Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Семихатов, А. Таормина, Твисты и особые векторы в $\widehat{sl}(2|1)$ -представлениях, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 474–491

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf510>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 17:35:52

© 2001 г.

А. М. Семихатов*, А. Таормина†

ТВИСТЫ И ОСОБЫЕ ВЕКТОРЫ В $\widehat{sl}(2|1)$ -ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

Предложены новые формулы для особых векторов в модулях Верма над аффинной супералгеброй Ли $\widehat{sl}(2|1)$. Анализируется совместное существование особых векторов различных типов и отождествляются твистованные модули $\mathcal{N}_{h,k;\theta}^{\pm}$, возникающие как подмодули и фактор-модули $\widehat{sl}(2|1)$ -модулей Верма. Показано, что при должном учете твистов (преобразований спектрального потока) можно построить резольвенту неприводимых представлений, состоящую только из модулей $\mathcal{N}_{h,k;\theta}^{\pm}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

В данной работе рассматриваются элементы теории представлений аффинной супералгебры Ли $\widehat{sl}(2|1)$. Аффинная $sl(2|1)$ симметрия возникает в моделях неупорядоченных систем [1]–[3], связанных с целочисленным квантовым эффектом Холла. Алгебра $\widehat{sl}(2|1)$ интересна также тем, что она в определенном смысле сочетает характерные черты аффинной алгебры Ли $\widehat{sl}(2)$ и $N = 2$ суперконформной алгебры. С последней она связана посредством гамильтоновой редукции [4]–[6] и ее “обращения” [7]. Связь между алгебрами $\widehat{sl}(2|1)$ и $\widehat{sl}(2)$, помимо очевидного вложения подалгебры, была разработана в [8], где было показано, что $\widehat{sl}(2|1)$ есть вертекс-операторное расширение суммы двух алгебр $\widehat{sl}(2)$ с “двойственными” уровнями k и k' , такими что $(k+1)(k'+1) = 1$. Конструкция предложенная в работе [8], приводит к формуле разложения для $\widehat{sl}(2|1)$ -представлений в терминах представлений $\widehat{sl}(2)_k \oplus \widehat{sl}(2)_{k'}$. При этом, беря допустимые представления двух $\widehat{sl}(2)$ алгебр, можно получить естественный класс $\widehat{sl}(2|1)$ представлений. Однако далеко не все из этих $\widehat{sl}(2|1)$ -представлений изучались ранее; в частности, характеры известны только для подкласса этих представлений [9].

Характеры более широкого класса $\widehat{sl}(2|1)$ -представлений можно найти путем построения резольвент; это, в свою очередь, требует анализа особых векторов и отображений между модулями Верма. Важную роль в этом анализе играют спектральные потоки (*твисты*) и другие автоморфизмы алгебры $\widehat{sl}(2|1)$. В данной работе мы обобщаем

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

†Department of Mathematical Sciences, University of Durham, UK

“продолженные” особые векторы [9], [10] в $\widehat{sl}(2|1)$ -модулях Верма таким образом, что новые формулы применимы к вырождениям определенного типа, при которых ранее известные формулы давали (некорректный) нулевой результат. Это такие вырождения, при которых одновременно существует еще и так называемый “заряженный” сингулярный вектор (мы также напоминаем явную конструкцию для заряженных сингулярных векторов). “Устойчивость” особых векторов при вырождениях модулей обеспечивается включением твистов в “продолженные” формулы. Эти новые особые векторы можно использовать при построении резольвент и нахождении формул для характеров.

Рис. 1. Корневая диаграмма $sl(2|1)$.

2. $\widehat{sl}(2|1)$ -МОДУЛИ И АВТОМОРФИЗМЫ

2.1. Алгебра $\widehat{sl}(2|1)$ и ее автоморфизмы. Аффинная супералгебра Ли $\widehat{sl}(2|1)$ порождена четырьмя бозонными токами E^{12} , H^- , F^{12} и H^+ , четырьмя фермионными токами E^1 , E^2 , F^1 и F^2 и центральным элементом (который мы отождествляем с его собственным значением k). Для удобства на рис. 1 мы приводим двумерную корневую диаграмму конечномерной супералгебры Ли $sl(2|1)$, представленную в пространстве Минковского с фермионными корнями, направленными вдоль светового конуса. Подалгебра $\widehat{sl}(2)$ порождена токами E^{12} , H^- и F^{12} , а коммутирующая с ней подалгебра $u(1)$ порождена током H^+ . Ненулевые коммутационные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 [H_m^-, E_n^{12}] &= E_{m+n}^{12}, & [H_m^-, F_n^{12}] &= -F_{m+n}^{12}, \\
 [E_m^{12}, F_n^{12}] &= m\delta_{m+n,0}k + 2H_{m+n}^-, & [H_m^\pm, H_n^\pm] &= \mp \frac{1}{2}m\delta_{m+n,0}k, \\
 [F_m^{12}, E_n^2] &= F_{m+n}^1, & [E_m^{12}, F_n^2] &= -E_{m+n}^1, \\
 [F_m^{12}, E_n^1] &= -F_{m+n}^2, & [E_m^{12}, F_n^1] &= E_{m+n}^2, \\
 [H_m^\pm, E_n^1] &= \frac{1}{2}E_{m+n}^1, & [H_m^\pm, F_n^1] &= -\frac{1}{2}F_{m+n}^1, \\
 [H_m^\pm, E_n^2] &= \mp \frac{1}{2}E_{m+n}^2, & [H_m^\pm, F_n^2] &= \pm \frac{1}{2}F_{m+n}^2, \\
 [E_m^1, F_n^1] &= -m\delta_{m+n,0}k + H_{m+n}^+ - H_{m+n}^-, & &
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} [E_m^2, F_n^2] &= m\delta_{m+n,0}k + H_{m+n}^+ + H_{m+n}^-, \\ [E_m^1, E_n^2] &= E_{m+n}^{12}, \quad [F_m^1, F_n^2] = F_{m+n}^{12}. \end{aligned}$$

Сугаваровский тензор энергии-импульса равен

$$T_{\text{Sug}} = \frac{1}{k+1} (H^- H^- - H^+ H^+ + E^{12} F^{12} + E^1 F^1 - E^2 F^2). \quad (2.2)$$

Имеются автоморфизмы алгебры

$$\begin{aligned} \alpha : \quad & E_n^1 \mapsto F_n^2, \quad E_n^2 \mapsto F_n^1, \quad E_n^{12} \mapsto F_n^{12}, \\ & F_n^1 \mapsto E_n^2, \quad F_n^2 \mapsto E_n^1, \quad F_n^{12} \mapsto E_n^{12}, \\ & H_n^+ \mapsto H_n^+, \quad H_n^- \mapsto -H_n^-, \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \beta : \quad & E_n^1 \mapsto E_n^2, \quad E_n^2 \mapsto E_n^1, \quad E_n^{12} \mapsto E_n^{12}, \\ & F_n^1 \mapsto -F_n^2, \quad F_n^2 \mapsto -F_n^1, \quad F_n^{12} \mapsto F_n^{12}, \\ & H_n^+ \mapsto -H_n^+, \quad H_n^- \mapsto H_n^-, \end{aligned} \quad (2.4)$$

и семейство автоморфизмов при $\theta \in \mathbb{Z}$

$$\mathcal{U}_\theta : \quad \begin{aligned} E_n^1 &\mapsto E_{n-\theta}^1, & E_n^2 &\mapsto E_{n+\theta}^2, & H_n^+ &\mapsto H_n^+ + k\theta\delta_{n,0} \\ F_n^1 &\mapsto F_{n+\theta}^1, & F_n^2 &\mapsto F_{n-\theta}^2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

(при этом $\widehat{sl}(2)$ -подалгебра остается инвариантной). Для этих автоморфизмов выполняются соотношения

$$\alpha^2 = 1, \quad \beta^2 = 1, \quad (\alpha\beta)^4 = 1, \quad \alpha\mathcal{U}_\theta = \mathcal{U}_\theta\alpha, \quad (\beta\mathcal{U}_\theta)^2 = 1. \quad (2.6)$$

Подгруппа $\mathbb{Z}$ автоморфизмов $(\mathcal{U}_\theta)_{\theta \in \mathbb{Z}}$, называемая *спектральным потоком*, будет широко использоваться в дальнейшем. Другая группа $\mathbb{Z}$ автоморфизмов (“второй” спектральный поток, затрагивающий $\widehat{sl}(2)$ -подалгебру, ср. [11]) действует как

$$\mathcal{A}_\eta : \quad \begin{aligned} E_n^1 &\mapsto E_{n+\eta}^1, & E_n^2 &\mapsto E_{n+\eta}^2, & E_n^{12} &\mapsto E_{n+2\eta}^{12}, & H_n^- &\mapsto H_n^- + k\eta\delta_{n,0}, \\ F_n^1 &\mapsto F_{n-\eta}^1, & F_n^2 &\mapsto F_{n-\eta}^2, & F_n^{12} &\mapsto F_{n-2\eta}^{12}, & H_n^+ &\mapsto H_n^+. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Имеется также *автоморфизм*

$$\gamma = \mathcal{U}_{\frac{1}{2}} \circ \mathcal{A}_{-\frac{1}{2}} \quad (2.8)$$

(хотя $\mathcal{U}_{\frac{1}{2}}$ и $\mathcal{A}_{-\frac{1}{2}}$ не автоморфизмы, а отображения в изоморфную алгебру, их композиция является автоморфизмом). Его степени $\mathcal{X}_\theta = \gamma^\theta$ при $\theta \in \mathbb{Z}$ отображают генераторы как

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_\theta : \quad & E_n^1 \mapsto E_{n-\theta}^1, & E_n^2 &\mapsto E_n^2, & E_n^{12} &\mapsto E_{n-\theta}^{12}, & H_n^- &\mapsto H_n^- - \frac{k}{2}\theta\delta_{n,0}, \\ & F_n^1 &\mapsto F_{n+\theta}^1, & F_n^2 &\mapsto F_n^2, & F_n^{12} &\mapsto F_{n+\theta}^{12}, & H_n^+ &\mapsto H_n^+ + \frac{k}{2}\theta\delta_{n,0}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

2.2. Твистованные условия старшего веса и твистованные модули Верма.

Применение автоморфизмов алгебры к модулям над этой алгеброй дает, вообще говоря, неизоморфные модули. Поскольку нильпотентная подалгебра претерпевает отображение под действием автоморфизмов, соответствующим образом изменяются условия уничтожения на векторы старшего веса. Таким образом, существование группы автоморфизмов приводит к произволу в выборе типа условий уничтожения, налагаемых на векторы старшего веса в модулях со старшим вектором (в частности, модулях Верма). Мы выберем семейство нильпотентных подалгебр таким образом, что соответствующие условия уничтожения имеют вид¹⁾

$$\begin{aligned} E_{\geq -\theta}^1 &\approx 0, & E_{\geq \theta}^2 &\approx 0, \\ F_{\geq \theta+1}^1 &\approx 0, & F_{\geq 1-\theta}^2 &\approx 0, & F_{\geq 1}^{12} &\approx 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

для фиксированного $\theta \in \mathbb{Z}$. Эти условия уничтожения называются *твистованными условиями старшего веса* при $\theta \neq 0$ и нетвистованными в частном случае $\theta = 0$. Твистованные условия старшего веса с различными θ отображаются одно в другое спектральным потоком (2.5).

Заметим, что автоморфизм $\gamma \circ \alpha$ отображает твистованные условия старшего веса (2.10) в условия старшего веса другого типа, а именно такие, где выполнены условия уничтожения

$$\begin{aligned} E_{\geq -\theta}^1 &\approx 0, & E_{\geq \theta+1}^2 &\approx 0, & E_{\geq 0}^{12} &\approx 0, \\ F_{\geq \theta+1}^1 &\approx 0, & F_{\geq -\theta}^2 &\approx 0. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Модуль Верма, порожденный из твистованного состояния старшего веса (которое удовлетворяет условиям (2.10)) может содержать *подмодуль*, порожденный из состояния, удовлетворяющего (2.11). Априори не гарантировано, что этот же подмодуль можно породить из твистованного состояния старшего веса, удовлетворяющего условиям уничтожения (2.10) при каком-либо θ . В этом состоит отличие от привычного случая $\widehat{sl}(2)$ -алгебры, где подмодули в данном модуле Верма можно породить из векторов, удовлетворяющих условиям старшего веса того же типа (т.е. *не* преобразованных автоморфизмами), что выполнено для старшего вектора модуля. Подобным же образом, даже в пределах выбранного семейства (2.10) твистованных условий старшего веса, модуль с нетвистованным ($\theta = 0$) вектором старшего веса может иметь подмодули, порожденные из некоторых твистованных состояний старшего веса, а не из состояний с нулевым твистом.

Для любого $\widehat{sl}(2|1)$ -модуля $\mathcal{R}$ обозначим через $\mathcal{R}_{;\theta}$ твистованный модуль $\mathcal{U}_{\theta}\mathcal{R}$, см. (2.5).

2.3. Действие преобразования спектрального потока на характеры. Характер $\chi_{\mathcal{R}_{;\theta}} \equiv \chi_{;\theta}^{\mathcal{R}}$ твистованного модуля $\mathcal{R}_{;\theta}$ выражается через характер модуля $\mathcal{R}$ следующим образом:

$$\chi_{;\theta}^{\mathcal{R}}(q, z, \zeta) = \zeta^{-k\theta} q^{-k\theta^2} \chi^{\mathcal{R}}(q, z, \zeta q^{2\theta}). \quad (2.12)$$

При изучении характеров (как и других свойств представлений), очевидно, достаточно ограничиться представителем каждой орбиты спектрального потока.

¹⁾Знак $\approx$ означает, что операторы следует применить к вектору; в данный момент нас интересует состав операторов уничтожения, а не вектор, поэтому мы опускаем последний в обозначениях.

2.4. Градуировки и экстремальные состояния. Всякий $\widehat{sl}(2|1)$ -модуль $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ -градуирован: *зарядом* (собственным значением H_0^-), *гиперзарядом* (собственным значением H_0^+) и *уровнем* (минус собственным значением L_0 , где L_n – генераторы Вирасоро, соответствующие сугаваровскому тензору энергии-импульса). Таким образом, состояния из модуля находятся в узлах трехмерной решетки. Из-за условий старшего веса все состояния в модуле лежат ниже некоторой плоскости в трехмерном пространстве. Те узлы решетки, которые заняты по крайней мере одним состоянием из модуля, образуют выпуклое трехмерное тело в $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Состояния, образующие поверхность этого тела, называются *экстремальными состояниями*, или экстремальными векторами. В частности, состояние старшего веса является экстремальным вектором. На рис. 2 представлена экстремальная диаграмма $\widehat{sl}(2|1)$ -модуля Верма. Поверхность параболоида интерполирует между экстремальными состояниями. Горизонтальные оси представляют собственные значения $H_0^+ + H_0^-$ и $H_0^+ - H_0^-$, а вертикальная ось – минус уровень; вектор старшего веса помещается в начало координат. Последовательность стрелок показывает заряженный особый вектор (см. раздел 4); в зависимости от того, как выполнены отождествления, это или $C^{(-)}(-3)$ (тогда каждая нечетная стрелка представляет F_n^1 , а каждая четная – E_m^2), или $C^{(+)}(3)$ (и стрелки – соответственно F^2 и E^1), см. равенства (4.2), (4.3). Спектральный поток (2.5) сдвигает поверхность по самой себе так, что начало координат сползает вниз вдоль параболической кривой, проходящей через концы каждой второй стрелки.

3. $\widehat{sl}(2|1)$ МОДУЛИ ВЕРМА

Ниже мы полагаем, что $k \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$, h_- и h_+ – произвольные комплексные числа, $\theta \in \mathbb{Z}$.

Определим семейство *твистованных* модулей Верма, связанных друг с другом спектральным потоком.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. *Твистованный модуль Верма* $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ над $\widehat{sl}(2|1)$ -алгеброй уровня k свободно порожден генераторами $E_{\leq -\theta-1}^1, E_{\leq \theta-1}^2, E_{\leq -1}^{12}, F_{\leq \theta}^1, F_{\leq -\theta}^2, F_{\leq 0}^{12}, H_{\leq -1}^-$ и $H_{\leq -1}^+$ из твистованного состояния старшего веса $|h_-, h_+, k; \theta\rangle$, удовлетворяющего условиям уничтожения (2.10) и условиям

$$H_0^- |h_-, h_+, k; \theta\rangle = h_- |h_-, h_+, k; \theta\rangle, \quad (3.1)$$

$$H_0^+ |h_-, h_+, k; \theta\rangle = (h_+ - k\theta) |h_-, h_+, k; \theta\rangle. \quad (3.2)$$

При этом имеем

$$\mathcal{U}_{\theta'} |h_-, h_+, k; \theta\rangle = |h_-, h_+, k; \theta + \theta'\rangle \quad (3.3)$$

и для модулей Верма, очевидно, $\mathcal{U}_{\theta'} \mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta} = \mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta + \theta'}$.

Будем писать

$$|X\rangle \doteq |h_-, h_+, k; \theta\rangle \quad (3.4)$$

для всякого состояния $|X\rangle$, удовлетворяющего условиям старшего веса (2.10) и (3.1), (3.2).

 Рис. 2. Экстремальная диаграмма $\widehat{sl}(2|1)$ -модуля Верма.

Характер модуля $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ равен

$$\begin{aligned} \chi_{h_-, h_+, k; \theta}^{\mathcal{P}}(q, z, \zeta) &\equiv \text{Tr}_{\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}} \left(q^{\mathcal{L}_0^{\text{Sug}}} z^{H_0^-} \zeta^{H_0^+} \right) = \\ &= z^{h_-} \zeta^{h_+ - (k+1)\theta} q^{\frac{h_-^2 - h_+^2}{k+1} + 2\theta h_+ - (k+1)\theta^2} \frac{\vartheta_{1,0}(q, z^{\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}}) \vartheta_{1,0}(q, z^{\frac{1}{2}} \zeta^{-\frac{1}{2}})}{\vartheta_{1,1}(q, z) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m)^3}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где тэта-функции Якоби определяются как

$$\begin{aligned} \vartheta_{1,1}(q, z) &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} (-1)^m q^{\frac{1}{2}(m^2 - m)} z^{-m} = \\ &= \prod_{m \geq 0} (1 - z^{-1} q^m) \prod_{m \geq 1} (1 - z q^m) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m), \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\vartheta_{1,0}(q, z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} q^{\frac{1}{2}(m^2 - m)} z^{-m} = \prod_{m \geq 0} (1 + z^{-1} q^m) \prod_{m \geq 1} (1 + z q^m) \prod_{m \geq 1} (1 - q^m). \quad (3.7)$$

Пусть $|h_-, k; \theta\rangle^-$ обозначает состояние, удовлетворяющее условиям старшего веса

$$\begin{aligned} E_{-\theta}^1 &\approx 0, & E_{\theta}^2 &\approx 0, \\ F_{\theta}^1 &\approx 0, & F_{1-\theta}^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

и

$$H_0^- |h_-, k; \theta\rangle^- = h_- |h_-, k; \theta\rangle^-. \quad (3.9)$$

Из сравнения условий уничтожения (2.10) и (3.8) видно, что последние являются усилением первых. Отсюда в силу коммутационных соотношений алгебры следует, что из двух параметров старшего вектора $h_{\pm}$ лишь один остается независимым. Пусть $\mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^-$ — модуль, свободно порожденный генераторами $E_{\leq -\theta-1}^1, E_{\leq -\theta-1}^2, E_{\leq -1}^{12}, F_{\leq -\theta-1}^1, F_{\leq -\theta}^2, F_{\leq 0}^{12}, H_{\leq -1}^-,$ и $H_{\leq -1}^+$ из $|h_-, k; \theta\rangle^-$. Его характер равен

$$\chi_{h_-, k; \theta}^{\mathcal{N}^-}(q, z, \zeta) = \frac{\chi_{h_-, h_-, k; \theta}^{\mathcal{P}}(q, z, \zeta)}{1 + q^{-\theta} z^{-\frac{1}{2}} \zeta^{-\frac{1}{2}}}. \quad (3.10)$$

В терминах экстремальных диаграмм типа приведенной на рис. 2 модуль $\mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^-$ более узкий, чем модули Верма $\mathcal{P}$. В соответствии с этим мы будем называть $\mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^-$ *узкими* модулями Верма (несмотря на то что использование здесь термина “модуль Верма” представляет собой некоторую вольность).

Имеется второй тип узких модулей Верма. А именно, пусть $|h_-, k; \theta\rangle^+$ обозначает состояния, удовлетворяющие условиям старшего веса

$$\begin{aligned} E_{-\theta}^1 &\approx 0, & E_{\theta}^2 &\approx 0, \\ F_{\theta+1}^1 &\approx 0, & F_{-\theta}^2 &\approx 0 \end{aligned} \quad (3.11)$$

и

$$H_0^- |h_-, k; \theta\rangle^+ = h_- |h_-, k; \theta\rangle^+, \quad (3.12)$$

и пусть $\mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^+$ — модуль, свободно порожденный генераторами $E_{\leq -\theta-1}^1, E_{\leq -\theta-1}^2, E_{\leq -1}^{12}, F_{\leq \theta}^1, F_{\leq -\theta-1}^2, F_{\leq 0}^{12}, H_{\leq -1}^-,$ и $H_{\leq -1}^+$ из $|h_-, k; \theta\rangle^+$. Характер модуля $\mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^+$ равен

$$\chi_{h_-, k; \theta}^{\mathcal{N}^+}(q, z, \zeta) = \frac{\chi_{h_-, -h_-, k; \theta}^{\mathcal{P}}(q, z, \zeta)}{1 + q^{\theta} z^{-\frac{1}{2}} \zeta^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.13)$$

Введенные выше состояния $|h_-, k; \theta\rangle^{\pm}$ ведут себя под действием некоторых из автоморфизмов, перечисленных в п. 2.1, следующим образом:

$$\beta |h_-, k; \theta\rangle^+ = |h_-, k; -\theta\rangle^-, \quad \mathcal{U}_{\theta'} |h_-, k; \theta\rangle^{\pm} = |h_-, k; \theta + \theta'\rangle^{\pm}. \quad (3.14)$$

Для соответствующих модулей Верма тогда имеем, например,

$$\beta \mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^{\pm} = \mathcal{N}_{h_-, k; -\theta}^{\mp}. \quad (3.15)$$

Заметим еще, что для любого модуля $\mathcal{M}$ действие автоморфизма β на характер дается формулой $\chi^{\beta \mathcal{M}}(q, z, \zeta) = \chi^{\mathcal{M}}(q, z, \zeta^{-1})$.

4. ЗАРЯЖЕННЫЕ ОСОБЫЕ ВЕКТОРЫ

Узкие модули Верма получаются из модулей Верма $\mathcal{P}$ факторизацией по состояниям, традиционно называемым заряженными особыми векторами.

4.1. Заряженные особые векторы: явные формулы. По определению *заряженные особые векторы* – это особые векторы, возникающие в модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ при

$$h_+ = \pm h_- - (k+1)n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (4.1)$$

Они задаются следующей явной конструкцией [8], [10]. При $h_+ - h_- = -(k+1)n$, $n \in \mathbb{Z}$, заряженный особый вектор в твистованном модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ равен

$$|C^{(-)}(n, h_-, k; \theta)\rangle = \begin{cases} \underbrace{E_{\theta+n}^2 \cdots E_{\theta-1}^2}_{-n} \underbrace{F_{\theta+n}^1 \cdots F_{\theta}^1}_{-n+1} \times \\ \times |h_-, h_- - n(k+1), k; \theta\rangle, & n \leq 0, \\ \underbrace{E_{-\theta-n}^1 \cdots E_{-\theta-1}^1}_n \underbrace{F_{1-\theta-n}^2 \cdots F_{-\theta}^2}_n \times \\ \times |h_-, h_- - n(k+1), k; \theta\rangle, & n \geq 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

а при $h_+ + h_- = -n(k+1)$, $n \in \mathbb{Z}$, заряженный особый вектор в $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ равен

$$|C^{(+)}(n, h_-, k; \theta)\rangle = \begin{cases} \underbrace{E_{\theta+n}^2 \cdots E_{\theta-1}^2}_{-n} \underbrace{F_{\theta+n+1}^1 \cdots F_{\theta}^1}_{-n} \times \\ \times |h_-, -h_- - n(k+1), k; \theta\rangle, & n \leq -1, \\ \underbrace{E_{-\theta-n}^1 \cdots E_{-\theta-1}^1}_n \underbrace{F_{-\theta-n}^2 \cdots F_{-\theta}^2}_{n+1} \times \\ \times |h_-, -h_- - n(k+1), k; \theta\rangle, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

Элементарная проверка показывает, что вектор (4.2) удовлетворяет условиям уничтожения (в которых мы опускаем сам особый вектор)

$$\begin{aligned} E_{-\theta-n}^1 &\approx 0, & E_{\theta+n}^2 &\approx 0, \\ F_{\theta+n}^1 &\approx 0, & F_{1-\theta-n}^2 &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

т.е. условиям (3.8) с параметром твиста $\theta+n$. Легко видеть, что из этих условий уничтожения следует, что данный вектор действительно порождает подмодуль в соответствующем модуле $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$. Более точно имеем

$$|C^{(-)}(n, h_-, k; \theta)\rangle \doteq \begin{cases} |h_- - \frac{1}{2}, k; \theta+n\rangle^-, & n \leq 0, \\ |h_-, k; \theta+n\rangle^-, & n \geq 1. \end{cases} \quad (4.5)$$

Мы используем обозначения, аналогичные (3.4), для выражения того факта, что вектор в левой части удовлетворяет тем же условиям уничтожения и имеет те же собственные значения, что и определяемые формулами (3.8), (3.9) для вектора в правой части.

Аналогично вектор (4.3) удовлетворяет условиям уничтожения

$$\begin{aligned} E_{-\theta-n}^1 &\approx 0, & E_{\theta+n}^2 &\approx 0, \\ F_{\theta+n+1}^1 &\approx 0, & F_{-\theta-n}^2 &\approx 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

т.е. условиям (3.11) с параметром твиста $\theta + n$, или, более точно,

$$|C^{(+)}(n, h_-, k; \theta)\rangle \doteq \begin{cases} |h_-, k; \theta + n\rangle^+, & n \leq -1, \\ |h_- - \frac{1}{2}, k; \theta + n\rangle^+, & n \geq 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Мы будем писать $C^{(\pm)}(n, h_-, k) = \mathcal{C}^{(\pm)}(n, h_-, k) |h_-, \mp h_- - n(k+1), k\rangle$ и будем называть $\mathcal{C}^{(\pm)}$ *оператором заряженного особого вектора*. Рассмотрим теперь более подробно подмодули, порожденные из $|C^{(-)}(0, h_-, k; \theta)\rangle$ и $|C^{(+)}(0, h_-, k; \theta)\rangle$.

4.2. Заряженные особые векторы: подмодули и факторы. В модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_-, k; \theta}$ имеется заряженный особый вектор $|C^{(-)}(0, h_-, k; \theta)\rangle$, заданный формулой

$$F_\theta^1 |h_-, h_-, k; \theta\rangle \doteq |h_- - \frac{1}{2}, k; \theta\rangle^-. \quad (4.8)$$

Подмодуль, порожденный соотношением (4.8), есть $\mathcal{N}_{h_- - 1/2, k; \theta}^- \subset \mathcal{P}_{h_-, h_-, k; \theta}$. Более того, имеем точную последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{h_- - \frac{1}{2}, k; \theta}^- \rightarrow \mathcal{P}_{h_-, h_-, k; \theta} \rightarrow \mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^- \rightarrow 0. \quad (4.9)$$

Доказательство следует из приведенных выше наблюдений об условиях старшего веса и элементарного тождества для характеров:

$$\chi_{h_- - \frac{1}{2}, k; \theta}^{\mathcal{N}^-}(q, z, \zeta) + \chi_{h_-, k; \theta}^{\mathcal{N}^-}(q, z, \zeta) = \chi_{h_-, h_-, k; \theta}^{\mathcal{P}}(q, z, \zeta). \quad (4.10)$$

Аналогично в модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, -h_-, k; \theta}$ существует заряженный особый вектор $|C^{(+)}(0, h_-, k; \theta)\rangle$, заданный формулой

$$F_{-\theta}^2 |h_-, -h_-, k; \theta\rangle \doteq |h_- - \frac{1}{2}, k; \theta\rangle^+. \quad (4.11)$$

Из этого состояния порожден модуль $\mathcal{N}_{h_- - 1/2, k; \theta}^+$. Имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow \mathcal{N}_{h_- - \frac{1}{2}, k; \theta}^+ \rightarrow \mathcal{P}_{h_-, -h_-, k; \theta} \rightarrow \mathcal{N}_{h_-, k; \theta}^+ \rightarrow 0. \quad (4.12)$$

5. ОСОБЫЕ ВЕКТОРЫ МФФ В $\widehat{s\ell}(2|1)$ -МОДУЛЯХ ВЕРМА

Заряженные особые векторы, рассмотренные в предыдущем разделе, задаются простыми явными формулами, потому что они возникают в одном из экстремальных состояний модуля Верма. Кроме этих особых векторов, имеются еще и те, которые лежат во “внутренности” модуля. В данном разделе мы рассмотрим эти особые векторы.

5.1. Особые векторы МФФ как ненулевые элементы модуля Верма. Известна конструкция особых векторов $\widehat{s\ell}(2|1)$, соответствующих отражениям относительно двух бозонных корней [9], [10]. Соответствующие формулы для особых векторов похожи на таковые формулы для аффинных алгебр Ли, приведенные в работе [12] Маликовым, Фейгиным и Фуксом (отсюда аббревиатура МФФ). Больше всего формулы для

особых векторов $\widehat{sl}(2|1)$ [9], [10] похожи на формулу для особых векторов $\widehat{sl}(2)$ [12], и поэтому мы будем называть их МФФ-особыми векторами также и в $\widehat{sl}(2|1)$ -контексте. Однако в отличие от своего $\widehat{sl}(2)$ -аналога, эти формулы для особых векторов могут давать нулевой результат при некоторых “вырожденных” значениях параметров старшего веса (это было отмечено в [10]).

В силу этого обращения в нуль представляется, что *подмодуль*, который при других значениях параметров порождается из выбранного МФФ-особого вектора, “исчезает” в вырожденных точках в пространстве параметров старшего веса. Однако это обращение в нуль в действительности относится только к самой формуле и свидетельствует лишь о возможном изменении структуры подмодуля. Известные из [9], [10] формулы для особых векторов явным образом содержат операторы уничтожения, из-за чего и возникает обращение в нуль при некоторых вырождениях (т.е. на подмножествах в пространстве параметров старшего веса). Структура подмодулей в этих специальных точках пространства параметров реорганизуется, но имеющиеся формулы для МФФ-векторов не дают адекватного средства для исследования таких вырождений.

Ниже мы предлагаем формулу для особых векторов (которые по-прежнему называем МФФ-особыми векторами), содержащую только операторы рождения и поэтому дающую ненулевой элемент в выбранном модуле Верма. В точке общего положения новое выражение дает вектор, порождающий тот же подмодуль, что и “старый” МФФ-вектор. В отличие от последнего, однако, новые формулы позволяют увидеть, как реорганизуется структура подмодулей в точках вырождения.

Каждое из “старых” МФФ-выражений, MFF^+ и MFF^- , следует заменить на *два* — соответственно $(MFF_{(+)}^+, MFF_{(-)}^+)$ и $(MFF_{(+)}^-, MFF_{(-)}^-)$. В случае общего положения три вектора $MFF_{(+)}^+$, $MFF_{(-)}^+$ и MFF^+ порождают один и тот же подмодуль, но вырождение может повлиять на соотношение между подмодулями, порожденными из каждого такого вектора. Ситуация с векторами $MFF_{(+)}^-$ и $MFF_{(-)}^-$ аналогична, как будет показано ниже.

5.2. МФФ-особые векторы: “продолженные” выражения и алгебраические правила. Напомним (см., например, [9] и приведенную там библиографию), что особый вектор возникает в модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_+, k; \theta}$ всякий раз, когда $h_- = j^+(r, s, k)$ или $h_- = j^-(r, s, k)$, где

$$j^+(r, s, k) = \frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), \quad r, s \in \mathbb{N}, \quad (5.1)$$

$$j^-(r, s, k) = -\frac{r}{2} + \frac{s}{2}(k+1), \quad r, s \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Как отмечено выше, мы называем соответствующие особые векторы МФФ-особыми векторами ввиду их очевидного подобия с конструкцией работы [12].

Рассмотрим сначала случай (5.1) и опишем пару векторов, каждый из которых порождает подмодуль в $\mathcal{P}_{j^+(r, s, k), h_+, k}$. Используя для краткости обозначение j^+ для $h_- = j^+(r, s, k)$, определим

$$\begin{aligned} MFF_{(-)}^+(r, s, h_+, k) = & E_{-s}^2 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-2)(k+1)} F_{-s+1}^1 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-3)(k+1)} \times \\ & \times E_{-s+1}^2 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-4)(k+1)} F_{-s+2}^1 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-5)(k+1)} \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \dots \times E_{-2}^2 (F_0^{12})^{2j^+ + 2(k+1)} F_{-1}^1 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + k+1} \times \\
& \times E_{-1}^2 (F_0^{12})^{2j^+} F_0^1 |j^+(r, s, k), h_+, k\rangle
\end{aligned} \tag{5.3}$$

и

$$\begin{aligned}
\text{MFF}_{(+)}^+(r, s, h_+ k) &= E_{-s}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-2)(k+1)} F_{-s+1}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-3)(k+1)} \times \\
& \times E_{-s+1}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-4)(k+1)} F_{-s+2}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-5)(k+1)} \times \\
& \dots \times E_{-2}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + 2(k+1)} F_{-1}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + k+1} \times \\
& \times E_{-1}^1 (F_0^{12})^{2j^+} F_0^2 |j^+(r, s, k), h_+, k\rangle.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Эти выражения можно переписать как элементы модулей Верма путем многократного применения соотношений

$$\begin{aligned}
(F_0^{12})^n E_m^{12} &= (-n(n-1)F_m^{12} - 2nH_m^- F_0^{12} + E_m^{12} F_0^{12} F_0^{12}) (F_0^{12})^{n-2}, \\
(F_0^{12})^n E_m^1 &= (-nF_m^2 + E_m^1 F_0^{12}) (F_0^{12})^{n-1}, \\
(F_0^{12})^n E_m^2 &= (nF_m^1 + E_m^2 F_0^{12}) (F_0^{12})^{n-1}, \\
(F_0^{12})^n H_m^- &= (nF_m^{12} + H_m^- F_0^{12}) (F_0^{12})^{n-1}
\end{aligned} \tag{5.5}$$

и

$$\begin{aligned}
(E_{-1}^{12})^n F_m^{12} &= (-n(n-1)E_{m-2}^{12} - kn\delta_{m,1} E_{-1}^{12} + 2nH_{m-1}^- E_{-1}^{12} + \\
& + F_m^{12} E_{-1}^{12} E_{-1}^{12}) (E_{-1}^{12})^{n-2}, \\
(E_{-1}^{12})^n F_m^1 &= (nE_{m-1}^2 + F_m^1 E_{-1}^{12}) (E_{-1}^{12})^{n-1}, \\
(E_{-1}^{12})^n F_m^2 &= (-nE_{m-1}^1 + F_m^2 E_{-1}^{12}) (E_{-1}^{12})^{n-1}, \\
(E_{-1}^{12})^n H_m^- &= (-nE_{m-1}^{12} + H_m^- E_{-1}^{12}) (E_{-1}^{12})^{n-1},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

которые выполнены для $n \in \mathbb{N}$ и затем постулируются для $n \in \mathbb{C}$. Из этих формул можно вывести полезные следствия

$$E_{-s}^1 \dots E_{-1}^1 F_{-s}^2 \dots F_{-1}^2 (E_{-1}^{12})^\alpha = (-1)^{s+1} E_{-s}^1 F_{-s}^2 (E_{-1}^{12})^\alpha E_{-s+1}^1 \dots E_{-1}^1 F_{-s+1}^2 \dots F_{-1}^2 \tag{5.7}$$

и

$$E_{-s}^1 \dots E_{-1}^1 F_{-s}^2 \dots F_{-1}^2 (F_0^{12})^\alpha = (F_0^{12})^\alpha E_{-s}^1 \dots E_{-1}^1 F_{-s}^2 \dots F_{-1}^2. \tag{5.8}$$

Аналогичные соотношения выполнены для другого $\widehat{sl}(2)$ -дублета токов E^2 и F^1 . Ниже эти формулы применяются при комплексных α .

Используя (5.5), (5.6), прямым вычислением легко проверить, что для векторов $\text{MFF}_{(+)}^+$ и $\text{MFF}_{(-)}^+$ выполняется

ЛЕММА 5.1. При $r, s \in \mathbb{N}$, состояния $\text{MFF}_{(-)}^{+}(r, s, h_{+}, k)$ и $\text{MFF}_{(+)}^{+}(r, s, h_{+}, k)$ удовлетворяют условиям уничтожения и формулам собственного значения, позволяющим записать (см. (3.5))

$$\text{MFF}_{(-)}^{+}(r, s, h_{+}, k) \doteq |j^{+}(r, s, k) - r, h_{+} - s(k+1), k; -s\rangle, \quad (5.9)$$

$$\text{MFF}_{(+)}^{+}(r, s, h_{+}, k) \doteq |j^{+}(r, s, k) - r, h_{+} + s(k+1), k; s\rangle. \quad (5.10)$$

Из этих условий, в частности, следует, что данные векторы действительно являются “особыми” в том смысле, что они порождают $\widehat{sl}(2|1)$ -подмодули.

Далее, в случае (5.2), обозначая $h_{-} = j^{-}(r, s, k) \equiv j^{-}$, определим пару особых векторов в $\mathcal{P}_{j^{-}(r, s, k), h_{+}, k}$:

$$\begin{aligned} \text{MFF}_{(-)}^{-}(r, s, h_{+}, k) = & (E_{-1}^{12})^{(2s-1)(k+1)-2j^{-}} E_{1-s}^2 (F_0^{12})^{(2s-2)(k+1)-2j^{-}} F_{2-s}^1 \times \\ & \times (E_{-1}^{12})^{(2s-3)(k+1)-2j^{-}} E_{2-s}^2 (F_0^{12})^{(2s-4)(k+1)-2j^{-}} F_{3-s}^1 \times \\ & \dots \times (E_{-1}^{12})^{3(k+1)-2j^{-}} E_{-1}^2 (F_0^{12})^{2(k+1)-2j^{-}} F_0^1 \times \\ & \times (E_{-1}^{12})^{k+1-2j^{-}} |j^{-}, h_{+}, k\rangle \end{aligned} \quad (5.11)$$

и

$$\begin{aligned} \text{MFF}_{(+)}^{-}(r, s, h_{+}, k) = & (E_{-1}^{12})^{(2s-1)(k+1)-2j^{-}} E_{1-s}^1 (F_0^{12})^{(2s-2)(k+1)-2j^{-}} F_{2-s}^2 \times \\ & \times (E_{-1}^{12})^{(2s-3)(k+1)-2j^{-}} E_{2-s}^1 (F_0^{12})^{(2s-4)(k+1)-2j^{-}} F_{3-s}^2 \times \\ & \dots \times (E_{-1}^{12})^{3(k+1)-2j^{-}} E_{-1}^1 (F_0^{12})^{2(k+1)-2j^{-}} F_0^2 \times \\ & \times (E_{-1}^{12})^{k+1-2j^{-}} |j^{-}, h_{+}, k\rangle. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Легко получить аналогичные лемме 5.1 условия уничтожения, которым удовлетворяют эти векторы.

ЛЕММА 5.2. При $r, s \in \mathbb{N}$, состояния $\text{MFF}_{(-)}^{-}(r, s, h_{+}, k)$ и $\text{MFF}_{(+)}^{-}(r, s, h_{+}, k)$ удовлетворяют условиям уничтожения и формулам собственных значений, позволяющим записать

$$\text{MFF}_{(-)}^{-}(r, s, h_{+}, k) \doteq |j^{-}(r, s, k) + r, h_{+} - (s-1)(k+1), k; 1-s\rangle, \quad (5.13)$$

$$\text{MFF}_{(+)}^{-}(r, s, h_{+}, k) \doteq |j^{-}(r, s, k) + r, h_{+} + (s-1)(k+1), k; s-1\rangle. \quad (5.14)$$

5.3. МФФ-особые векторы: соотношение между подмодулями. Рассмотрим сначала векторы $\text{MFF}_{(\pm)}^{+}$. Для параметров h_{+} и k в общем случае особые векторы $\text{MFF}_{(-)}^{+}(r, s, h_{+}, k)$ и $\text{MFF}_{(+)}^{+}(r, s, h_{+}, k)$ порождают один и тот же подмодуль, но это уже не так в “вырожденных” случаях, как мы сейчас увидим. Соотношение между $\text{MFF}_{(-)}^{+}$ и $\text{MFF}_{(+)}^{+}$ задает следующая лемма.

ЛЕММА 5.3. В модуле Верма $\mathcal{P}_{j^+}(r, s, k)_{h_+, k}$ с точностью до знака выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \underbrace{E_{-s}^1 \dots E_{s-1}^1}_{2s} \underbrace{F_{1-s}^2 \dots F_s^2}_{2s} \text{MFF}_{(-)}^+(r, s, h_+, k) = \\ & = \prod_{i=0}^{2s-1} (h_+ - j^+(r, s, k) - i(k+1)) \text{MFF}_{(+)}^+(r, s, h_+, k) \end{aligned} \quad (5.15)$$

и

$$\begin{aligned} & \underbrace{E_{-s}^2 \dots E_{s-1}^2}_{2s} \underbrace{F_{1-s}^1 \dots F_s^1}_{2s} \text{MFF}_{(+)}^+(r, s, h_+, k) = \\ & = \prod_{i=0}^{2s-1} (h_+ + j^+(r, s, k) + i(k+1)) \text{MFF}_{(-)}^+(r, s, h_+, k). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Это легко показать, используя равенства (5.7). Из соотношений (5.15), (5.16) следует, что когда множитель в (5.15) или в (5.16) обращается в нуль, один из МФФ-векторов порождает подмодуль в модуле, порожденном из другого вектора.

Аналогично соотношение между $\text{MFF}_{(-)}^-$ и $\text{MFF}_{(+)}^-$ описывает

ЛЕММА 5.4. В модуле Верма $\mathcal{P}_{j^-}(r, s, k)_{h_+, k}$ с точностью до знака выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \underbrace{E_{1-s}^1 \dots E_{s-2}^1}_{2s-2} \underbrace{F_{2-s}^2 \dots F_{s-1}^2}_{2s-2} \text{MFF}_{(-)}^-(r, s, h_+, k) = \\ & = \prod_{i=1}^{2s-2} (h_+ + j^-(r, s, k) - i(k+1)) \text{MFF}_{(+)}^-(r, s, h_+, k) \end{aligned} \quad (5.17)$$

и

$$\begin{aligned} & \underbrace{E_{1-s}^2 \dots E_{s-2}^2}_{2s-2} \underbrace{F_{2-s}^1 \dots F_{s-1}^1}_{2s-2} \text{MFF}_{(+)}^-(r, s, h_+, k) = \\ & = \prod_{i=1}^{2s-2} (h_+ - j^-(r, s, k) + i(k+1)) \text{MFF}_{(-)}^-(r, s, h_+, k). \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ряд вырождений, происходящих в модулях Верма, можно изучать, анализируя относительные положения особых векторов $\text{MFF}_{(+)}^+$ и $\text{MFF}_{(-)}^+$, а также векторов $\text{MFF}_{(+)}^-$ и $\text{MFF}_{(-)}^-$.

5.4. Сосуществование МФФ- и заряженных особых векторов. Явные формулы для заряженных особых векторов и “почти” явные для МФФ-особых векторов позволяют описывать определенные случаи сосуществования особых векторов этих двух типов. Мы начнем с модуля Верма, содержащего особый вектор MFF^+ и заряженный особый вектор $|C^{(-)}(n, h_-, k; \theta)\rangle$ с $n \geq 1$. Выбором твиста старшего вектора, из которого порожден модуль, всегда можно добиться того, чтобы $n = 1$ (подобное замечание относится и к другим заряженным особым векторам, рассматриваемым ниже).

ЛЕММА 5.5. В модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_-(k+1), k}$, где $h_- = j^+(r, s, k)$ при $r \geq 1$ и $s \geq 1$ таких, что $r/(k+1) \notin \mathbb{Z}$, имеются подмодули

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{h_-, h_-(k+1), k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_-, k; 1}^- \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{P}_{h_- - r, h_-(k+1), k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - r - \frac{1}{2}, k; s}^+ \end{array} \quad (5.19)$$

где горизонтальные стрелки являются вложениями подмодулей, порожденных из заряженных особых векторов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, h_-(k+1), k}$ имеется заряженный особый вектор $C^{(-)}(1, h_-, k)$, а соответствующий подмодуль есть $\mathcal{N}_{h_-, k; 1}^-$. При условиях леммы $C^{(-)}(1, h_-, k)$ является единственным заряженным особым вектором в $\mathcal{P}_{h_-, h_-(k+1), k}$. Кроме того, существует подмодуль, порожденный из $\text{MFF}_{(\pm)}^+(r, s, h_+, k)$. Из равенств (5.16) и (5.15) следует, что векторы $\text{MFF}_{(-)}^+(r, s, h_+, k)$ и $\text{MFF}_{(+)}^+(r, s, h_+, k)$ порождают один и тот же подмодуль. В этом подмодуле, в свою очередь, имеется заряженный особый вектор, что можно записать как

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(+)}(0, -\frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; s) \text{MFF}_{(+)}^+(r, s, \frac{r}{2} - \frac{s+1}{2}(k+1), k) &\doteq \\ &\doteq |-\frac{r+1}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; s\rangle^+ \equiv |j^+(r, s, k) - r - \frac{1}{2}, k; s\rangle^+ \end{aligned}$$

(напомним, что знак $\doteq$ является утверждением об условиях уничтожения и собственных значениях для данного состояния). Обозначая для краткости $j^+(r, s, k)$ как j^+ , явным образом получим

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{(+)}(0, -\frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; s) \text{MFF}_{(+)}^+(r, s, \frac{r}{2} - \frac{s+1}{2}(k+1), k) &= \\ = F_{-s}^2 \cdot E_{-s}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-2)(k+1)} F_{-s+1}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-3)(k+1)} \times \\ \times E_{-s+1}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-4)(k+1)} F_{-s+2}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-5)(k+1)} \times \\ \dots \times E_{-2}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + 2(k+1)} F_{-1}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + k+1} E_{-1}^1 (F_0^{12})^{2j^+} F_0^2 |j^+, j^+ - (k+1), k\rangle. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Теперь в соответствии со второй формулой в (5.5) имеем $F_{-s}^2 E_{-s}^1 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-2)(k+1)} = F_{-s}^2 (F_0^{12})^{2j^+ + (2s-2)(k+1)} E_{-s}^1$. После такого преобразования операторы E_{-s}^1 и F_{-s+1}^2 оказываются стоящими рядом в (5.20), что позволяет далее применить равенство

$$E_{-s}^1 F_{-s+1}^2 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-3)(k+1)} = E_{-s}^1 (E_{-1}^{12})^{2j^+ + (2s-3)(k+1)} F_{-s+1}^2.$$

Это, в свою очередь, ставит рядом операторы F_{-s+1}^2 и E_{-s+1}^1 , и процесс продолжается по индукции, давая в результате $F_{-1}^2 E_{-1}^1 (F_0^{12})^{2j^+} F_0^2 = F_{-1}^2 (F_0^{12})^{2j^+} E_{-1}^1 F_0^2$. Это означает, что состояние (5.20) лежит в подмодуле $\mathcal{N}_{h_-, k; 1}^-$, порожденном из заряженного особого вектора $C^{(-)}(1, h_-, k) = E_{-1}^1 F_0^2 |h_-, h_- - (k+1), k\rangle$. Тем самым установлено $\mathcal{N}_{h_- - r - \frac{1}{2}, k; s}^+ \rightarrow \mathcal{N}_{h_-, k; 1}^-$.

Аналогично (4.9) и (4.12), имеем (как и ранее, при $h_- = j^+(r, s, k)$)

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - \frac{1}{2}, k; 1}^- & \longleftarrow & \mathcal{P}_{h_-, h_- - (k+1), k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_-, k; 1}^- & \longleftarrow & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 0 & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - r, k; s}^+ & \longleftarrow & \mathcal{P}_{h_- - r, h_- - (k+1), k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - r - \frac{1}{2}, k; s}^+ & \longleftarrow & 0.
 \end{array} \quad (5.21)$$

Поэтому в факторе по $\mathcal{N}_{h_-, k; 1}^-$ подмодуль, порожденный из вектора $\text{MFF}_{(+)}^+$, имеет вид $\mathcal{N}_{-\frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; s}^+$.

Таким образом, видим, что когда $\mathcal{N}^-$ -подмодуль порожден из заряженного особого вектора в модуле $\mathcal{P}_{j^+(r, s, k), h_+, k}$, то в следующем поколении “МФФ-потомков” появляется подмодуль вида $\mathcal{N}^+$. Опишем отдельно этот последний случай, т.е. одновременное появление особого вектора $\mathcal{C}^{(+)}(0, h_-, k)$ и МФФ-вектора.

ЛЕММА 5.6. В модуле Верма $\mathcal{P}_{h_-, -h_-, k}$, где $h_- = j^+(r, s, k)$ при $r \geq 1$ и $s \geq 1$ таких, что $r/(k+1) \notin \mathbb{Z}$, имеются подмодули

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P}_{h_-, -h_-, k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - \frac{1}{2}, k; 0}^+ \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 \mathcal{P}_{h_- - r, -h_- - s(k+1), k; -s} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_- - r, k; 1-s}^-
 \end{array} \quad (5.22)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В данном случае структура подмодулей несколько более интересна. Правая часть (5.16) обращается в нуль при выбранных значениях параметров, тогда как множитель в правой части (5.15) не обращается в нуль при условиях леммы. Отсюда видим, что $\text{MFF}_{(+)}^+(r, s, -h_-, k)$ порождает подмодуль в подмодуле, порожденном из $\text{MFF}_{(-)}^+(r, s, -h_-, k)$. Из (5.9) имеем

$$\begin{aligned}
 \text{MFF}_{(-)}^+(r, s, -h_-, k) &\doteq |h_- - r, -h_- - s(k+1), k; -s\rangle = \\
 &= \left| -\frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2} - \frac{s+1}{2}(k+1), k; -s \right\rangle,
 \end{aligned}$$

а подмодуль, порожденный из $\text{MFF}_{(-)}^+(r, s, -h_-, k)$, можно также породить из соответствующего заряженного особого вектора

$$\mathcal{C}^{(-)}(1; h_- - r, k; -s) \text{MFF}_{(-)}^+(r, s, -h_-, k) \doteq \left| -\frac{r}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s \right\rangle^-,$$

что дает подмодуль $\mathcal{N}_{h_- - r, k; 1-s}^-$. Тогда фактор-модуль порождается из $F_s^2 \text{MFF}_{(-)}^+(r, s, -h_-, k) \doteq \left| -\frac{r+1}{2} - \frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s \right\rangle^-$.

В то же время, очевидно, в модуле $\mathcal{P}_{h_-, -h_-, k}$ имеется подмодуль $\mathcal{N}_{h_- - \frac{1}{2}, k; 0}^+$, порожденный из заряженного особого вектора $\mathcal{C}^{(+)}(0, h_-, k)$. Таким образом приходим к (5.22).

Ключевое для конструкции резольвент наблюдение состоит в том, что $\mathcal{P}$ -подмодуль в нижней строчке (5.22) удовлетворяет условиям леммы 5.5, и наоборот, $\mathcal{P}$ -подмодуль в нижней строчке (5.21) удовлетворяет условиям леммы 5.6.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. Отметим тонкость в правильном отождествлении подмодулей в (5.22). Мы используем оба вектора $\text{MFF}_{(-)}^{+}$ и $\text{MFF}_{(+)}^{+}$, первый из которых порождает весь подмодуль $\mathcal{P}_{h_{-}-r, -h_{-}-s(k+1), k} = \mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}-\frac{s+1}{2}(k+1), k; -s}$, а второй – только $\mathcal{N}_{h_{-}-r}^{-} = \mathcal{N}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s}^{-}$ (как и раньше, мы полагаем $h_{-} = j^{+}(r, s, k)$). Вспоминая, что МФФ-особый вектор удовлетворяет твистованным условиям старшего веса (5.10), видим, что подмодуль, порожденный из $\text{MFF}_{(+)}^{+}(r, s, -h_{-}, k)$ в $\mathcal{P}_{h_{-}-h_{-}, k}$, не является свободно порожденным. С другой стороны, модуль, свободно порожденный из твистованного состояния старшего веса, удовлетворяющего тем же условиям старшего веса, что и $\text{MFF}_{(+)}^{+}(r, s, -h_{-}, k)$, есть $\mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}+\frac{3s-1}{2}(k+1), k; s}$, и в нем имеется заряженный особый вектор $C^{(-)}(1-2s, -\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), k; s)$, которому соответствует подмодуль $\mathcal{N}_{-\frac{r+1}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s}^{-}$. Таким образом, сравнивая модуль $\mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}+\frac{3s-1}{2}(k+1), k; s}$ с актуально имеющимся в (5.22) подмодулем $\mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}-\frac{s+1}{2}(k+1), k; -s}$, видим, что эти неизоморфные модули различаются в точности перестановкой подмодуля и фактора (они, заметим, имеют один и тот же характер). Другими словами, тогда как взятие факторов в (5.22) дает

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_{-}, k; 0}^{+} & \longleftarrow & \mathcal{P}_{h_{-}, -h_{-}, k} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_{-}-\frac{1}{2}, k; 0}^{+} \longleftarrow 0 \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_{-}-r-\frac{1}{2}, k; 1-s}^{-} & \longleftarrow & \mathcal{P}_{h_{-}-r, -h_{-}-s(k+1), k; -s} & \longleftarrow & \mathcal{N}_{h_{-}-r, k; 1-s}^{-} \longleftarrow 0, \end{array} \quad (5.23)$$

имеется также другая короткая точная последовательность

$$0 \leftarrow \mathcal{N}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s}^{-} \leftarrow \mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}+\frac{3s-1}{2}(k+1), k; s} \leftarrow \mathcal{N}_{-\frac{r+1}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), k; 1-s}^{-} \leftarrow 0$$

и, в частности, сквозное отображение

$$\mathcal{P}_{j^{+}(r, s, k), -j^{+}(r, s, k), k} \leftarrow \mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}+\frac{3s-1}{2}(k+1), k; s}$$

не является вложением (т.е. имеет ядро). Как несложно проверить, имеет место изоморфизм

$$\mathcal{P}_{-\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}(k+1), -\frac{r}{2}+\frac{3s-1}{2}(k+1), k; s} \approx \mathcal{P}_{j^{+}(r, s, k)-r, -j^{+}(r, s, k), k},$$

и потому этот нетвистованный модуль Верма не вкладывается в $\mathcal{P}_{j^{+}(r, s, k), -j^{+}(r, s, k), k}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.2 (“вырождение” МФФ-векторов при $r = 0$). Показатели степеней в формулах для МФФ-векторов, например в (5.11), (5.12), задаются выражением $i(k+1) - 2j^{-}(r, s, k)$, где i принимает значения от 1 до $2s-1$ (и множители считаются справа налево). При $i = s$ соответствующий множитель возводится в степень r . Будем называть этот оператор *центром* соответствующей формулы для МФФ-вектора. Пусть для определенности s четно; тогда формула для МФФ-вектора (например, (5.11)) имеет следующую структуру вблизи своего центра:

$$\dots E_{-1-\frac{s}{2}}^2 (F_0^{12})^{r+2(k+1)} F_{-\frac{s}{2}}^1 (E_{-1}^{12})^{r+k+1} E_{-\frac{s}{2}}^2 (F_0^{12})^r F_{1-\frac{s}{2}}^1 \times$$

$$\times (E_{-1}^{12})^{r-(k+1)} E_{1-\frac{s}{2}}^2 (F_0^{12})^{r-2(k+1)} F_{2-\frac{s}{2}}^1 \dots \quad (5.24)$$

Напомним, что в формуле для МФФ-вектора $r \geq 1$; теперь, однако, мы формально продолжим это выражение на $r = 0$. Тогда можно видеть, что $E_{-\frac{s}{2}}^2 F_{1-\frac{s}{2}}^1$ коммутирует с E_{-1}^{12} , а поэтому два множителя $(E_{-1}^{12})^{\pm(k+1)}$ сокращают друг друга. Поэтому с точностью до общего знака имеем

$$\dots F_{-\frac{s}{2}}^1 (E_{-1}^{12})^{k+1} E_{-\frac{s}{2}}^2 F_{1-\frac{s}{2}}^1 (E_{-1}^{12})^{-(k+1)} E_{1-\frac{s}{2}}^2 \dots = \dots F_{-\frac{s}{2}}^1 E_{-\frac{s}{2}}^2 F_{1-\frac{s}{2}}^1 E_{1-\frac{s}{2}}^2 \dots \quad (5.25)$$

То же рассуждение можно применить к другим множителям в формуле для особого вектора, что приводит к сокращению всех степеней бозонных генераторов. Таким образом, вычисляя (5.11) при $r = 0$, находим

$$\text{MFF}_{(-)}^-(0, s, h_+, k) = E_{1-s}^2 \dots E_{-1}^2 F_{2-s}^1 \dots F_0^1 \left| \frac{s}{2}(k+1), h_+, k \right\rangle. \quad (5.26)$$

Это экстремальное состояние в модуле, которое может оказаться заряженным особым вектором в зависимости от значения h_+ .

Рис. 3. Отображения узких модулей Верма.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные утверждения о взаимных положениях особых векторов в $\widehat{sl}(2|1)$ -модулях Верма дают эффективное средство анализа структуры модулей и построения резольвент неприводимых представлений. Так, многократное применение лемм из п. 5.4 дает полностью состоящую из узких модулей Верма решетку подмодулей модуля $\mathcal{N}_{j-\frac{1}{2},k;1}^-$, где $j = j^+(r, s, k)$, $k+1 = p/u$, и $1 \leq r \leq p-1$, $1 \leq s \leq u$ со взаимно простыми целыми положительными p и u , см. рис. 3. Отсюда получается резольвента неприводимого фактора модуля

$$\mathcal{P}_{j,j-(k+1),k} = \mathcal{P}_{\frac{r}{2}-\frac{s-1}{2}\frac{p}{u}, \frac{r}{2}-\frac{s+1}{2}\frac{p}{u}, \frac{p}{u}-1}$$

через узкие модули Верма. Построение резольвенты неприводимого представления, таким образом, начинается со взятия факторов в диаграммах (5.21) и (5.23). Подробности построения и вытекающая из резольвенты формула для характера будут рассмотрены в отдельной публикации.

Благодарности. Мы признательны Б. Фейгину и И. Типунину за интересные обсуждения. Работа поддержана Royal Society grant RCM/ExAgr, частично грантом РФФИ № 01-01-00906 и Фондом содействия российской науке. А.М.С. благодарен за гостеприимство в Department of Mathematical Sciences, University of Durham.

Список литературы

- [1] *D. Bernard.* (Perturbed) Conformal Field Theory Applied To 2D Disordered Systems: An Introduction. hep-th/9509137.
- [2] *Z. S. Bassi and A. LeClair.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 578. P. 577; hep-th/9911105.
- [3] *D. Bernard and A. LeClair.* Quasi-spin-charge separation and the spin quantum Hall effect. cond-mat/0003075.
- [4] *M. Bershadsky, and H. Ooguri.* Phys. Lett. B. 1989. V. 229. P. 374.
- [5] *M. Bershadsky, W. Lerche, D. Nemeschansky, and N. P. Warner.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 401. P. 304.
- [6] *K. Ito and H. Kanno.* Mod. Phys. Lett. A. 1994. V. 9. P. 1377.
- [7] *A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. B. 1996. V. 478. P. 209.
- [8] *P. Bowcock, B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, and A. Taormina.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 214. P. 495; hep-th/9907171.
- [9] *P. Bowcock, A. Taormina.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 185. P. 467; *P. Bowcock, M. R. Hayes, and A. Taormina.* Nucl. Phys. B. 1998. V. 510. P. 739.
- [10] *A. М. Семухатов.* ТМФ. 1997. Т. 112. С. 195; hep-th/9610084.
- [11] *B. L. Feigin, A. M. Semikhatov, V. A. Sirota, and I. Yu. Tipunin.* Nucl. Phys. B. 1999. V. 536. P. 617.
- [12] *Ф. Г. Маликов, Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс.* Функци. анализ и его прилож. 1986. Т. 20. № 2. С. 25.

Поступила в редакцию 20.IV.2001 г.