} \mathbf{e}_\mu + \sin \alpha e^{i\beta-i\gamma} \bar{\mathbf{e}}_\mu). \quad (8)$$

Единственной абелево-неинвариантной величиной здесь является угол β : преобразование (2) добавляет к нему слагаемое $2\beta'$.

Разложение (8) определено с точностью до поворота базиса $\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu$:

$$\begin{aligned} \gamma &\rightarrow \gamma + \gamma', \\ \mathbf{e}_\mu &\rightarrow e^{-i\gamma'} \mathbf{e}_\mu, \end{aligned} \quad (9)$$

с которым связано еще одно $U(1)$ -калибровочное поле

$$\Gamma_\mu = i\mathbf{e}_\nu \partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu.$$

Нетрудно проверить, что преобразование (9) не меняет сумму $\partial_\mu \gamma + \Gamma_\mu$.

Переменные α, γ являются углами Эйлера для вектора $\mathbf{t}$, принимающего значение на единичной сфере S^2 :

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha) \cos(2\gamma) \\ \sin(2\alpha) \sin(2\gamma) \\ \cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad t_+ = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) e^{2i\gamma}, \quad t_- = \frac{1}{2} \sin(2\alpha) e^{-2i\gamma}.$$

Действие преобразований (9) на вектор $\mathbf{t}$ приводит к повороту этого вектора вокруг третьей оси координат. Поле Γ_μ позволяет сконструировать производную вектора $\mathbf{t}$, которая будет ковариантна по отношению к такому повороту:

$$(\nabla_\mu \mathbf{t})_k = \sum_l (\delta^{kl} \partial_\mu - 2\varepsilon^{kl3} \Gamma_\mu) t_l.$$

Таким образом, абелево-инвариантные компактные переменные, входящие в величину B_μ , делятся на две части: вектор на двумерной сфере $\mathbf{t}$ (углы α, γ) и пару сопряженных комплексных векторов единичной длины $\mathbf{e}_\mu, \bar{\mathbf{e}}_\mu$. Так же, как и в работе [3], мы будем называть первые переменные “электрическими”, а вторые – “магнитными”.

Запишем правую часть выражения (6) через новые переменные:

$$\begin{aligned} |\nabla_\mu B_\nu|^2 = & (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 + t_+ (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_- (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2) + \\ & + \rho^2 ((\partial_\mu \alpha)^2 + (\partial_\mu \beta)^2 + (\partial_\mu \gamma)^2 + 2 \cos(2\alpha) \partial_\mu \beta \partial_\mu \gamma) + 2\rho^2 \Gamma_\mu (\cos(2\alpha) \partial_\mu \beta + \partial_\mu \gamma) - \\ & - \rho^2 (\cos(2\alpha) (\partial_\mu \gamma + \Gamma_\mu) + \partial_\mu \beta)^2 + 4\rho^2 C_\mu^2. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь первые две строки получены из слагаемого $|\partial_\mu B_\nu|^2$ правой части выражения (6). Так как левая часть инвариантна по отношению к абелевым преобразованиям, то все слагаемые, содержащие угол β , сокращаются; после добавления и вычитания $\rho^2 \Gamma_\mu^2$ получим

$$\begin{aligned} |\nabla_\mu B_\nu|^2 = & (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 (|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 + t_+ (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_- (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2 - \Gamma_\mu^2) + \\ & + \rho^2 ((\partial_\mu \alpha)^2 + \sin^2 2\alpha (\partial_\mu \gamma + \Gamma_\mu)^2) + 4\rho^2 C_\mu^2. \end{aligned}$$

Можно убедиться, что предпоследнее слагаемое в этом выражении равняется в точности $(1/4)\rho^2 (\nabla_\mu \mathbf{t})^2$ и, следовательно,

$$|\nabla_\mu B_\nu|^2 = (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^2 \left(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 - \Gamma_\mu^2 + t_+ (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_- (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2 + \frac{1}{4} (\nabla_\mu \mathbf{t})^2 + 4C_\mu^2 \right). \quad (11)$$

Теперь, воспользовавшись соотношением

$$H_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu J_\nu - \partial_\nu J_\mu = \frac{1}{2} (\mathbf{t}, \nabla_\mu \mathbf{t} \times \nabla_\nu \mathbf{t}) + t_3 (\partial_\mu \Gamma_\nu - \partial_\nu \Gamma_\mu),$$

а также подстановками (5) и (8), получим для лагранжиана (4) следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_g = & \left(E_{\mu\nu} + \frac{1}{2} H_{\mu\nu} \right)^2 + 2G_{\mu\nu} (H_{\mu\nu} + 2E_{\mu\nu}) + \frac{1}{4} \rho^2 (\nabla_\mu \mathbf{t})^2 + \\ & + \rho^2 (|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu|^2 - \Gamma_\mu^2 + t_+ (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu)^2 + t_- (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu)^2) + (\partial_\mu \rho)^2 + \rho^4 t_3^2 + 4\rho^2 C_\mu^2, \end{aligned} \quad (12)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} E_{\mu\nu} &= \partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu, \\ G_{\mu\nu} &= i\rho^2 t_3 (\mathbf{e}_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu - \mathbf{e}_\nu \bar{\mathbf{e}}_\mu). \end{aligned}$$

Для лагранжиана $\mathcal{L}_g$ можно рассмотреть разложение по производным, считая переменную $\mathbf{t}$ “быстрой”, а $\mathbf{e}_\mu$ – “медленной”. Выражение (12) порождает эффективный лагранжиан

$$\left(\partial_\mu C_\nu^3 - \partial_\nu C_\mu^3 + \frac{1}{4}(\mathbf{t}, \partial_\mu \mathbf{t} \times \partial_\nu \mathbf{t}) \right)^2 + \frac{1}{4}\rho^2 (\partial_\mu \mathbf{t})^2 + 4\rho^2 C_\mu^2 + V(t), \quad (13)$$

который представляет собой модельную структуру (1), взаимодействующую с массивным векторным полем C_μ .

Дуальность между переменными $\mathbf{t}$ и $\mathbf{e}_\mu$ проявляется при переходе к гамильтонову формализму. Функционал энергии для статических конфигураций зависит только от двух из четырех параметров, входящих в комплексный вектор $\mathbf{e}_\mu$, которые могут быть представлены в виде вектора $\mathbf{m}$, принимающего значения на сфере S^2 . Таким образом, в функционал энергии входят слагаемые

$$\begin{aligned} |\partial_k \mathbf{e}_l|^2 - \Gamma_k^2 &= (\partial_k \mathbf{m})^2, \\ \partial_k \Gamma_l - \partial_l \Gamma_k &= (\partial_k \mathbf{m} \times \partial_l \mathbf{m}, \mathbf{m}), \end{aligned}$$

и в первом порядке разложения по производным “медленного” поля $\mathbf{t}$ гамильтониан для вектора $\mathbf{m}$ имеет такой же вид, как и гамильтониан, полученный из лагранжиана (13). Точные формулы для переменных $\mathbf{m}$ приведены в статье [3].

3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ $SU(3)$ ПОЛЯ ЯНГА–МИЛЛСА

Применим технику, описанную в предыдущем разделе, к лагранжиану $SU(3)$ поля Янга–Миллса. Выберем следующий базис алгебры Ли $su(3)$:

$$\begin{aligned} \lambda_1^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_1^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_8 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (14)$$

Данный базис отличается от традиционного базиса Гелл-Манна измененной нормировкой и переставленными местами матрицами λ_2^+ и λ_2^- . Такое изменение позволяет получить более простые коммутационные соотношения для генераторов λ^+ и λ^- :

$$\begin{aligned} \{\lambda_a^\pm, \lambda_b^\pm\} &= \pm \varepsilon^{abc} \lambda_c^\mp, \\ \{\lambda_a^+, \lambda_b^-\} &= 0, \quad a \neq b, \\ \{\lambda_1^+, \lambda_1^-\} &= \lambda_3, \\ \{\lambda_2^+, \lambda_2^-\} &= -\frac{1}{2}\lambda_3 - \frac{3}{2}\lambda_8, \\ \{\lambda_3^+, \lambda_3^-\} &= -\frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{3}{2}\lambda_8. \end{aligned}$$

Матрицы λ_3 и λ_8 образуют базис подалгебры Картана алгебры $su(3)$ и удовлетворяют нормировочным условиям

$$\text{tr } \lambda_3 \lambda_3 = 2, \quad \text{tr } \lambda_3 \lambda_8 = 0, \quad \text{tr } \lambda_8 \lambda_8 = \frac{2}{3}.$$

Матрицы $\lambda_{1,2,3}^{+,-}$, соответствующие корневым векторам данной алгебры, имеют нормировку

$$\text{tr } \lambda_a^+ \lambda_b^+ = 0, \quad \text{tr } \lambda_a^- \lambda_b^- = 0, \quad \text{tr } \lambda_a^+ \lambda_b^- = \delta_{ab}.$$

Как генераторы подалгебры Картана, матрицы λ_3 , λ_8 порождают абелевы преобразования:

$$A_\mu \rightarrow e^{i\omega'_3 \lambda_3 + i\omega'_8 \lambda_8} A_\mu e^{-i\omega'_3 \lambda_3 - i\omega'_8 \lambda_8} - \partial_\mu \omega'_3 \lambda_3 - \partial_\mu \omega'_8 \lambda_8. \quad (15)$$

Разложим $SU(3)$ поле Янга–Миллса по базису, состоящему из генераторов (14):

$$A_\mu = A_\mu^3 \lambda_3 + A_\mu^8 \lambda_8 + B_\mu^1 \lambda_1^+ + \overline{B}_\mu^1 \lambda_1^- + B_\mu^2 \lambda_2^+ + \overline{B}_\mu^2 \lambda_2^- + B_\mu^3 \lambda_3^+ + \overline{B}_\mu^3 \lambda_3^-.$$

По отношению к преобразованиям (15) коэффициенты A_μ^3 и A_μ^8 ведут себя как абелевы калибровочные поля:

$$A_\mu^{3,8} \rightarrow A_\mu^{3,8} - \partial_\mu \omega'_{3,8}, \quad (16)$$

а $B_\mu^{1,2,3}$ – как заряженные векторные поля:

$$\begin{aligned} B_\mu^1 &\rightarrow e^{2i\omega'_3} B_\mu^1, \\ B_\mu^2 &\rightarrow e^{-i\omega'_3 - i\omega'_8} B_\mu^2, \\ B_\mu^3 &\rightarrow e^{-i\omega'_3 + i\omega'_8} B_\mu^3. \end{aligned} \quad (17)$$

Правила преобразования векторов B_μ позволяют вычислить действие абелевой части ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu B_\nu^1 &= (\partial_\mu + 2iA_\mu^3) B_\nu^1, \\ \nabla_\mu B_\nu^2 &= (\partial_\mu - iA_\mu^3 - iA_\mu^8) B_\nu^2, \\ \nabla_\mu B_\nu^3 &= (\partial_\mu - iA_\mu^3 + iA_\mu^8) B_\nu^3. \end{aligned} \quad (18)$$

С помощью этой производной можно записать лагранжиан $SU(3)$ поля Янга–Миллса в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\text{tr}([\partial_\mu + iA_\mu, \partial_\nu + iA_\nu])^2 = \\ &= 2 \left(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3 + i(B_\mu^1 \overline{B}_\nu^1 - B_\nu^1 \overline{B}_\mu^1) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2}(B_\mu^2 \overline{B}_\nu^2 - B_\nu^2 \overline{B}_\mu^2) - \frac{i}{2}(B_\mu^3 \overline{B}_\nu^3 - B_\nu^3 \overline{B}_\mu^3) \right)^2 + \\ &\quad + \frac{2}{3} \left(\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8 - \frac{3i}{2}(B_\mu^2 \overline{B}_\nu^2 - B_\nu^2 \overline{B}_\mu^2) + \frac{3i}{2}(B_\mu^3 \overline{B}_\nu^3 - B_\nu^3 \overline{B}_\mu^3) \right)^2 + \\ &\quad + 4 \sum_{a=1,2,3} |\nabla_\mu B_\nu^a + i\varepsilon^{abc} \overline{B}_\mu^b \overline{B}_\nu^c|^2 - 4 \sum_{a=1,2,3} \nabla_\mu B_\nu^a \nabla_\nu \overline{B}_\mu^a. \end{aligned} \quad (19)$$

“Неудобные” перекрестные члены $\nabla_\mu B_\nu^a \bar{\nabla}_\nu \bar{B}_\mu^a$ в последнем члене после добавления к лагранжиану фиксирующих калибровку слагаемых

$$4 \sum_{j=1,2,3} \text{tr} |\nabla_\mu B_\mu^j|^2$$

превращаются в выражение

$$2i(\partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3)(2(B_\mu^1 \bar{B}_\nu^1 - B_\nu^1 \bar{B}_\mu^1) - (B_\mu^2 \bar{B}_\nu^2 - B_\nu^2 \bar{B}_\mu^2) - (B_\mu^3 \bar{B}_\nu^3 - B_\nu^3 \bar{B}_\mu^3)) + \\ + 2i(\partial_\mu A_\nu^8 - \partial_\nu A_\mu^8)((B_\mu^3 \bar{B}_\nu^3 - B_\nu^3 \bar{B}_\mu^3) - (B_\mu^2 \bar{B}_\nu^2 - B_\nu^2 \bar{B}_\mu^2)), \quad (20)$$

в результате чего перекрестные слагаемые в первых трех строках лагранжиана (19) удваиваются.

Величины $(\partial_\mu A_\nu^{3,8} - \partial_\nu A_\mu^{3,8})$ и $B_\mu^a \bar{B}_\nu^a$ в соответствии с формулами (16), (17) инвариантны по отношению к абелевым преобразованиям. Явно неинвариантными являются поля $A_\mu^{3,8}$ и производные $\partial_\mu B_\nu^a$, появляющиеся в последней строке лагранжиана (19).

Рассмотрим слагаемые

$$|\nabla_\mu B_\nu^1|^2 + |\nabla_\mu B_\nu^2|^2 + |\nabla_\mu B_\nu^3|^2, \quad (21)$$

которые содержат форму, квадратичную по полям A_μ^3, A_μ^8 . После раскрытия действия ковариантной производной (18) и введения обозначений

$$\rho_a^2 \equiv B_\nu^a \bar{B}_\nu^a, \quad (22)$$

$$J_\mu^a \equiv \frac{i}{2\rho_a^2} (\partial_\mu \bar{B}_\nu^a B_\nu^a - \partial_\mu B_\nu^a \bar{B}_\nu^a) \quad (23)$$

эти слагаемые переписываются в следующем виде:

$$\sum_{a=1,2,3} |\partial_\mu B_\nu^a|^2 + \sum_{r,s=3,8} \Omega_{rs} A_\mu^r A_\mu^s + 2 \sum_{\substack{r=3,8 \\ a=1,2,3}} P_{ra} A_\mu^r J_\mu^a,$$

где матрицы Ω, P имеют вид

$$\Omega = \begin{pmatrix} 4\rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 & \rho_2^2 - \rho_3^2 \\ \rho_2^2 - \rho_3^2 & \rho_2^2 + \rho_3^2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2\rho_1^2 & -\rho_2^2 & -\rho_3^2 \\ 0 & -\rho_2^2 & \rho_3^2 \end{pmatrix}. \quad (24)$$

Определитель матрицы Ω равен $4(\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2)$, при положительных плотностях ρ_a^2 эта матрица обратима, тогда выражение (21) можно преобразовать к виду

$$\sum_{a=1,2,3} |\partial_\mu B_\nu^a|^2 + \sum_{r,s=3,8} \Omega_{rs} (A_\mu + \Omega^{-1} P J_\mu)^r (A_\mu + \Omega^{-1} P J_\mu)^s - \sum_{a,b} J_\mu^a (P \Omega^{-1} P)_{ab} J_\mu^b. \quad (25)$$

Данное преобразование позволяет ввести вместо полей A_μ^3, A_μ^8 абелево-инвариантные переменные

$$\begin{aligned} C_\mu^3 &= A_\mu^3 + (\Omega^{-1} P J_\mu)^3 = A_\mu^3 + \frac{1}{2} \left(J_\mu^1 - \tilde{\rho}_1^2 \sum_a J_\mu^a \right), \\ C_\mu^8 &= A_\mu^8 + (\Omega^{-1} P J_\mu)^8 = A_\mu^8 + \frac{1}{2} \left(J_\mu^3 - \tilde{\rho}_3^2 \sum_k J_\mu^k \right) - \frac{1}{2} \left(J_\mu^2 - \tilde{\rho}_2^2 \sum_a J_\mu^a \right), \end{aligned} \quad (26)$$

где

$$\tilde{\rho}_a^2 = \frac{\prod_{b \neq a} \rho_b^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2}.$$

Комбинация

$$I_\mu = J_\mu^1 + J_\mu^2 + J_\mu^3,$$

которая появляется в определении переменных C_μ^3, C_μ^8 , как следует из формул (17) и (23), инвариантна относительно абелевых преобразований.

Квадратичная форма по J_μ^a в выражении (25) имеет вид

$$\sum_{a,b} J_\mu^a (P \Omega^{-1} P)_{ab} J_\mu^b = \sum_a \rho_a^2 (J_\mu^a)^2 - \tilde{\rho}_1^2 \rho_1^2 I_\mu^2$$

и вместе с остальными слагаемыми суммы (21) дает вклад

$$\sum_{a=1,2,3} (|\partial_\mu B_\nu^a|^2 - \rho_a^2 (J_\mu^a)^2) + \tilde{\rho}_1^2 \rho_1^2 I_\mu^2 + \sum_{r,s} \Omega_{rs} C_\mu^r C_\mu^s. \quad (27)$$

Здесь можно отметить, что первая и последняя суммы являются прямыми аналогами правой части выражения (6) в случае калибровочной группы $SU(2)$. Появление второго слагаемого – квадрата инвариантного тока I_μ – является особенностью группы старшего ранга.

Так как произведения $\tilde{\rho}_a^2 \rho_a^2$ для любого a равны отношению симметричных форм третьей s_3 и второй s_2 степени по ρ_a^2 , то далее естественно ввести обозначение

$$\frac{s_3}{s_2} = \frac{\rho_1^2 \rho_2^2 \rho_3^2}{\rho_1^2 \rho_2^2 + \rho_1^2 \rho_3^2 + \rho_2^2 \rho_3^2} = \rho_1^2 \tilde{\rho}_1^2 = \rho_2^2 \tilde{\rho}_2^2 = \rho_3^2 \tilde{\rho}_3^2.$$

Произведем разделение векторов B_μ^a на “электрическую” (α_a, γ_a) и “магнитную” ($\mathbf{e}_\mu^a, \bar{\mathbf{e}}_\mu^a$) составляющие, таким же образом, как это было сделано для случая группы $SU(2)$ (8):

$$\begin{aligned} B_\mu^a &= \rho_a (\cos \alpha_a e^{i\beta_a + i\gamma_a} \mathbf{e}_\mu^a + \sin \alpha_a e^{i\beta_a - i\gamma_a} \bar{\mathbf{e}}_\mu^a), \\ \mathbf{e}_\mu^a \mathbf{e}_\mu^a &= 0, \quad \mathbf{e}_\mu^a \bar{\mathbf{e}}_\mu^a = 1. \end{aligned} \quad (28)$$

Если в выражениях для углов β_a выделить параметры ω_3, ω_8 , которые изменяются при преобразованиях (15):

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\omega_3 + \omega, \\ \beta_2 &= -\omega_3 - \omega_8 + \omega, \\ \beta_3 &= -\omega_3 + \omega_8 + \omega, \end{aligned} \quad (29)$$

и подставить поля B_μ^a в сумму (27), то полученный результат будет содержать только абелево-инвариантную величину ω . Действительно, если ввести три поля, принимающих значение на единичной сфере S^2

$$\mathbf{t}^a = \begin{pmatrix} \sin(2\alpha_a) \cos 2\gamma_a \\ \sin(2\alpha_a) \sin 2\gamma_a \\ \cos(2\alpha_a) \end{pmatrix},$$

а также векторные поля

$$\Gamma_\mu^a = i\mathbf{e}_\nu^a \partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu^a,$$

то в соответствии с формулой (11) слагаемые (27) принимают вид

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1,2,3} \left((\partial_\mu \rho_a)^2 + \rho_a^2 (|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a|^2 - (\Gamma_\mu^a)^2 + t_+^a (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a)^2 + t_-^a (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu^a)^2) + \frac{1}{4} \rho_a^2 (\nabla_\mu \mathbf{t}^a)^2 \right) + \\ & + \frac{s_3}{s_2} \left(\sum_{a=1,2,3} \cos(2\alpha_a) (\partial_\mu \gamma_a + \Gamma_\mu^a) + 3\partial_\mu \omega \right)^2 + \sum_{r,s} \Omega_{rs} C_\mu^r C_\mu^s \end{aligned} \quad (30)$$

и, таким образом, не содержат ω_3, ω_8 . Оставшийся угловой параметр ω мы будем далее относить к “электрическим” переменным.

При подстановке полей A_μ^r , $r = 3, 8$, выраженных с помощью замены (26) через переменные C_μ^r и J_μ^a , $a = 1, 2, 3$, в тензоры напряженности $\partial_\mu A_\nu^r - \partial_\nu A_\mu^r$ возникают выражения

$$H_{\mu\nu}^a = \partial_\mu (J_\nu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\nu) - \partial_\nu (J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu).$$

Тензоры $H_{\mu\nu}^a$ не зависят от углов ω_3, ω_8 , это следует из явного вида токов J_μ^a :

$$J_\mu^a = \cos(2\alpha_a) (\partial_\mu \gamma_a + C_\mu^a) + \partial_\mu \beta_a. \quad (31)$$

С помощью тензоров $H_{\mu\nu}^a$ первые три строки лагранжиана (19), а также слагаемые, фиксирующие калибровку, можно переписать в инвариантных переменных:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sum_a (H_{\mu\nu}^a)^2 + 2(E_{\mu\nu}^3)^2 + \frac{2}{3} (E_{\mu\nu}^8)^2 + 2E_{\mu\nu}^3 H_{\mu\nu}^1 + \\ & + 2(H_{\mu\nu}^1 - 2E_{\mu\nu}^3)(G_{\mu\nu}^2 + G_{\mu\nu}^3 - 2G_{\mu\nu}^1) + \frac{2}{3} E_{\mu\nu}^8 (H_{\mu\nu}^3 - H_{\mu\nu}^2) + \\ & + 2(H_{\mu\nu}^3 - H_{\mu\nu}^2 + 2E_{\mu\nu}^8)(G_{\mu\nu}^3 - G_{\mu\nu}^2) + 3 \sum_a (G_{\mu\nu}^a)^2 - \left(\sum_a G_{\mu\nu}^a \right)^2. \end{aligned} \quad (32)$$

Здесь использовано обозначение $G_{\mu\nu}^a$ для γ -инвариантных тензоров:

$$G_{\mu\nu}^a = i\rho_a^2 t_3^a (\mathbf{e}_\mu^a \bar{\mathbf{e}}_\nu^a - \bar{\mathbf{e}}_\mu^a \mathbf{e}_\nu^a), \quad a = 1, 2, 3,$$

и $E_{\mu\nu}^r$ для тензоров напряженности полей C_μ^r :

$$E_{\mu\nu}^r = \partial_\mu C_\nu^r - \partial_\nu C_\mu^r, \quad r = 3, 8.$$

Кроме уже рассмотренных слагаемых (21), последняя строка лагранжиана (19) содержит выражения

$$4 \sum_a |\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c|^2 - 4i \sum_{a,b,c} \varepsilon^{abc} (\nabla_\mu B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c - \bar{\nabla}_\mu \bar{B}_\nu^a \bar{B}_\mu^b \bar{B}_\nu^c).$$

В результате замены переменных (26) они переписываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} & 12\varepsilon^{1bc} C_\mu^3 (B_\nu^1 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) - 4\varepsilon^{2bc} C_\mu^8 (B_\nu^2 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) + 4\varepsilon^{3bc} C_\mu^8 (B_\nu^3 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) - \\ & - 4i\varepsilon^{abc} (\partial_\mu + i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)) B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c + 4i\varepsilon^{abc} (\partial_\mu - i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)) \bar{B}_\nu^a \bar{B}_\mu^b \bar{B}_\nu^c + \\ & + 4 \sum_a |\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c|^2. \end{aligned} \quad (33)$$

Инвариантность слагаемых вида $B_\mu^1 B_\nu^2 B_\lambda^3$, $\bar{B}_\mu^1 \bar{B}_\nu^2 \bar{B}_\lambda^3$, $|\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c|^2$ следует непосредственно из формул (17). Воспользовавшись определением токов J_μ^a (23), можно сделать вывод, что выражения $(\partial_\mu + iJ_\mu^a) B_\nu^a$ при абелевых преобразованиях ведут себя так же, как векторы B_ν^a , а значит, слагаемые

$$\varepsilon^{abc} (\partial_\mu + i(J_\mu^a - \tilde{\rho}_a^2 I_\mu)) B_\nu^a B_\mu^b B_\nu^c \quad (34)$$

абелево-инвариантны.

При подстановке переменных α_a , γ_a , $\mathbf{e}_\mu^a$, $\bar{\mathbf{e}}_\mu^a$ в величины B_μ^a , J_μ^a слагаемые (34) дают добавки M_μ^a , $\mathbf{T}_\mu^a$, $S_{\mu\nu}^a$, N_μ к выражению (21). Формула (30) приобретает вид

$$\begin{aligned} & \sum_{a=1,2,3} \left((\partial_\mu \rho_a + M_\mu^a)^2 - (M_\mu^a)^2 + \rho_a^2 \left(|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a|^2 - (C_\mu^a)^2 + t_+^a (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a + S_{\mu\nu}^a)^2 + \right. \right. \\ & + t_-^a (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu^a + \bar{S}_{\mu\nu}^a)^2 - (S_{\mu\nu}^a)^2 - (\bar{S}_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4} (\nabla_\mu \mathbf{t}^a + \mathbf{T}_\mu^a)^2 - \frac{1}{4} (\mathbf{T}_\mu^a)^2 \left. \right) + \\ & + \frac{s_3}{s_2} (I_\mu - N_\mu)^2 - \frac{s_3}{s_2} N_\mu^2 + \sum_{r,s} \Omega_{rs} C_\mu^r C_\mu^s. \end{aligned} \quad (35)$$

Тензоры M_μ^a , $S_{\mu\nu}^a$, $\mathbf{T}_\mu^a$ и вектор N_μ определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} N_\mu &= \frac{1}{2} \sum_{a,b,c} \varepsilon^{abc} \rho_a^{-2} (B_\nu^a B_\nu^c B_\mu^b + \bar{B}_\nu^a \bar{B}_\nu^c \bar{B}_\mu^b), \\ M_\mu^a &= \sum_{b,c} \frac{\varepsilon^{abc}}{2i\rho_a} (B_\nu^a B_\nu^c B_\mu^b - \bar{B}_\nu^a \bar{B}_\nu^c \bar{B}_\mu^b), \\ S_{\mu\nu}^a &= \frac{i}{4} \varepsilon^{abc} e^{i\gamma_a} ((\sin \alpha_a)^{-1} B_\nu^b B_\mu^c - (\cos \alpha_a)^{-1} \bar{B}_\nu^b \bar{B}_\mu^c), \\ (T_\mu^a)_1 &= \cos(2\alpha_a) \cos 2\gamma_a \operatorname{Im} \Phi_\mu^a + \sin 2\gamma_a \operatorname{Re} \Phi_\mu^a, \\ (T_\mu^a)_2 &= \cos(2\alpha_a) \sin 2\gamma_a \operatorname{Im} \Phi_\mu^a - \cos 2\gamma_a \operatorname{Re} \Phi_\mu^a, \\ (T_\mu^a)_3 &= \sin(2\alpha_a) \operatorname{Im} \Phi_\mu^a, \end{aligned}$$

где Φ_μ^a — это комплексные величины

$$\Phi_\mu^a = \varepsilon^{abc} (\sin \alpha_a e^{i\gamma_a} \mathbf{e}_\nu^a - \cos \alpha_a e^{-i\gamma_a} \bar{\mathbf{e}}_\nu^a) B_\nu^c B_\mu^b.$$

Произведение $e^{i\gamma_a} \mathbf{e}_\mu^a$ и функция Φ_μ^a инвариантны относительно поворота базиса $(\mathbf{e}_\mu^a, \bar{\mathbf{e}}_\mu^a)$ (9), следовательно, вектор $\mathbf{T}_\mu^a$, так же как и производная $\nabla_\mu \mathbf{t}^a$, ковариантен относительно данного поворота, и их сумма, появляющаяся в формуле (35), является корректно определенной величиной.

Просуммировав формулы (32), (33), (35), можно переписать лагранжиан $SU(3)$ поля Янга–Миллса в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{3} \sum_a (H_{\mu\nu}^a)^2 + 2(E_{\mu\nu}^3)^2 + \frac{2}{3}(E_{\mu\nu}^8)^2 + 2E_{\mu\nu}^3 H_{\mu\nu}^1 + \\ & + 2(H_{\mu\nu}^1 - 2E_{\mu\nu}^3)(G_{\mu\nu}^2 + G_{\mu\nu}^3 - 2G_{\mu\nu}^1) + \frac{2}{3}E_{\mu\nu}^8(H_{\mu\nu}^3 - H_{\mu\nu}^2) + \\ & + 2(H_{\mu\nu}^3 - H_{\mu\nu}^2 + 2E_{\mu\nu}^8)(G_{\mu\nu}^3 - G_{\mu\nu}^2) + 3 \sum_a (G_{\mu\nu}^a)^2 - \left(\sum_a G_{\mu\nu}^a \right)^2 + \\ & + \sum_{a=1,2,3} 4 \left((\partial_\mu \rho_a + M_\mu^a)^2 - (M_\mu^a)^2 + \rho_a^2 (|\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a|^2 - (\Gamma_\mu^a)^2 + t_+^a (\partial_\mu \mathbf{e}_\nu^a + S_{\mu\nu}^a)^2 + \right. \\ & + t_-^a (\partial_\mu \bar{\mathbf{e}}_\nu^a + \bar{S}_{\mu\nu}^a)^2 - (S_{\mu\nu}^a)^2 - (\bar{S}_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4}(\nabla_\mu \mathbf{t}^a + \mathbf{T}_\mu^a)^2 - \frac{1}{4}(\mathbf{T}_\mu^a)^2 \Big) + \\ & + 4 \frac{s_3}{s_2} (I_\mu - N_\mu)^2 - \frac{s_3}{s_2} N_\mu^2 + 4 \sum_a |\varepsilon^{abc} B_\mu^b B_\nu^c|^2 + \sum_{r,s} \Omega_{rs} C_\mu^r C_\mu^s + \\ & + 12\varepsilon^{1bc} C_\mu^3 (B_\nu^1 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) - 4\varepsilon^{2bc} C_\mu^8 (B_\nu^2 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}) + \\ & + 4\varepsilon^{3bc} C_\mu^8 (B_\nu^3 B_\mu^b B_\nu^c + \text{к.с.}). \end{aligned} \quad (36)$$

Здесь последние пять строк получены из последней строки лагранжиана (19), а первые три — соответственно из первых трех строк этого лагранжиана и вклада калибровочных слагаемых (20).

Лагранжиан (19), в отличие от лагранжиана $SU(2)$ поля Янга–Миллса (4), неинвариантен относительно преобразования $B_\mu^a \rightarrow -B_\mu^a$. Вследствие этого в формулу (36) наряду с функциями двойного угла входят также выражения $\sin \alpha_a$, $\cos \alpha_a$.

4. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Обобщение модельной структуры (1) для “электрических” переменных, содержащихся в лагранжиане (36), выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_e = & \frac{1}{12} \left(\sum_a \left((\mathbf{t}^a, \partial_\mu \mathbf{t}^a \times \partial_\nu \mathbf{t}^a) - \tilde{\rho}_a^2 \sum_b (\mathbf{t}^b, \partial_\mu \mathbf{t}^b \times \partial_\nu \mathbf{t}^b) \right)^2 + \right. \\ & \left. + \sum_a \rho_a^2 (\partial_\mu \mathbf{t}^a)^2 + \frac{s_3}{s_2} \left(\sum_a \cos(2\alpha_a) \partial_\mu \gamma_a + 3\partial_\mu \omega \right)^2 + V(\mathbf{t}^1, \mathbf{t}^2, \mathbf{t}^3) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Слагаемые $\cos(2\alpha_a) \partial_\mu \gamma_a$ здесь являются функциями векторов $\mathbf{t}^a$:

$$\cos(2\alpha) \partial_\mu \gamma = \frac{(\partial_\mu \mathbf{t} \times \mathbf{t})_3 t_3}{4(1 - (t_3)^2)}.$$

Такой лагранжиан может быть получен из выражения (36), например, при разложении по производным, если считать векторы $\mathbf{e}_\mu^a$ медленно меняющимися и некоррелирующими между собой величинами.

Лагранжиан (37) может быть записан через объекты, связанные с произведением групп $(SU(2))^{\otimes 3}$. Пусть

$$R_\mu = R_\mu^1 + R_\mu^2 + R_\mu^3$$

— это правая форма Морера–Картана, а каждая из трех форм $R_\mu^{1,2,3}$ построена следующим образом:

$$R_\mu^a = g_a^{-1} \partial_\mu g_a, \quad g_a = e^{-i\gamma_a \sigma_3^a} e^{-i\alpha_a \sigma_2^a} e^{i\omega \sigma_3^a}, \quad g_a \in (SU(2))^{\otimes 3}.$$

Пусть h_1, h_+, h_- — векторы из подалгебры Картана алгебры $(su(2))^3$:

$$h_1 = \frac{s_3}{s_2} (\sigma_3^1 + \sigma_3^2 + \sigma_3^3),$$

$$h_\pm = \frac{\rho_1^2 (c_\pm + d_\pm) \sigma_3^1 - \rho_2^2 c_\pm \sigma_3^2 - \rho_3^2 d_\pm \sigma_3^3}{\sqrt{2} (s_1^2 - 3s_2)^{1/4} (s_2 (c_\pm + d_\pm))^{1/2}},$$

где

$$s_1 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2,$$

$$c_\pm = \rho_3^4 - \rho_1^2 \rho_2^2 \pm \rho_3^2 \sqrt{s_1^2 - 3s_2},$$

$$d_\pm = \rho_2^4 - \rho_1^2 \rho_3^2 \pm \rho_2^2 \sqrt{s_1^2 - 3s_2},$$

а s_2 и s_3 — это определенные ранее симметричные формы второй и третьей степени квадратов плотностей ρ_a . В случае общего положения ($\rho_2 \neq \rho_3$) векторы h_1, h_+, h_- образуют ортонормированный базис относительно скалярного произведения

$$\langle x, y \rangle = \text{tr} \sum_a (\sigma_3^a)^2 \rho_a^{-2} xy.$$

Тогда квадратичные слагаемые лагранжиана (37) можно переписать в следующем виде:

$$\sum_a \rho_a^2 (\partial_\mu \mathbf{t}^a)^2 + \frac{s_3}{s_2} \left(\sum_a \cos(2\alpha_a) \partial_\mu \gamma_a - 3\partial_\mu \omega \right)^2 = - \sum_{a=1,+,-} \text{tr} [R_\mu, h_a]^2 - (\text{tr} h_1 R_\mu)^2.$$

Здесь возникает 1-форма

$$F = \text{tr} (h_1 R_\mu) dx^\mu = \left(\frac{s_3}{s_2} \right)^{1/2} \left(\sum_a \cos(2\alpha_a) \partial_\mu \gamma_a - 3\partial_\mu \omega \right) dx^\mu, \quad (38)$$

которая является первообразной (прообраза) 2-формы Кириллова

$$K_1 = \text{tr}(h_1[R_\mu, R_\nu]) dx^\mu \wedge dx^\nu = dF.$$

Две другие формы Кириллова,

$$K_\pm = \text{tr}(h_\pm[R_\mu, R_\nu]) dx^\mu \wedge dx^\nu,$$

участвуют в построении членов старшей степени по производным t^a :

$$\frac{1}{12} \sum_a \left((t^a, \partial_\mu t^a \times \partial_\nu t^a) - \tilde{\rho}_a^2 \sum_b (t^b, \partial_\mu t^b \times \partial_\nu t^b) \right)^2 = \xi_+ K_+ \wedge K_+^* + \xi_- K_- \wedge K_-^*,$$

где

$$\xi_\pm = -\frac{s_1 \pm \sqrt{s_1^2 - 3s_2}}{6s_2}.$$

Таким образом, в терминах форм Морера–Картана лагранжиан (37) переписывается в следующем виде:

$$\mathcal{L}_e = \xi_+ (\text{tr } h_+[R_\mu, R_\nu])^2 + \xi_- (\text{tr } h_-[R_\mu, R_\nu])^2 - \text{tr}[R_\mu, h_a]^2 - (\text{tr } h_1 R_\mu)^2. \quad (39)$$

Интерпретация первых двух слагаемых как квадратов двух форм Кириллова $K_\pm$, а последнего как квадрата первообразной третьей формы K_3 подразумевает возможность добавления к первообразной произвольной замкнутой 1-формы. Этой степени свободы и отвечает 1-форма $\partial_\mu \omega$, которая входит в выражение (38) для формы F . Таким образом, появление слагаемого $(s_3/s_2)I^2$ и седьмой “электрической” переменной ω в лагранжиане (36) имеет естественную алгебраическую интерпретацию в терминах форм Кириллова.

Прямое обобщение модельного лагранжиана (1), предложенное в работах [2], строится аналогично построению лагранжиана (39), но использует для членов старшей степени по производным динамических переменных формы Кириллова группы $SU(3)$, а не произведения групп $(SU(2))^{\otimes 3}$.

“Магнитные” переменные входят в лагранжиан (36) более простым образом. При переходе к гамильтонову формализму и разложении по производным медленно меняющихся и не коррелирующих между собой “электрических” переменных α_a, γ_a “магнитные” переменные $\mathbf{m}_a$ разделяются, и для каждой из них получается гамильтониан вида

$$\eta(\partial_k \mathbf{m} \times \partial_l \mathbf{m}, \mathbf{m})^2 + \varrho(\partial_k \mathbf{m})^2 + \varkappa \left(\frac{(\partial_k \mathbf{m} \times \mathbf{m})_3 m_3}{1 - (m_3)^2} \right)^2.$$

Эти выражения, хотя и отличаются от гамильтониана, соответствующего модельной структуре (1), наличием последнего слагаемого, но тем не менее сохраняют его основные свойства. Возможность появления этого слагаемого в гамильтонианах, обладающих устойчивыми струноподобными решениями, обсуждается в работе [9].

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведенное обобщение самодуальной параметризации поля Янга–Миллса позволяет выразить лагранжиан $SU(3)$ теории через три нейтральных скалярных поля ρ_a , два массивных векторных поля, три комплексных вектора единичной длины $\mathbf{e}_\mu^a$, имеющих “магнитную” интерпретацию, и семь “электрических” переменных $\alpha_a, \gamma_a, \omega$. “Магнитные” переменные входят в лагранжиан более простым способом, что вместе с появлением седьмой “электрической” переменной ω приводит к нарушению “электромагнитной” дуальности, имеющей место в лагранжиане $SU(2)$ поля Янга–Миллса. Функционал энергии для “магнитных” переменных разделяется на три экземпляра модификации гамильтониана “магнитных” переменных случая $SU(2)$. Переменные, имеющие “электрическую” интерпретацию, не порождают аналог лагранжиана (1) для вектора $\mathbf{n}$, принимающего значения в факторпространстве $SU(3)/(U(1))^2$, а образуют более сложное выражение, основанное на формах Кириллова произведения групп $(SU(2))^{\otimes 3}$.

Техника, описанная в этой статье, допускает обобщение на случай калибровочной группы $SU(N)$. Алгебра Ли $su(N)$ имеет подалгебру Картана размерности $r = N - 1$ и $d = 1/2(N(N - 1))$ корневых векторов. Соответственно лагранжиан $SU(N)$ поля Янга–Миллса будет зависеть от d наборов, состоящих из нейтральных скалярных полей ρ , “электрических” переменных α, γ и комплексных “магнитных” векторов $\mathbf{e}_\mu$. Кроме того, в лагранжиан войдут $d - r$ инвариантных токов I_μ , зависящих от дополнительных “электрических” переменных ω . Абстрактная схема такого обобщения предложена в статье [10].

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00085).

Список литературы

- [1] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Phys. Rev. Lett. 1999. V. 82. P. 1624.
- [2] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Phys. Lett. B. 1999. V. 449. P. 214; V. 464. P. 90.
- [3] *L. D. Faddeev, A. Niemi.* Phys. Lett. B. 2002. V. 525. P. 195.
- [4] *Y. M. Cho.* Phys. Rev. D. 1980. V. 21. P. 1080; 1981. V. 23. P. 2415; Phys. Rev. Lett. 1980. V. 44. P. 1115.
- [5] *L. D. Faddeev, A. J. Niemi.* Nature. 1997. V. 387. P. 58.
- [6] *J. Hietarinta, P. Salo.* Phys. Lett. B. 1999. V. 451. P. 60.
- [7] *R. Battye, P. M. Sutcliffe.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 4798.
- [8] *G. 't Hooft.* Nucl. Phys. B. 1981. V. 190. P. 455; 1978. V. 138. P. 1; *A. M. Polyakov.* Nucl. Phys. B. 1977. V. 120. P. 429.
- [9] *S. Nasir, A. J. Niemi.* Field theories from bundles of strings. hep-th/0106009.
- [10] *Т. А. Болохов.* Зап. научн. семин. ПОМИ. 2003. Т. 291. С. 35.

Поступила в редакцию 3.VI.2003 г.