Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Соловьев, Лоренц-ковариантные ультрасреднения, гиперфункции и аналитические функционалы, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 492–514

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf511>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 14:58:20

ЛОРЕНЦ-КОВАРИАНТНЫЕ УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЯ, ГИПЕРФУНКЦИИ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Теория лоренц-ковариантных распределений обобщается на более широкие классы функционалов, включая ультрасредствления, гиперфункции и аналитические функционалы умеренного роста. Доказано, что при сколь угодно высокой сингулярности возможно разложение лоренц-ковариантных функционалов по полиномиальным ковариантам, и установлена возможность инвариантного разложения их несущих конусов. Описаны свойства нечетных высокосингулярных обобщенных функций. Полученные результаты применяются к исследованию вакуумных средних нелокальных квантовых полей с произвольным высокоэнергетическим поведением и к обобщению на нелокальную теорию поля теоремы о связи спина со статистикой.

1. ВВЕДЕНИЕ

Целью данной работы является распространение на функционалы произвольно высокой сингулярности теории лоренц-ковариантных распределений, которая играет важную роль в аксиоматическом подходе [1], [2] в квантовой теории поля (КТП). Основным достижением этого подхода по праву считается вывод теорем о связи спина со статистикой и *PCT*-симметрии. Мой интерес к высокосингулярным квантовым полям возник под влиянием профессора В. Я. Файнберга более 30 лет назад, когда я был его аспирантом. Энтузиазм тех лет, вызванный работами Меймана [3] и Джаффе [4], был основан на надежде получить на этом пути решение проблем перенормируемых взаимодействий и нуль-заряда и построить последовательную нелокальную теорию поля. Последующее развитие калибровочной теории и теории суперструн показали, что некоторые из выдвинутых тогда идей не утратили своего значения и сейчас. В работах Файнберга и Иофы [5], [6] впервые была предложена формулировка нелокальной теории поля на строгом уровне аксиоматического подхода и продемонстрировано несоблюдение теоремы о глобальной природе локальной коммутативности при экспоненциальном и более быстром росте матричных элементов полей в импульсном пространстве. Именно такой рост, с показателем экспоненты, пропорциональным планковской длине, был обнаружен впоследствии у спектральных плотностей в представлении типа Челлена–Лемана для струнных

*Физический институт им П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail:soloviev@td.lpi.ac.ru

пропагаторов [7]. Ограничения на амплитуды рассеяния частиц с нелокальным взаимодействием [8]–[10] представляют особый интерес в связи с активно исследуемой сейчас AdS/CFT дуальностью (т.е. соответствием между теориями гравитации в пространстве анти-де Ситтера и конформными теориями поля на его границе). При нахождении матрицы рассеяния из корреляторов конформной теории в плоском пределе [11] эти ограничения могут указывать на наличие нелокальности. Использование пропагаторов с нелокальными формфакторами, подавляющими ультрафиолетовые расходимости в евклидовом импульсном пространстве, оказалось эффективным в лагранжевой формулировке нелокальной КТП [12] и при феноменологическом описании сильных взаимодействий [13]. Имеются развитые схемы такого рода, включающие квантовую гравитацию и предлагаемые как феноменологическая альтернатива теории струн [14]. В работе [15] было показано, что наиболее широкие рамки для построения локальной КТП дает использование обобщенных функций, определенных на фурье-симметричном пространстве пробных функций S_1^1 , и соответствующее обобщение микропричинности. Позже такая формулировка была детально развита [16], [17] в терминах фурье-гиперфункций. При этом оказалось, что она устанавливает полностью симметричное соотношение между КТП в пространстве Минковского и евклидовой теорией поля, чего не удастся достичь при использовании обычных распределений умеренного роста. Построенная тогда теория [18] преобразования Фурье–Лапласа функционалов над пространствами S_α^β Гельфанда–Шилова оказалась полезной при операторной реализации калибровочных моделей с индефинитной метрикой [19]–[21], где сингулярности имеют инфракрасное происхождение.

Ряд теорем о высокосингулярных лоренц-ковариантных обобщенных функциях был установлен в работе [22]. Однако там не рассматривались два наиболее интересных и в то же время наиболее трудных для анализа случая – гиперфункций умеренного роста, определенных на пространстве S^1 , универсальном для локальной КТП, и аналитических функционалов над пространством S^0 , на котором определены нелокальные поля с произвольным высокоэнергетическим поведением. В данной статье приведено полное изложение теории для функционалов класса S'^β , $\beta \geq 0$. Их использование в теоретико-полевых конструкциях имеет ряд преимуществ, однако топологически пространства пробных функций S^β устроены сложнее, чем S_α^β . Если последние принадлежат к хорошо изученному классу пространств DFS (пространств, дуальных пространствам Фреше–Шварца), то S^β не входят в него, что затрудняет вывод некоторых структурных теорем для определенных на них функционалов. Эта трудность преодолевается с помощью установленной в разделе 2 теоремы об ацикличности последовательности пространств Фреше, индуктивным пределом которой является S^β . В следующих трех разделах показана возможность разложения носителей функционалов класса S'^β при $\beta > 1$ и $\beta = 1$ и их несущих конусов при $\beta < 1$, что требует разной аргументации. В разделе 6 эти результаты используются для вывода инвариантных разложений лоренц-ковариантных обобщенных функций. Там же описаны свойства нечетных инвариантных функционалов произвольной сингулярности. В разделе 7 устанавливается плотность ковариантных распределений умеренного роста в рассматриваемых классах ковариантных функционалов, а в разделе 8 на них обобщается представление через полиномиальные ковари-

анты [2], [23]. В разделе 9 излагается основанный на этих результатах вывод теоремы о связи спина со статистикой для нелокальных квантовых полей, альтернативный выводу работы [24], использующему понятие аналитического волнового фронта.

2. ПРОСТРАНСТВА $S^\beta(O)$ И ИХ ТОПОЛОГИЯ

По определению [25] пространство пробных функций $S^\beta(\mathbb{R}^n)$ с индексом $\beta \geq 0$ состоит из бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|\partial^\kappa f(x)| \leq C_N B^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} (1 + |x|)^{-N}, \quad (1)$$

где κ пробегает множество мультииндексов $\mathbb{Z}^n$, N пробегает множество $\mathbb{N}$ целых неотрицательных чисел, а положительные константы C_N и B зависят от функции f . Если $\beta > 1$, то в пространстве S^β имеются функции с компактным носителем. Пространство S^1 состоит из функций, аналитических в комплексной окрестности $\mathbb{R}^n$, а при $\beta < 1$ составляющие S^β функции допускают аналитическое продолжение во все $\mathbb{C}^n$, т.е. являются целыми. В первом случае элементы сопряженного пространства S'^β называются ультрасределяющими класса $\{\kappa^{\beta\kappa}\}$ (умеренного роста), во втором – гиперфункциями, в третьем – аналитическими функционалами (также умеренного роста). Вместо задания топологии в книге [25] была определена сходимость последовательностей в S^β . Именно, неравенствам (1) соответствует норма

$$\|f\|_{B,N} = \sup_{\kappa, x} (1 + |x|)^N \frac{|\partial^\kappa f(x)|}{B^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa}}, \quad (2)$$

и последовательность $f_\nu \in S^\beta$ считается сходящейся к нулю, если существует такое B , что $\|f_\nu\|_{B,N} \rightarrow 0$ при любом N . Мы покажем, что это определение полностью согласуется с естественной топологизацией S^β посредством взятия проективного предела по индексу $N \rightarrow \infty$ и индуктивного по индексу $B \rightarrow \infty$. Другое дополнение теории [25], которое нам также понадобится, состоит в использовании аналогичных пространств над открытыми множествами в $\mathbb{R}^n$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть O – непустое открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $S^{\beta,B,N}(O)$ нормированное пространство бесконечно дифференцируемых функций на O , норма $\|f\|_{O,B,N}$ которого задается по аналогии с формулой (2), но операция $\sup$ берется по $x \in O$. Через $S^{\beta,B}(O)$ обозначим пересечение $\bigcap_N S^{\beta,B,N}(O)$, наделенное проективной топологией, а через $S^\beta(O)$ – объединение $\bigcup_B S^{\beta,B}(O)$, наделенное индуктивной топологией.

Легко проверить, что пространство $S^{\beta,B,N}(O)$ является полным, т.е. банаховым. Поскольку проективные пределы наследуют свойство полноты, $S^{\beta,B}(O)$ является пространством Фреше. Для доказательства полноты $S^\beta(O)$ воспользуемся достаточным условием, указанным Паламодовым [26].

ТЕОРЕМА 1. *Инъективная последовательность пространств Фреше $S^{\beta,B}(O)$ ациклическа.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{U}_B$ — окрестность нуля в $S^{\beta,B}(O)$ вида $\|f\|_{O,B,0} < 1/2$. Очевидно, $\mathcal{U}_{B_0} \subset \mathcal{U}_B$ при любом $B > B_0$. Согласно теореме 6.1 из работы [26] достаточно убедиться, что топология на $\mathcal{U}_{B_0}$, индуцируемая из $S^{\beta,B}(O)$, $B > B_0$, не зависит от B . Пусть $f_0 \in \mathcal{U}_{B_0}$. Обозначим через $\mathcal{V}_{B,N,\epsilon}$ след на $\mathcal{U}_{B_0}$ окрестности функции f_0 в $S^{\beta,B}(O)$ вида $\|f - f_0\|_{O,B,N} < \epsilon$ и покажем, что для всяких $B > B_1 > B_0$ и любых N_1, ϵ_1 найдутся числа N, ϵ такие, что $\mathcal{V}_{B,N,\epsilon} \subset \mathcal{V}_{B_1,N_1,\epsilon_1}$. Это будет означать, что топология, индуцируемая на $\mathcal{U}_{B_0}$ из $S^{\beta,B}(O)$, не слабее, чем индуцируемая из $S^{\beta,B_1}(O)$; обратное очевидно. Далее для простоты считаем $\beta = 0$ (формулы в общем случае отличаются лишь несущественными множителями). Если $f \in \mathcal{V}_{B,N,\epsilon}$, то для функции $f_1 = f - f_0$ имеем две оценки

$$|\partial^\kappa f_1(x)| < B_0^{|\kappa|}, \quad |\partial^\kappa f_1(x)| < \epsilon B^{|\kappa|} (1 + |x|)^{-N} \quad (x \in O). \quad (3)$$

Надо показать, что при должном выборе N и ϵ отсюда следует, что

$$|\partial^\kappa f_1(x)| < \epsilon_1 B_1^{|\kappa|} (1 + |x|)^{-N_1} \quad (x \in O). \quad (4)$$

Введем обозначения $\varepsilon = \epsilon(1 + |x|)^{-N}$, $\varepsilon_1 = \epsilon_1(1 + |x|)^{-N_1}$ и определим число $Q(x)$ уравнением $B_0^Q = \varepsilon_1 B_1^Q$. Если x фиксирован, то первое из неравенств (3) влечет (4) при всех $|\kappa| \geq Q$. Второе из неравенств (3) влечет (4) при $|\kappa| < Q$ в том случае, если $\varepsilon B^Q \leq \varepsilon_1 B_1^Q$. Полагая $\varepsilon B^Q = \varepsilon_1 B_1^Q$, получаем $\varepsilon = \varepsilon_1^A$, где число $A = \ln(B/B_0)/\ln(B_1/B_0)$ не зависит от x . Значит, нужная импликация будет обеспечена, если взять $\epsilon \leq \epsilon_1^A$ и $N \geq AN_1$, что завершает доказательство.

Согласно [26] ацикличность обеспечивает справедливость следующих утверждений.

СЛЕДСТВИЕ. *Пространство $S^\beta(O)$ отделимо и полно. Множество $\mathcal{B} \subset S^\beta(O)$ является ограниченным в том и только в том случае, если оно целиком содержится в некотором пространстве $S^{\beta,B}(O)$ и ограничено по каждой из его норм.*

Отделимость пространства $S^\beta(O)$ очевидна, поскольку его топология мажорирует топологию равномерной сходимости. Отметим еще, что индуктивный предел пространств Фреше является борнологическим пространством, поэтому непрерывность линейного отображения $S^\beta(O)$ в произвольное локально-выпуклое пространство равносильна его ограниченности на всех ограниченных множествах, что, в свою очередь, эквивалентно секвенциальной непрерывности [27]. Роль пространств $S^\beta(O)$ в вопросах локализации ясна из следующего простого замечания. Ультрасраспределение $v \in S'^\beta$ имеет носитель в компакте K в том и только в том случае, если для любой его окрестности O найдется функционал $\hat{v} \in S'^\beta(O)$ такой, что $(v, f) = (\hat{v}, f|_O)$ для всех $f \in S^\beta$. При $\beta \leq 1$, когда среди пробных функций нет финитных, это можно взять за основу определения понятия сосредоточенности.

В книге [28] доказана ядерность пространств $S^{\beta,B+} = \bigcap_{\epsilon > 0} S^{\beta,B+\epsilon}$ (точнее, фурье-изоморфных им пространств $S_{\beta,B+}$). Отсюда следует ядерность пространства S^β , поскольку индуктивные пределы счетных семейств пространств наследуют это важное свойство ([27], § III.7.4). В свою очередь, ядерность пространства вместе с его полнотой приводят к тому, что оно является монтелевским и, в частности, рефлексивным ([27], гл. IV, упр. 19). Мы будем использовать эти свойства $S^\beta(\mathbb{R}^n)$ в дальнейшем. Пространства $S^\beta(O)$ обладают ими лишь при некоторых ограничениях на O .

3. РАЗЛОЖЕНИЕ УЛЬТРАРАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Пусть v – распределение умеренного роста, определенное на пространстве Шварца S , и пусть носитель v содержится в объединении замкнутых множеств K_1 и K_2 . Как известно, разложение вида $v = v_1 + v_2$ для распределений $v_{1,2} \in S'$ с носителями в $K_{1,2}$ возможно в том случае, если эти множества достаточно регулярны и регулярно расположены друг относительно друга. Точная формулировка условий регулярности устанавливается с помощью теоремы продолжения Уитни [29]. Эти условия заведомо выполнены для множеств, представимых в виде объединения конечного числа замкнутых выпуклых подмножеств с непустой внутренней частью. Для дальнейшего полезно напомнить вывод теоремы разложения в этом простейшем (однако достаточном для большинства приложений) случае. Пусть K – множество указанного вида в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $S(K)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций на его внутренней части $\text{Int } K$, для которых продолжения производных по непрерывности на границы выпуклых составляющих совпадают друг с другом, когда границы имеют общие точки, и таких, что нормы

$$\max_{|\kappa| \leq N} \sup_{x \in K} (1 + |x|)^N |\partial^\kappa f(x)| \quad (5)$$

конечны. Это пространство относится к классу пространств FS (Фреше–Шварца). Согласно теореме Уитни возможно дальнейшее продолжение f до гладкой функции на $\mathbb{R}^n$, и из нее вытекает, что пространство распределений Шварца с носителем в K можно отождествить с сопряженным к $S(K)$ пространством $S'(K)$. Каноническое отображение

$$S(K_1 \cup K_2) \longrightarrow S(K_1) \oplus S(K_2) \quad (6)$$

инъективно, непрерывно и имеет замкнутый образ, так как совпадение сходящихся последовательностей $f_{1\nu}, f_{2\nu}$ на пересечении $K_1 \cap K_2$ влечет совпадение на нем их пределов, которые тем самым определяют некоторый элемент пространства $S(K_1 \cup K_2)$. Таким образом, это пространство можно рассматривать как подпространство суммы $S(K_1) \oplus S(K_2)$. Такое отождествление справедливо не только алгебраически, но и топологически, поскольку замкнутое подпространство суммы пространств FS также является пространством FS, а согласно теореме об открытом отображении [27] векторное пространство не может иметь двух разных сравнимых топологий, в каждой из которых оно является пространством Фреше. Применяя теорему Хана–Банаха, заключаем, что любой функционал $v \in S'(K_1 \cup K_2)$ имеет непрерывное продолжение на сумму. Обозначая его $\hat{v}$ и записывая $v(f) = \hat{v}(f|_{K_1}, 0) + \hat{v}(0, f|_{K_2})$, получаем желаемое разложение, поскольку композиция $\hat{v}$ с каноническими вложениями $S(K_i) \rightarrow S(K_1) \oplus S(K_2)$ дает элементы $S'(K_i)$ ($i = 1, 2$).

Условия разложимости ультрараспределений изучались Ламбертом [30]. Полученная им теорема охватывает, в частности, функционалы класса $S_0'^\beta$ Гельфанда–Шилова. (Напомним, что пространство S_0^β состоит из тех элементов S^β , которые имеют компактный носитель, и нетривиально при $\beta > 1$.) Вывод аналогичной теоремы для класса S'^β затруднителен, но в том частном случае, который только и важен для интересующих нас лоренц-инвариантных разложений, рассматриваемых ниже, соответствующее утверждение является прямым следствием результатов Ламберта.

ТЕОРЕМА 2. Пусть K_1, K_2 — замкнутые выпуклые конусы в $\mathbb{R}^n$ такие, что $K_1 \cap K_2 = \{0\}$. Любой функционал $v \in S'^\beta$ с носителем в конусе $K_1 \cup K_2$ допускает разложение в сумму функционалов того же класса S'^β с носителями в конусах K_1 и K_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме V.1.1 из работы [30] сужение $v|_{S_0^\beta}$ представимо в виде суммы $v_1 + v_2$, где функционалы v_1, v_2 имеют носители в K_1 и K_2 , соответственно. Надо убедиться лишь в том, что они имеют непрерывное продолжение на S^β , которое с необходимостью единственно, ибо S_0^β плотно в S^β . Пусть χ — любая функция из S_0^β , тождественно равная 1 на шаре $U = \{x : |x| < 1\}$, и пусть $\chi_{1,2}$ — мультипликаторы в S^β (а значит, и в S_0^β), равные 1 в окрестности $K_{1,2} \setminus U$ и нулю в окрестности $K_{2,1} \setminus U$. Поскольку S_0^β является алгеброй по умножению, при всех $f \in S_0^\beta$ имеем равенство

$$v_{1,2}(f) = v_{1,2}(\chi f) + v(\chi_{1,2}(1 - \chi)f). \quad (7)$$

Остается заметить, что умножение на χ непрерывно отображает S^β в S_0^β и, следовательно, правая часть в (7) определена как непрерывный функционал на S^β .

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ГИПЕРФУНКЦИЙ

Установленные в [30] условия регулярности множеств, гарантирующие возможность разложения, оказываются все более слабыми по мере увеличения сингулярности функционалов, т.е. по мере уменьшения индекса β пространства пробных функций. В классе S'^1 разложение функционала с носителем в $K_1 \cup K_2$ возможно уже для любых компактных множеств K_1, K_2 . Однако само определение носителя в данном случае иное, поскольку пробные функции аналитичны. Обозначим через $A(K)$ пространство функций, аналитических в комплексной окрестности (зависящей от функции) компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ и напомним, что при наделении естественной топологией оно становится пространством DFS [31]. Прямое применение формулы Тейлора показывает, что S^1 непрерывно вложено в $A(K)$. В соответствии со стандартным определением [29], [31] несущего множества аналитического функционала компакт K является таковым для $v \in S'^1$, если v допускает непрерывное продолжение на $A(K)$. Это можно еще выразить формулой $v \in A'(K)$, поскольку S^1 плотно в $A(K)$. Теорема разложения для $v \in A'(K_1 \cup K_2)$ легко устанавливается тем же рассуждением, что и в предыдущем разделе, так как замкнутое подпространство суммы пространств DFS является пространством DFS и к пространствам этого класса также применима теорема об открытом отображении. Другое доказательство, использующее гармоническую регуляризацию аналитических функционалов, дано в книге [29] (§9.1).

При формализации понятия носителя элементов $v \in S'^1$ необходимо учитывать, что некоторые из них естественно считать сосредоточенными на бесконечности. Дело в том, что индуктивный предел $\varinjlim S^1(O_R)$, где $O_R = \{x : |x| > R\}$ и $R \rightarrow \infty$, является отделимым (хаусдорфовым) пространством, в которое S^1 инъективно и непрерывно вложено (см. предложение 1.19 в статье [22]). Поэтому согласно теореме Хана–Банаха в S'^1 существуют ненулевые функционалы, допускающие непрерывное продолжение на это

пространство. В теории фурье-гиперфункций [32] применяется радиальная компактификация $\mathbb{D}^n = \mathbb{R}^n \sqcup S_\infty^{n-1}$, где S_∞^{n-1} – бесконечно удаленная $(n-1)$ -мерная сфера. Мы воспользуемся ею и в случае функционалов класса S'^1 . Считаем компакт $\mathcal{K} \in \mathbb{D}^n$ несущим для $v \in S'^1$, если v допускает непрерывное продолжение на пространство

$$S^1(\mathcal{K}) = \varinjlim_{\mathcal{O} \supset \mathcal{K}} S^1(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^n), \quad (8)$$

где $\mathcal{O}$ пробегает открытые окрестности $\mathcal{K}$ в $\mathbb{D}^n$. Если $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^n$, то это определение сводится к предыдущему, ибо тогда индуктивный предел (8) совпадает с $A(\mathcal{K})$. Напомним, что фурье-гиперфункции формируют пространство, сопряженное пространству пробных функций S_1^1 , определяемому неравенствами

$$|\partial^\kappa f(x)| \leq CB^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} \exp\left(-\left|\frac{x}{A}\right|\right), \quad (9)$$

где константы A, B, C зависят от f . Пространства $S_1^1(\mathcal{O})$ представляют собой объединения банаховых пространств $S_{1,A}^{1,B}(\mathcal{O})$, связанных компактными вложениями, по обоим индексам A, B . Поэтому и $S_1^1(\mathcal{O})$, и $S_1^1(\mathcal{K})$ являются пространствами DFS. Рассматривая каноническое отображение

$$S_1^1(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \longrightarrow S_1^1(\mathcal{K}_1) \oplus S_1^1(\mathcal{K}_2) \quad (10)$$

и используя все то же простое рассуждение предыдущего раздела, мы заключаем, что разложение фурье-гиперфункций с носителем в $\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$ возможно для любых компактов $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2 \subset \mathbb{D}^n$.

Единственное препятствие для аналогичного вывода теоремы разложения в случае функционалов класса S'^1 состоит в том, что становится неочевидной возможность применения теоремы об открытом отображении. Ее наиболее общая формулировка [33] предполагает, что пространство значений отображения является ультраборнологическим, т.е. отделимым индуктивным пределом пространств Фреше. Вовсе не очевидно, что $S^1(\mathcal{K})$, $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2$, входит в этот класс при наделении его топологией, индуцируемой вложением в сумму $S^1(\mathcal{K}_1) \oplus S^1(\mathcal{K}_2)$. Чтобы глубже понять ситуацию, следует рассмотреть цепочку отображений

$$0 \longrightarrow S^1(\mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2) \xrightarrow{i} S^1(\mathcal{K}_1) \oplus S^1(\mathcal{K}_2) \xrightarrow{s} S^1(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2) \longrightarrow 0, \quad (11)$$

где отображение s сопоставляет паре функций $f_{1,2} \in S^1(\mathcal{K}_{1,2})$ разность их ограничений на $\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$. Теорема 1.30 из статьи [22] устанавливает, что последовательность векторных пространств (11) является точной, т.е. ядро каждого из участвующих отображений совпадает с образом предыдущего. Нетривиальна лишь точность в члене $S^1(\mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2)$, которая означает, что любой элемент этого пространства допускает разложение на функции из пространств $S^1(\mathcal{K}_1)$ и $S^1(\mathcal{K}_2)$, что устанавливается с помощью L^2 -оценок Хёрмандера, как и аналогичное утверждение в случае фурье-гиперфункций. Из этого результата вытекает существование носителей у функционалов класса $S'^1(\mathbb{R}^n)$.

ТЕОРЕМА 3. *Каждый элемент пространства $S'^1(\mathbb{R}^n)$ имеет единственный минимальный несущий компакт в $\mathbb{D}^n$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего отметим, что если у функционала $v \in S'^1(\mathbb{R}^n)$ имеются несущие компакты K_1, K_2 с пустым пересечением, то $v = 0$. Это следует из плотности S^1 в $S^1(K_1 \cup K_2)$ (устанавливаемой леммой 1.17 в [22]), ибо тогда это пространство содержит функцию, тождественно равную нулю в окрестности K_1 и равную любому заданному элементу S^1 в окрестности K_2 . Пусть теперь несущие компакты имеют непустое пересечение $K_1 \cap K_2$. Для доказательства теоремы достаточно показать, что и оно будет несущим множеством для v . Действительно, предположим, что это так, и обозначим через K пересечение всех несущих компактов v . Если найдется конечная подсистема несущих множеств с пустым пересечением, то $v = 0$. Если такой подсистемы нет, то $K \neq \emptyset$. Пусть $\mathcal{O}$ — окрестность K в $\mathbb{D}^n$. Дополнения несущих компактов образуют открытое покрытие компакта $\mathbb{D}^n \setminus \mathcal{O}$. Выбирая из него конечное подпокрытие, заключаем, что K — минимальный несущий компакт.

Переходя к ортогональным дополнениям в равенстве $\text{Im } i = \text{Ker } s$, мы получаем $\text{Ker } i' = \overline{\text{Im } s'}$, где штрихами отмечены сопряженные отображения, а черта означает замыкание в слабой топологии. К отображению s в (11) применима теорема об открытом отображении в формулировке Гротендика [34], поскольку оно отображает пространство класса $\mathcal{UF}^1$ в ультраборнологическое пространство. В частности, s является топологическим гомоморфизмом. Следовательно, образ отображения s' слабо замкнут по теореме IV.7.5 из книги [27] и $\text{Ker } i' = \text{Im } s'$. Если $v \in S'^1$ имеет непрерывные продолжения $v_{1,2}$ на $S^1(K_{1,2})$, то $i'(v_1, v_2)|_{S^1} = 0$. Ввиду плотности S^1 в $S^1(K_1 \cup K_2)$ это влечет $i'(v_1, v_2) = 0$. Значит, функционалы $v_{1,2}$ представляют собой ограничения на $S^1(K_{1,2})$ некоторого элемента из $S'^1(K_1 \cap K_2)$, т.е. существует непрерывное продолжение v на $S^1(K_1 \cap K_2)$, что завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть K_1, K_2 — компакты в $\mathbb{D}^n$, являющиеся замыканиями конусов и такие, что $K_1 \cap K_2 = \{0\}$. Любой функционал $v \in S'^1$ с носителем в $K_1 \cup K_2$ допускает разложение в сумму функционалов того же класса с носителями в компактах K_1 и K_2 .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим пространство $S^1(K_1) \oplus S^1(K_2)$ через E . Пусть $\mathcal{O}_{1,2}^\nu$ ($\nu = 1, 2, \dots$) — счетные фундаментальные системы окрестностей $K_{1,2}$ в $\mathbb{D}^n$. Топология E тождественна топологии индуктивного предела последовательности пространств Фреше $E_\nu = S^{1,\nu}(\mathcal{O}_1^\nu \cap \mathbb{R}^n) \oplus S^{1,\nu}(\mathcal{O}_2^\nu \cap \mathbb{R}^n)$. Пусть L — образ пространства $S^1(K_1 \cup K_2)$ в E , снабженный индуцируемой из E топологией. Достаточно показать, что она совпадает с топологией индуктивного предела семейства подпространств $L_\nu = E_\nu \cap L$. Действительно, тогда пространство L является ультраборнологическим (поскольку замкнутость L в E влечет замкнутость L_ν в E_ν , т.е. каждое

¹⁾К этому классу относятся отделимые локально выпуклые пространства, покрываемые счетным семейством своих подпространств Фреше. Любое $S^1(K)$ входит в него, ибо $S^{1,B}(\mathcal{O} \cap \mathbb{R}^n)$, $\mathcal{O} \supset K$, являются его подпространствами Фреше и K имеет счетную фундаментальную систему окрестностей в $\mathbb{D}^n$.

L_ν есть пространство Фреше), что позволяет применить теорему Гротендика [34] и завершить доказательство с помощью прежней аргументации. Условие совпадения двух указанных топологий на L устанавливается теоремой Ретаха [35] и состоит в ацикличности последовательности фактор-пространств $F_\nu = E_\nu/L_\nu$, которые также являются пространствами Фреше и связаны каноническими инъекциями $F_\nu \rightarrow F_\mu$, $\nu < \mu$. Подпространство L_ν служит ядром непрерывного отображения $E_\nu \rightarrow E/L$, поэтому соответствующее отображение $E_\nu/L_\nu \rightarrow E/L$ также непрерывно. Фактор-пространство E/L , снабженное индуктивной топологией относительно этого семейства отображений (которая на самом деле совпадает с его собственной), обозначим через F . Из точности последовательности (11) следует, что непрерывное отображение $F \rightarrow S^1(\{0\})$ биективно. Пространство $S^1(\{0\})$ совпадает с кольцом ростков аналитических функций в точке $z = 0$ и принадлежит классу DFS, следовательно, эта биекция является не только алгебраическим, но и топологическим изоморфизмом по теореме из монографии [34]. Посредством обозначения $a_\kappa = \partial^\kappa f(0)$ пространство $S^1(\{0\})$ отождествляется с пространством строк $\{a_\kappa\}$ комплексных чисел таких, что $|a_\kappa| \leq CB^{|\kappa|}\kappa^\kappa$ при некоторых $C, B > 0$. Пусть A_ν – банахово пространство строк с нормой $\sup_\kappa |a_\kappa|/\nu^{|\kappa|}\kappa^\kappa$. Доказательство теоремы 1 (где в данном простейшем случае надо положить $x = 0$) показывает, что инъективная последовательность пространств A_ν ациклична. Значит, и последовательность F_ν ациклична, ибо эквивалентна последовательности A_ν ввиду указанного изоморфизма. Тем самым теорема 4 доказана.

5. РАЗЛОЖЕНИЕ ФУНКЦИОНАЛОВ КЛАССА S'^β , $\beta < 1$

В работах [22], [36] показано, что аналитические функционалы класса S'^β (и $S'_\alpha{}^\beta$), $0 < \beta < 1$, сохраняют угловую локализуемость, хотя и не имеют носителей. Именно, если вместо произвольных компактов в $\mathbb{D}^n$ рассматривать лишь замыкания конусов и определить $S^\beta(K)$ по аналогии с формулой (8), то последовательность

$$0 \longrightarrow S^\beta(K_1 \cup K_2) \longrightarrow S^\beta(K_1) \oplus S^\beta(K_2) \longrightarrow S^\beta(K_1 \cap K_2) \longrightarrow 0 \quad (12)$$

оказывается точной, откуда следует существование у каждого элемента S'^β наименьшего замкнутого несущего конуса (мы называем замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$ несущим, если несущим множеством является компакт, получаемый присоединением к этому конусу вырезаемой им части нароста $\mathbb{S}_\infty^{n-1}$). Как и в случае гиперфункций, вывод этого результата основан на использовании представления ассоциированных с конусами пространств $S^\beta(K)$ в терминах комплексных переменных. Именно, пусть O – объединение открытого конуса $U \subset \mathbb{R}^n$ с ϵ -окрестностью начала координат. Как показано в статье [36], пространство $S^\beta(O)$ изоморфно пространству целых функций на $\mathbb{C}^n$, удовлетворяющих неравенствам

$$|f(z)| \leq C_N (1 + |x|)^{-N} \exp \left[|By|^{\frac{1}{1-\beta}} + d(Bx, U)^{\frac{1}{1-\beta}} \right], \quad z = x + iy, \quad (13)$$

где константы C_N и B зависят от f и $d(\cdot, U)$ есть расстояние от точки до конуса U . Если K – компакт в $\mathbb{D}^n$, соответствующий замкнутому конусу K , то каждый элемент

$S^\beta(K)$ принадлежит некоторому пространству $S^\beta(O)$, где O имеет указанный вид и содержит K . Пространство $S^\beta(\{0\})$, ассоциированное с вырожденным конусом $\{0\}$, состоит из целых функций с ростом не выше порядка $1/(1-\beta)$ и конечного типа, т.е. удовлетворяющих ограничению

$$|f(z)| \leq C \exp\left(|Bx|^{\frac{1}{1-\beta}} + |By|^{\frac{1}{1-\beta}}\right). \quad (14)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть K_1, K_2 — замкнутые конусы в $\mathbb{R}^n$ такие, что $K_1 \cap K_2 = \{0\}$. Любой функционал $v \in S'^\beta$, $0 \leq \beta < 1$, с несущим конусом $K_1 \cup K_2$ допускает разложение в сумму функционалов того же класса с несущими конусами K_1 и K_2 .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение теоремы выводится из точности последовательности (12) рассуждением, полностью аналогичным доказательству теоремы 4, поскольку $S^\beta(\{0\})$ является инъективным пределом ациклической последовательности банаховых пространств, как и $S^1(\{0\})$. В основе лежит возможность разложения каждого элемента $S^\beta(K_1 \cap K_2)$ на функции из $S^\beta(K_1)$ и $S^\beta(K_2)$. Стоит отметить, что при ненулевом β для данной геометрии такая возможность практически очевидна, если учесть, что пространство $S_{1-\beta}^\beta$ ($\beta > 0$) нетривиально [25] и в нем найдется функция χ_0 со свойствами

$$|\chi_0(z)| \leq C_0 \exp\left(-\left|\frac{x}{A_0}\right|^{\frac{1}{1-\beta}} + |B_0 y|^{\frac{1}{1-\beta}}\right) \quad (15)$$

и $\int \chi_0(\xi) d\xi = 1$. Пусть W_1, W_2 — открытые конусы такие, что $K_{1,2} \setminus \{0\} \subset W_{1,2}$ и $\overline{W_1} \cap \overline{W_2} = \{0\}$. Тогда при всех $x \in W_1$, $\xi \in W_2$ соблюдается неравенство $|x - \xi| \geq \theta|x|$, где $\theta > 0$. Положим $\chi(z) = \int_{W_2} \chi_0(z - \xi) d\xi$. Имеем очевидную оценку

$$|\chi(z)| \leq C_A \exp\left(-\left|\frac{\theta x}{A}\right|^{\frac{1}{1-\beta}} + |B_0 y|^{\frac{1}{1-\beta}}\right), \quad x \in W_1, \quad (16)$$

справедливую при любом $A > A_0$. Желаемое разложение функций, удовлетворяющих ограничению (14), реализуется формулой $f = \chi f + (1 - \chi)f$, если взять $A_0 < \theta/B$, что всегда возможно. Действительно, тогда оценка типа (13) (с достаточно большим B_1 вместо B) заведомо выполнена для функции χf при $x \in W_1$, а если конус $U \supset K \setminus \{0\}$ таков, что $\overline{U} \setminus \{0\} \subset W_1$, то она выполнена и при $x \notin W_1$, ибо тогда $d(x, U) \geq \theta'|x|$ с некоторым $\theta' > 0$. Тем самым $\chi f \in S^\beta(K_1)$. Аналогичным образом $(1 - \chi)f \in S^\beta(K_2)$, ибо $1 - \chi = \int_{\mathbb{C}W_2} \chi_0(z - \xi) d\xi$ и конус $\mathbb{C}W_2$ отделен от K_2 конечным угловым расстоянием. При $\beta = 0$ эта аргументация неприменима и приходится использовать более специальные средства, как и в теории гиперфункций. В работе [37] доказана точность аналога последовательности (12) для пространств S_α^0 , $\alpha > 1$. В частности, элементы из $S^0(\{0\}) = S_\alpha^0(\{0\})$ допускают разложение даже в рамках этого, более узкого класса. Таким образом, теорема 5 справедлива и при $\beta = 0$. Отметим, что и сама последовательность (12) точна при $\beta = 0$, в чем можно убедиться с помощью леммы 1.31 работы [24], но это доказательство значительно сложнее.

ЛЕММА 1. Любой функционал $v \in S'^\beta$, $\beta \geq 0$, несущим множеством которого служит начало координат, имеет вид

$$v = \sum_{\kappa} c_{\kappa} \partial^{\kappa} \delta(x), \quad \lim_{|\kappa| \rightarrow \infty} |\kappa|^{\beta} |c_{\kappa}|^{\frac{1}{|\kappa|}} = 0. \quad (17)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $\beta > 1$ это утверждение является простейшим частным случаем теоремы IV.I.I из [30]. Если $\beta \leq 1$, то функции $e_{\kappa} = x^{\kappa}/\kappa!$ очевидно составляют безусловный базис в $S^{\beta}(\{0\})$, а функционалы $e'_{\kappa} = (-1)^{|\kappa|} \partial^{\kappa} \delta(x)$ образуют дуальный ему базис функционалов. Тем самым $(v, f) = \sum_{\kappa} (v, e_{\kappa})(e'_{\kappa}, f)$, что переходит в представление (17) после переобозначения $c_{\kappa} = (-1)^{|\kappa|} (v, e_{\kappa})$. В силу непрерывности v по топологии $S^{\beta}(\{0\})$ при любом B имеем неравенство $|(v, e_{\kappa})| \leq C_B \|e_{\kappa}\|_B$, где $\|e_{\kappa}\|_B = \sup_{\ell} |\partial^{\ell} e_{\kappa}(0)| B^{-|\ell|} \ell^{-\beta \ell} = B^{-|\kappa|} \kappa^{-\beta \kappa}$, откуда следует указанное ограничение на коэффициенты c_{κ} . Лемма 1 доказана.

6. ЛОРЕНЦ-ИНВАРИАНТНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ

Рассматривая лоренц-инвариантные функционалы на пространстве Минковского $\mathbb{R}^4$, будем использовать обозначения $\overline{\mathbb{V}} = \{x \in \mathbb{R}^4 : x^2 = x_0 y_0 - \mathbf{x}\mathbf{y} \geq 0\}$, $\overline{\mathbb{V}}_+ = \{x \in \overline{\mathbb{V}} : x_0 \geq 0\}$ и $\overline{\mathbb{V}}_- = \{x \in \overline{\mathbb{V}} : x_0 \leq 0\}$. Собственную группу Лоренца обозначим $L_+^{\uparrow}$.

ТЕОРЕМА 6. Любой лоренц-инвариантный функционал $v \in S'^\beta$, $\beta \geq 0$, с несущим конусом $\overline{\mathbb{V}}$ допускает разложение на лоренц-инвариантные функционалы того же класса с несущими конусами $\overline{\mathbb{V}}_+$ и $\overline{\mathbb{V}}_-$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = v_+ - v_-$ — разложение v на функционалы с несущими верхним и нижним конусами, существующее в силу теорем 2, 4, 5 (знак минус в нем удобен для дальнейшего). Инвариантность разложения относительно подгруппы пространственных вращений достигается переходом к усредненным функционалам $\bar{v}_{\pm}$,

$$(\bar{v}_{\pm}, f) \stackrel{\text{def}}{=} \left(v_{\pm}, \int_{R \in SO(3)} f(Rx) dR \right). \quad (18)$$

Меру на группе вращений считаем нормированной на 1. К чисто лоренцевым преобразованиям (бустам) этот прием применить нельзя ввиду их некомпактности. Пусть $N_j = x_j \partial_0 + x_0 \partial_j$ — генераторы представления бустов в пространстве функционалов. Очевидно, что при $\beta > 1$ носителем функционала

$$u = N_1 \bar{v}_+ = N_1 \bar{v}_- \quad (19)$$

служит начало координат. При $\beta = 1$ такое же утверждение верно по теореме 3, а при $\beta < 1$ вырожденный конус $\{0\}$ является несущим для v ввиду точности последовательности (12) (и лоренц-инвариантности $S'^\beta(\overline{\mathbb{V}}_{\pm})$). Чтобы получить желаемое разложение, достаточно найти среди функционалов вида (17) $SO(3)$ -инвариантное решение уравнения

$$N_1 v = u. \quad (20)$$

Действительно, если такое решение v_0 существует, то функционалы $\bar{v}_\pm - v_0 \in S'^\beta(\bar{\mathbb{V}}_\pm)$ инвариантны относительно всей группы $L_+^\dagger$ в силу коммутационных соотношений

$$[N_j, M_{ij}] = N_i, \quad i \neq j, \quad (21)$$

где $M_{ij} = x_j \partial_i - x_i \partial_j$ — генераторы представления группы трехмерных вращений. Пусть $C = -\sum_{i < j} M_{ij}$ — ее оператор Казимира. Из соотношений (21) следует, что

$$N_1 u = 0, \quad Cu = 2u. \quad (22)$$

Конечномерные пространства E_n , состоящие из функционалов вида $\sum_{|\kappa|=n} c_\kappa \partial^\kappa \delta(x)$, инвариантны относительно $L_+^\dagger$. Поэтому задача сводится к проверке того, что внутри каждого E_n оператор N_1 отображает подпространство $F_n = \bigcap_{i < j} \text{Ker } M_{ij}$ на подпространство, определяемое формулами (22), которое мы обозначим G_n . Преобразование Фурье переводит E_n в пространство однородных многочленов степени n , которое мы разложим в прямую сумму $SO(3)$ -инвариантных подпространств,

$$E_n = \bigoplus_{l=0}^n p_0^{n-l} P_l, \quad (23)$$

где P_l состоит из однородных многочленов степени l от переменных p_1, p_2, p_3 (и где $P_0 = \mathbb{C}$). Напомним [38], что каждое подпространство P_l , в свою очередь, является прямой суммой минимальных инвариантных подпространств вида $(\mathbf{p}^2)^k H_{l-2k}$, $k = 0, 1, \dots, [l/2]$, где H_{l-2k} состоит из гармонических (т.е. удовлетворяющих уравнению Лапласа) однородных полиномов. На H_{l-2k} оператор Казимира кратен единичному и соответствующее собственное значение равно 2 лишь при степени однородности $l - 2k = 1$. Далее, лишь кратные p_1 элементы H_1 удовлетворяют первому из условий (22). Следовательно, многочлены

$$p_0^{n-2k-1} (\mathbf{p}^2)^k p_1, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right], \quad (24)$$

образуют базис в G_n . Базис в F_n формируют многочлены

$$p_0^{n-2k} (\mathbf{p}^2)^k, \quad k = 0, 1, \dots, \left[\frac{n}{2} \right]. \quad (25)$$

Таким образом, $\dim F_n \geq \dim G_n$ и рассматриваемое отображение $F_n \rightarrow G_n$ действительно сюръективно. Наличие у него одномерного ядра при четных n соответствует очевидной неоднозначности искомого разложения, связанной с возможностью добавления слагаемых вида $\sum_l c_l \square^l \delta(x)$. Остается показать, что решение уравнения (20) можно выбрать с соблюдением указанного в (17) ограничения на коэффициенты. Сужим при четных n отображение $F_n \rightarrow G_n$ на линейную оболочку первых $(n/2 - 1)$ из многочленов (25), что конкретизирует выбор решения v_0 . Применяя к ним генератор $p_1 \partial_0 + p_0 \partial_1$, мы видим, что тогда при любом n матрица (a_{kl}) отображения в указанных базисах квазидиагональна и ее ненулевыми элементами являются лишь $a_{kk} = n - 2k$ и

$a_{k,k+1} = 2(k+1)$, $0 \leq k \leq [(n-1)/2]$. Обратная матрица также верхнетреугольна, абсолютная величина ее элементов монотонно растет при одновременном увеличении обоих индексов и максимальна при $l = [(n-1)/2]$, когда

$$|a_{kl}^{(-1)}| = \frac{(n-1)!!}{(n-2k)!! (2k)!!} \quad (26)$$

в случае нечетных n . При четных n числитель в формуле (26) заменяется на $(n-2)!!$. Произведение левой и правой частей неравенства

$$\frac{(n-1)!!}{(n-2k)!! (2k)!!} \leq \frac{n!!}{(n-2k-1)!! (2k-1)!!}$$

есть биномиальный коэффициент $\binom{n}{2k}$, мажорируемый 2^n . Таким образом, $|a_{kl}^{(-1)}| \leq 2^{n/2}$. Далее, коэффициенты разложения элементов G_n по базису (24) являются подмножеством коэффициентов разложения по мономам p^κ , а коэффициенты разложения элементов F_n по мономам отличаются от коэффициентов разложения по базису (25) множителями, которые не превосходят $3^{n/2}$. Таким образом, если $u = \sum_\kappa c_\kappa \partial^\kappa \delta(x)$, то для коэффициентов c_κ^0 указанного решения v_0 уравнения (20) справедлива оценка $\max_{|\kappa|=n} |c_\kappa^0| \leq 6^{n/2} \max_{|\kappa|=n} |c_\kappa|$, что завершает доказательство теоремы 6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Изложенное доказательство прямо переносится на случай пространства-времени любой размерности $d \geq 3$. Однако при $d = 2$, когда подгруппы вращений нет, оно утрачивает силу и аналогичная теорема не соблюдается.

Действительно, рассмотрим распределение $\partial_+ [\theta(x_+) \ln x_+] \delta(x_-) \in S'(\mathbb{R}^2)$, где $x_\pm = (x_0 \pm x_1)/\sqrt{2}$ — конусные координаты. Оно не является лоренц-инвариантным в $\mathbb{R}^2$, имеет носителем луч на поверхности конуса $\overline{\mathbb{V}}_+^{(2)}$ и удовлетворяет уравнению $N_1 v = \delta(x)$ (в этих переменных $N_1 = x_+ \partial_+ - x_- \partial_-$). Этому же уравнению удовлетворяет распределение, получаемое из него операцией отражения $x \rightarrow -x$, однако среди функционалов (17) решений у данного уравнения нет. Поэтому сумма

$$\partial_+ [\theta(x_+) \ln x_+] \delta(x_-) + \partial_+ [\theta(-x_+) \ln |x_+|] \delta(x_-) \quad (27)$$

является нечетным лоренц-инвариантным распределением, которое не допускает инвариантного разложения ни в классе Шварца S' , ни в классах S'^β , $\beta \geq 0$. Этот пример показывает также, что не любое лоренц-инвариантное распределение в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ допускает инвариантное продолжение на все пространство $\mathbb{R}^2$, в то время как в $\mathbb{R}^4$ такое продолжение всегда существует ([2], предложение 3.5). С невозможностью продолжения распределения $\theta(x_+) x_+^{-1} \delta(x_-)$ в $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ до лоренц-инвариантной положительной меры на $\mathbb{R}^2$ связана необходимость использования индефинитной метрики при квантовании безмассового скалярного поля в двумерном пространстве-времени [39].

ТЕОРЕМА 7. Пусть v — лоренц-инвариантный функционал класса S'^β , $\beta \geq 0$, с несущим конусом $\overline{\mathbb{V}}$. Если его фурье-образ обращается в нуль в окрестности какой-либо пространственноподобной точки, то v является нечетным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $v = v_+ - v_-$ – инвариантное разложение v на функционалы с несущими конусами $\overline{V}_+$ и $\overline{V}_-$. Теорема 4 из статьи [40] утверждает, что для $v_\pm$ корректно определено преобразование Лапласа $\mathbf{u}_\pm(\zeta) = (v_\pm, e^{i(\cdot, \zeta)})$. Функции $\mathbf{u}_\pm$ аналитичны в областях $\mathbb{T}_\pm = \{\zeta = p + i\eta : \eta \in \mathbb{V}_\pm\}$, и их граничными значениями при $\eta \rightarrow 0$, $\eta \in V'_\pm$ (где $\overline{V}'_\pm \setminus \{0\} \subset \mathbb{V}_\pm$) служат фурье-образы $u_\pm = \mathcal{F}v_\pm$. В статье [40] рассматривались классы $S'^0_\alpha \supset S'^\beta$ и доказывалась сходимости к граничным значениям по топологии $S'^0_\alpha = \mathcal{F}(S'^0_\alpha)$, но в данном случае она соблюдается, конечно, и по топологии $S'_\beta = \mathcal{F}(S'^\beta)$, что устанавливается той же аргументацией. Согласно теореме Баргмана–Холла–Вайтмана [1], [2] каждая из лоренц-инвариантных функций $\mathbf{u}_\pm$ допускает симметричное относительно комплексной группы Лоренца $L_+(\mathbb{C})$ и, в частности, относительно полного отражения $\zeta \rightarrow -\zeta$ аналитическое продолжение в расширенную область $\mathbb{T}^{\text{ext}}$, которая содержит все пространственноподобные точки. Учитывая свойства единственности аналитических функций ([41], §6), заключаем, что сделанное предположение о носителе $u = \mathcal{F}v$ влечет равенство $\mathbf{u}_+(\zeta) = \mathbf{u}_-(\zeta)$, $\zeta \in \mathbb{T}^{\text{ext}}$. Следовательно, для любой пробной функции $g \in S_\beta = \mathcal{F}(S^\beta)$ имеем

$$\begin{aligned} (u, g) &= \lim_{\eta \rightarrow 0, \eta \in V'_+} \int (u_+(p + i\eta) - u_-(p - i\eta)) g(p) dp = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0, \eta \in V'_+} \int (u_-(-p - i\eta) - u_+(-p + i\eta)) g(p) dp = -(u, g(-\cdot)), \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что теорему 7 можно несколько усилить: в ее формулировке достаточно предполагать, что у функционала v имеется замкнутый несущий конус $K \supset \mathbb{V}$, отличный от всего пространства. Тогда и $\overline{V}$ будет его несущим конусом ввиду существования среди замкнутых несущих конусов наименьшего и вследствие лоренц-инвариантности v , поскольку любое пространственноподобное направление можно перевести внутрь дополнения к K подходящим преобразованием Лоренца.

7. ТЕОРЕМА О ПЛОТНОСТИ

Пусть $\mathcal{E}$ – конечномерное комплексное векторное пространство, в котором задано представление T группы $L_+^\uparrow$. Обозначим через $L(S^\beta, \mathcal{E})$ пространство непрерывных линейных отображений S^β в $\mathcal{E}$, снабженное топологией равномерной сходимости на ограниченных множествах. Задав базис в $\mathcal{E}$, отображение $w \in L(S^\beta, \mathcal{E})$ можно отождествить с набором непрерывных линейных функционалов $w^j \in S'^\beta$, число которых равно размерности представления (или, эквивалентным образом, с элементом пространства $(\mathcal{E}' \otimes S^\beta)'$). Поскольку S^β – монтелевское пространство, сходимость последовательности w_ν по указанной топологии равносильна тому, что каждая из последовательностей w_ν^j слабо сходится. Отображение $w \in L(S^\beta, \mathcal{E})$ называется (векторнозначной) лоренц-ковариантной обобщенной функцией, если оно удовлетворяет условию

$$w(f) = T(\Lambda)w(f_\Lambda), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, \quad f \in S^\beta, \quad (28)$$

где действие группы Лоренца в пространстве пробных функций определяется обычным образом как $f_\Lambda(x) = f(\Lambda^{-1}x)$. Если T имеет нечетную валентность и реализует представление группы $SL(2, \mathbb{C})$, являющейся универсальной накрывающей для $L_+^\uparrow$, то аналогичное (28) требование приводит к тождественному равенству $w \equiv 0$, поэтому фактически речь идет об однозначных представлениях группы Лоренца. В компонентной записи условие (28) принимает вид

$$(w^j, f_{\Lambda^{-1}}) = \sum_k T_k^j(\Lambda)(w^k, f), \quad \Lambda \in L_+^\uparrow, \quad f \in S^\beta. \quad (29)$$

Лоренц-ковариантные обобщенные функции образуют замкнутое подпространство в $L(S^\beta, \mathcal{E})$, которое мы снабжаем индуцированной топологией.

ТЕОРЕМА 8. *Пространство лоренц-ковариантных распределений умеренного роста плотно в пространстве преобразующихся по тому же представлению группы Лоренца ковариантных обобщенных функций класса S'^β при любом $\beta \geq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регуляризуем ультрафиолетовое поведение ковариантной обобщенной функции w умножением ее фурье-образа $u = \mathcal{F}w$ на $\chi(p/M) = \chi_0(p^2/M^2)$, где p^2 – лоренцев квадрат вектора p и $\chi_0(t)$ – бесконечно дифференцируемая функция с носителем в интервале $(-1, 1)$, тождественно равная 1 при $|t| \leq 1/2$. Пространство S_β состоит из гладких функций g таких, что

$$\|g\|_{B, N} = \max_{\kappa \leq N} \sup_p |\partial^\kappa g(p)| \exp\left(\left|\frac{p}{B}\right|^{\frac{1}{\beta}}\right) < \infty \quad (30)$$

при некотором B (зависящем от g) и любом $N = 0, 1, \dots$. Поэтому очевидно, что χ является мультипликатором в S_β , а с учетом оценки

$$\left|\partial^\kappa \chi\left(\frac{p}{M}\right)\right| \leq C_\kappa \left|\frac{p}{M^2}\right|^{|\kappa|} \quad (31)$$

легко проверяется, что $g\chi(p/M) \rightarrow g$ в S_β при $M \rightarrow \infty$. Следовательно, $u_M^j = u^j \chi(p/M) \rightarrow u^j$ в S'_β . Остается показать, что функционалы u_M^j допускают непрерывное продолжение на пространство Шварца S . Поскольку $S'_\beta \subset S'_0 = \mathcal{D}'$, то можно воспользоваться критерием, указанным в книге [42] (§ II.10.7), который гласит, что распределение из $\mathcal{D}'$ продолжается на S в том и только в том случае, если его свертка с любой пробной функцией $g \in \mathcal{D}$, имеющей носитель в единичном шаре $|p| < 1$, растет на бесконечности не быстрее, чем степенным образом. Рассмотрим сначала случай лоренц-инвариантных функционалов. Значение свертки $(u_M * g)$ в точке q есть значение распределения u_M на сдвинутой функции $g(p - q)$. Нуждаются в рассмотрении лишь сдвиги по поверхности светового конуса, ибо для остальных направлений $(u_M * g)(q)$ обращается в нуль при достаточно больших $|q|$. Кроме того, можно считать, что $q_2 = q_3 = 0$, поскольку любой вектор $q' \in \mathbb{R}^4$ переводится в некоторую точку q этой плоскости подходящим пространственным поворотом R и $(u_M * g)(q') = (u_M * g_R)(q)$, где $g_R(\cdot) = g(R^{-1}(\cdot))$. Наконец, не ограничивая общности, можно положить

$M = 1$, так как S' и S'_β инвариантны относительно гомотетий. Воспользуемся конусными переменными $q_\pm = (q_0 \pm q_1)/\sqrt{2}$, и пусть, для определенности, $q_- = 0$, $q_+ \rightarrow +\infty$. Обозначим через Λ преобразование Лоренца $p_+ \rightarrow p_+/q_+$, $p_- \rightarrow q_+p_-$ в плоскости (p_0, p_1) , которое переводит q в вектор с единичной евклидовой нормой. Ввиду лоренц-инвариантности u и χ имеем

$$(u\chi * g)(q) = (u, g_q), \quad \text{где} \quad g_q(p) = \chi(p)g(q - \Lambda^{-1}p). \quad (32)$$

Точки $\text{supp } g_q$ по построению удовлетворяют неравенствам $|p^2| < 1$, $p_2^2 + p_3^2 < 1$, и поэтому $|p_+p_-| < 1$. Кроме того $|q_+ - q_+p_+| < 1$ и, как следствие, $|p_-| < 1/(1 - 1/q_+)$. Значит, если q_+ достаточно велико, то $\text{supp } g_q$ содержится в шаре радиуса 2 и справедлива оценка

$$|(u, g_q)| \leq \|u\|_{2,N} \|g_q\|_{2,N}, \quad (33)$$

где $\|g_q\|_{2,N} = \max_{|\kappa| \leq N} \sup_{|p| \leq 2} |\partial^\kappa g_q(p)|$ в соответствии с формулой (30) и N имеет смысл порядка сингулярности распределения u в шаре $|p| < 2$. Преобразование Λ^{-1} производит сжатие графика функции g в q_+ раз по переменной p_+ , поэтому

$$\sup_p |\partial^\kappa g(q - \Lambda^{-1}p)| = \sup_p |\partial^\kappa g(\Lambda^{-1}p)| \leq C_\kappa \|g\|_{1,N} q_+^{|\kappa|}, \quad |\kappa| \leq N, \quad (34)$$

что вместе с оценкой (31) дает

$$\|g_q\|_{2,N} \leq C_N \|g\|_{1,N} (1 + |q|)^N. \quad (35)$$

Закljučаем, что поведение $(u_M * g)(q)$ при $|q| \rightarrow \infty$ действительно не хуже степенного (со степенью, зависящей от M). В случае лоренц-ковариантной обобщенной функции оценку $(u_M^j * g)(q)$ можно выполнить аналогичным образом, используя правило преобразования (29), что приводит к такому же заключению, поскольку при этом матричные элементы представления $T_k^j(\Lambda)$ являются рациональными функциями параметра буста q_+ . Теорема 8 доказана.

8. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ КОВАРИАНТАМ

Будем использовать обозначение (r, s) , где r, s — неотрицательные целые или полуцелые числа, для неприводимых конечномерных представлений группы $SL(2, \mathbb{C})$ и реализуем их обычным образом в пространствах комплексных однородных полиномов от спинорных переменных $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ и $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2)$ степени $2r$ и $2s$, соответственно. Напомним, что стандартный полиномиальный ковариант, преобразующийся по представлению (s, s) , имеет вид $(\bar{\omega} \tilde{x} \omega)^{2s}$, где

$$\tilde{x} = \begin{pmatrix} x_0 - x_3 & -x_1 + ix_2 \\ x_1 + ix_2 & x_0 + x_3 \end{pmatrix}. \quad (36)$$

Покажем, что представление [2], [23] лоренц-ковариантных распределений умеренного роста через полиномиальные коварианты допускает обобщение на функционалы класса S'^β . Векторная обобщенная функция w теперь трактуется как комплекснозначная обобщенная функция по переменной x , которая зависит также от переменных $\omega, \bar{\omega}$ полиномиальным образом, и условие лоренц-ковариантности (28) принимает вид

$$w(x; \omega, \bar{\omega}) = w(\Lambda(A)x; A\omega, \bar{A}\bar{\omega}), \quad A \in SL(2, \mathbb{C}), \quad (37)$$

где $A \rightarrow \Lambda(A)$ — канонический гомоморфизм группы $SL(2, \mathbb{C})$ в $L_+^\uparrow$.

ТЕОРЕМА 9. Лоренц-ковариантная обобщенная функция w , определенная на пространстве S^β , $\beta \geq 0$, и преобразующаяся по представлению (r, s) , отлична от нуля лишь при $r = s$; в этом случае она представима в виде

$$w(x; \omega, \bar{\omega}) = (\bar{\omega} \tilde{x} \omega)^{2s} v(x), \quad (38)$$

где $v \in S'^\beta$ – лоренц-инвариантный функционал, определяемый по w с точностью до слагаемого $\sum_{l=0}^{2s-1} c_l \square^l \delta(x)$, включающего произвольные постоянные c_l .

(Отметим, что (s, s) является однозначным представлением группы $L_+^\uparrow$.)

Для доказательства этой теоремы потребуются две леммы.

ЛЕММА 2. Пусть $f \in S^\beta(\mathbb{R}^n)$, $\beta \geq 0$. Если $f|_{x_1=0} = 0$, то $f(x) = x_1 f_1(x)$, где функция f_1 также принадлежит $S^\beta(\mathbb{R}^n)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначение $x' = (x_2, \dots, x_n)$ и положим

$$f_1(x_1, x') = \int_0^1 (\partial_1 f)(tx_1, x') dt. \quad (39)$$

При $|x_1| \leq 1$ имеем оценку

$$\begin{aligned} |\partial^\kappa f_1(x)| &\leq \|f\|_{B,N} B^{|\kappa|+1} \frac{(\kappa_1+1)^{\beta(\kappa_1+1)}}{\kappa_1^{\beta\kappa_1}} \kappa^{\beta\kappa} (1+|x'|)^{-N} \leq \\ &\leq C_{\epsilon,N} \|f\|_{B,N} (B+\epsilon)^{|\kappa|} \kappa^{\beta\kappa} (1+|x|)^{-N}, \end{aligned} \quad (40)$$

где норма определяется формулой (2) и число $\epsilon > 0$ сколь угодно мало. При $|x_1| > 1$ прямое применение к $f_1 = f/x_1$ формулы Лейбница дает

$$|\partial^\kappa f_1(x)| \leq \|f\|_{B,N} \sum_{\ell \leq \kappa} \binom{\kappa}{\ell} B^{|\kappa-\ell|} (\kappa-\ell)^{\beta(\kappa-\ell)} \ell! (1+|x|)^{-N}. \quad (41)$$

Если $\beta > 1$, то $\ell! \leq C_\epsilon \epsilon^{|\ell|} \ell^{\beta\ell}$ и, учитывая неравенство $(\kappa-\ell)^{\beta(\kappa-\ell)} \ell^{\beta\ell} \leq \kappa^{\beta\kappa}$, заключаем, что и в этой области для функции f_1 справедлива оценка типа (40), т.е. $f_1 \in S^\beta$. Пусть теперь $\beta = 1$. Пространство S^1 представимо как объединение по B пространств функций, аналитических в областях $T^B = \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : |y_j| < 1/B, \forall j\}$ и имеющих конечные нормы

$$\|f\|_{B,N} = \sup_{z \in T^B} |f(z)| (1+|x|)^N, \quad N = 1, 2, \dots \quad (42)$$

Из условия $f|_{z_1=0} = 0$ следует, что $f(z) = z_1 f_1(z)$, где f_1 аналитична в той же трубе, что и функция f , и мажорируется ею при $|z_1| \geq \delta > 0$. Для оценки $f_1(z)$ при $|z_1| < \delta$ воспользуемся формулой Коши по переменной z_1 , полагая $\delta = 1/(3B)$ и взяв в качестве контура интегрирования окружность радиуса 2δ . Такой контур лежит в T^B и $|\zeta_1| > \delta$ для любой точки ζ на нем. В результате получаем

$$|f_1(z)| \leq C_{\delta,N} \|f\|_{B,N} (1+|x|)^{-N}. \quad (43)$$

При $\beta < 1$ оценка выполняется аналогично. Функция $f_1(z)$ в этом случае является целой, нормами служат выражения

$$\sup_z |f(z)| (1 + |x|)^N \exp(-|By|^{\frac{1}{1-\beta}}), \quad (44)$$

а в качестве δ можно взять 1. Тем самым лемма 2 доказана. Отметим, что наличие норм функции f в правых частях оценок демонстрирует секвенциальную непрерывность обратного к инъективному отображению $f \rightarrow x_1 f$ пространства S^β в себя.

ЛЕММА 3. Любая функция $f \in S^\beta(\mathbb{R}^n)$, $\beta \geq 0$, удовлетворяющая условию $\partial^\kappa f(0) = 0$ при всех $|\kappa| \leq mn$, допускает разложение вида

$$f(x) = \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} f_i(x), \quad \text{где} \quad f_i \in S^\beta(\mathbb{R}^n). \quad (45)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $n = 1$ справедливость такого представления прямо следует из леммы 2. Далее воспользуемся индукцией по n , вводя обозначения

$$g_j(x') = \frac{1}{j!} \partial_1^j f(x)|_{x_1=0}, \quad F(x) = f(x) - f_0(x_1) \sum_{j=0}^m x_1^j g_j(x'), \quad (46)$$

где $x' = (x_2, \dots, x_n)$, как и прежде, и где функция $f_0 \in S^\beta(\mathbb{R})$ подчинена условиям $f_0^{(j)}(0) = 0$, $0 \leq j \leq m$. При всех $|\kappa| \leq m(n-1)$ имеем $\partial^\kappa g_j(0) = 0$ и по предположению индукции

$$g_j(x') = \sum_{i=2}^n x_i^{m+1} f_{ij}(x'), \quad \text{где} \quad f_{ij} \in S^\beta(\mathbb{R}^{n-1}). \quad (47)$$

Далее, $\partial_1^j F|_{x_1=0} = 0$ при всех $j \leq m$. Значит, $F(x) = x_1^{m+1} f_1(x')$ в силу леммы 2 и равенство (45) соблюдается с функцией $f_i(x) = f_0(x_1) \sum_{j=0}^m x_1^j f_{ij}(x')$, $2 \leq i \leq n$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9. Тожественное равенство w нулю при $r \neq s$ следует из теоремы 8 и из предложения 3.6 книги [2] о структуре лоренц-ковариантных распределений Шварца. Размерность представления (s, s) , т.е. число различных мономов от переменных $\omega, \bar{\omega}$ степени $2s$ по каждой из них, равна $(2s+1)^2$. Перенумеруем эти мономы и рассмотрим отображение

$$h: \bigoplus^{(2s+1)^2} S^\beta \rightarrow S^\beta,$$

сопоставляющее набору пробных функций $\{f_i\}$, $1 \leq i \leq (2s+1)^2$, их линейную комбинацию, получаемую заменой мономов в многочлене $(\bar{\omega}\tilde{x}\omega)^{2s}$ на пробные функции с соответствующими индексами. Сопряженное к h отображение h' сопоставляет функционалу $v \in S'^\beta$ набор функционалов, получаемых из v умножением на коэффициенты многочлена, и сужение h' на подпространство инвариантных функционалов переводит их в ковариантные функционалы вида (38). Поскольку любое ковариантное распределение

Шварца имеет такой вид и они плотны в ковариантных обобщенных функциях рассматриваемого класса, достаточно показать, что образ любого замкнутого подпространства при отображении h' замкнут в $\bigoplus^{(2s+1)^2} S'^\beta$.

Заметим, что $\text{Im } h$ включает в себя замкнутое подпространство, выделяемое условиями $\partial^\kappa f(0) = 0$, $|\kappa| \leq 4s(4s-1)$, которое имеет конечную коразмерность в S^β . Действительно, согласно лемме 3 имеется разложение $f(x) = \sum_{i=0}^3 x_i^{4s} f_i(x)$, и если выразить x_i^{4s} через элементы $x_{\rho\sigma}$ матрицы (36), то каждый член получающегося выражения будет содержать хотя бы один из этих элементов в степени не меньшей $2s$. Значит, функция f может быть записана как сумма

$$\sum_{\rho, \sigma=1,2} x_{\rho\sigma}^{2s} f_{\rho\sigma} \quad (f_{\rho\sigma} \in S^\beta),$$

которая, очевидно, содержится в $\text{Im } h$. Таким образом, подпространство $\text{Im } h$ представимо как сумма конечномерного и замкнутого подпространств и, следовательно, тоже замкнуто. Далее, благодаря рефлексивности S^β из замкнутости $\text{Im } h$ вытекает, что отображение h' является гомоморфизмом (открытым отображением на свой образ) относительно сильных топологий сопряженных пространств [43] (§IV.4.1). Пусть L – замкнутое подпространство в S'^β . Его сумма с конечномерным подпространством $\text{Ker } h'$ (которое содержится в линейной оболочке функционалов $\partial^\kappa \delta(x)$, $|\kappa| \leq 4s(4s-1)$) также замкнута. Поэтому для точки $v \notin L + \text{Ker } h'$ найдется окрестность $\mathcal{U}$, которая не пересекается с $L + \text{Ker } h'$. Множество $h'(\mathcal{U})$ является окрестностью в $\text{Im } h'$ и не пересекается с подпространством $h'(L)$. Следовательно, $h'(L)$ замкнуто, что и требовалось доказать.

Последнее утверждение теоремы уточняет описание ядра ограничения оператора h' на подпространство лоренц-инвариантных функционалов. Поскольку инвариантные комбинации распределений $\partial^\kappa \delta(x)$ имеют вид $\sum_l c_l \square^l \delta(x)$ и при преобразовании Фурье переходят в полиномы по p^2 , а фурье-образом $(\bar{\omega} \tilde{x} \omega)$ служит $-i(\bar{\omega} \tilde{\partial} \omega)$, то доказательство завершается применением тождеств $(\bar{\omega} \tilde{\partial} \omega)(p^2) = 2(\bar{\omega} \tilde{p} \omega)$, $(\bar{\omega} \tilde{\partial} \omega)(\bar{\omega} \tilde{p} \omega) = 0$. Отсюда следует, что $(\bar{\omega} \tilde{\partial} \omega)^{2s}(p^2)^l = 0$ лишь при $l \leq 2s-1$. Теорема 9 доказана.

Теперь мы в состоянии распространить теорему 6 на ковариантные обобщенные функции, но для этого понадобится еще одно вспомогательное утверждение, которое примыкает к лемме 2.

ЛЕММА 4. Пусть $v \in S'^\beta$, $\beta \leq 1$, и пусть K – замкнутый конус в $\mathbb{R}^n$, в котором содержится плоскость $x_1 = 0$. Если K является несущим конусом для $x_1 v$, то он будет несущим и для v .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть O – объединение открытого конуса $U \supset K \setminus \{0\}$ с ϵ -окрестностью начала координат и пусть $f \in S^\beta(O)$. Обозначим $g(z') = f(0, z')$. Поскольку точки вида $(0, z')$ лежат в O , функция g принадлежит $S^\beta(\mathbb{R}^{n-1})$ и

$$\|g\|_{B,N} \leq \|f\|_{O,B,N}. \quad (48)$$

При $\beta = 1$ определение нормы $\|f\|_{O,B,N}$ отличается от (42) тем, что $\sup$ берется по комплексной $(1/B)$ -окрестности O , а при $\beta < 1$ норма включает дополнительный k (44)

множитель $\exp\{-d(Bx, U)^{1/(1-\beta)}\}$ в соответствии с формулой (13). Пусть теперь $f_0(z_1)$ — любая функция из $S^\beta(\mathbb{R})$, равная 1 в нуле. Тогда $(f - f_0g) \in S^\beta(O)$ и $(f - f_0g)|_{z_1=0} = 0$. Те же элементарные соображения, что и при доказательстве леммы 2, показывают, что $(f - f_0g)(z) = z_1 f_1(z)$, где f_1 принадлежит пространству $S^\beta(O)$ и стремится в нем к нулю, когда f стремится к нулю по его топологии. Таким образом, формула

$$(\hat{v}, f) = (v, f_0g) + (x_1 v, f_1) \quad (49)$$

определяет непрерывное продолжение функционала v на $S^\beta(O)$, что и доказывает утверждение леммы. Аналогичное утверждение верно и при $\beta > 1$, но в этом случае оно тривиально. Лемма 4 доказана.

ТЕОРЕМА 10. *Любая лоренц-ковариантная обобщенная функция w над S^β , $\beta \geq 0$, с несущим конусом $\bar{V}$ допускает разложение на лоренц-ковариантные обобщенные функции того же класса с несущими конусами $\bar{V}_+$ и $\bar{V}_-$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем считать, что w преобразуется по представлению (s, s) . Конус $\bar{V}$ является несущим для инвариантного функционала v , через который функция w выражается формулой (38). Действительно, по условию теоремы он служит несущим для $(x_0 - x_3)^{2s} v$. Считая разность $x_0 - x_3$ первой координатой и применяя лемму 4, заключаем, что дополнение к конической окрестности положительной x_3 -полуоси заведомо является несущим конусом v , а в силу лоренц-инвариантности то же самое можно сказать и относительно любого другого пространственноподобного направления; пересечение же этих дополнительных конусов есть $\bar{V}$. Остается учесть существование наименьшего несущего конуса и применить теорему 6. Теорема 10 доказана.

9. ПРИЛОЖЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ О СВЯЗИ СПИНА СО СТАТИСТИКОЙ

Рассмотрим конечную совокупность полей $\{\phi_i\}$, являющихся операторнозначными обобщенными функциями над пространством $S^\beta(\mathbb{R}^4)$, $\beta < 1$, и удовлетворяющих обычным предположениям вайтмановской аксиоматики [1], [2] за исключением локальной коммутативности, формулировку которой использование аналитических пробных функций делает невозможной. Естественной заменой этой аксиомы, причем по своему смыслу более близкой к физическому требованию макропричинности, является условие, что замкнутый световой конус $\bar{V}$ служит несущим конусом матричных элементов коммутаторов наблюдаемых полей. (Если теория включает и ненаблюдаемые поля, то $\bar{V}$ является несущим конусом либо коммутаторов, либо антикоммутаторов.) Подробнее о мотивировке и точной формулировке этого условия, которое мы называем асимптотической коммутативностью, см. статью [24]. Мы придерживаемся обычного предположения, что тип перестановочного соотношения зависит лишь от типа поля и одинаков для всех его лоренцевых компонент, поэтому лоренцевы индексы в дальнейшем не выписываем. Из трансформационных свойств полей относительно группы Пуанкаре и инвариантности вакуума следует, что вакуумные средние $\langle \Psi_0, \phi(x_1) \psi(x_2) \Psi_0 \rangle$ являются лоренц-ковариантными обобщенными функциями над $S^\beta(\mathbb{R}^4)$ по разностной переменной

$\xi = x_1 - x_2$. Это позволяет применить теорему 9 к обобщению вывода связи спина со статистикой на нелокальные поля. В полной аналогии с обычной теорией [1], [2] полей умеренного роста слабое кластерное свойство вакуумных средних (которое следует из существования и единственности вакуума без использования локальности) приводит к тому, что любая пара ненулевых полей ϕ, ψ , определенных на S^β , имеет тот же тип перестановочных соотношений, что и пара ϕ, ψ^* (см. теорему 11 в [24]). Поэтому задача сводится к анализу асимптотических коммутационных соотношений между полем ϕ и эрмитово сопряженным ему полем ϕ^* .

ТЕОРЕМА 11. Пусть поле ϕ определено на пространстве $S^\beta(\mathbb{R}^4)$, $0 \leq \beta < 1$, и преобразуется по неприводимому представлению (r, s) группы $SL(2, \mathbb{C})$. Аномальное асимптотическое перестановочное соотношение между ϕ и ϕ^* (антикоммутативность в случае целого спина и коммутативность в случае полуцелого) приводит к равенству $\phi(f)\Psi_0 = \phi^*(f)\Psi_0 = 0$ для всех $f \in S^\beta(\mathbb{R}^4)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем использовать обозначения

$$W(x_1 - x_2) = \langle \Psi_0, \phi(x_1)\phi^*(x_2)\Psi_0 \rangle, \quad W'(x_1 - x_2) = \langle \Psi_0, \phi^*(x_1)\phi(x_2)\Psi_0 \rangle \quad (50)$$

и рассмотрим сначала случай скалярного поля. Аномальное асимптотическое перестановочное соотношение означает, что конус $\overline{\nabla}$ является несущим для функционала $W(\xi) + W'(-\xi)$. Тогда согласно теореме 7 этот функционал является нечетным, поскольку в силу спектрального условия его фурье-образ обращается в нуль при $p^2 < 0$. Значит, нечетен и функционал $W(\xi) + W'(\xi)$, который в импульсном представлении имеет носитель в конусе $\overline{\nabla}_+$ и в таком случае обязан быть тождественно равным нулю. Взяв его значение на пробной функции вида $\bar{f}(x_1)f(x_2)$, получаем

$$\|\phi(f)\Psi_0\|^2 + \|\phi^*(f)\Psi_0\|^2 = 0, \quad f \in S^\beta. \quad (51)$$

Пусть теперь поле ϕ преобразуется по неприводимому представлению (r, s) . Тогда аномальное перестановочное соотношение означает, что $\overline{\nabla}$ является несущим конусом для $W(\xi) \pm W'(-\xi)$, где знак плюс соответствует случаю целого спина, а знак минус — случаю полуцелого. Лоренц-ковариантные обобщенные функции (50) преобразуются по представлению $(r, s) \otimes (s, r)$, разложение которого на неприводимые представления имеет вид

$$(r, s) \otimes (s, r) = \bigoplus_{\substack{|r-s| \leq r', s' \leq r+s \\ r', s' \in |r-s| + \mathbb{N}}} (r', s'). \quad (52)$$

Соответственно в разложении $W(\xi) \pm W'(-\xi)$ по полиномиальным ковариантам будет $2 \min(r, s) + 1$ слагаемых. Отметим, что в случае целого спина, когда $r + s$ — целое число, в разложении участвуют коварианты лишь четной степени, а в случае полуцелого — лишь нечетной. Применим теорему 10 и совершим преобразование Лапласа. Тогда в импульсном пространстве обобщенная функция $\widetilde{W}(p) \pm \widetilde{W}'(-p)$ будет представлена в виде разности граничных значений лоренц-ковариантных аналитических функций, голоморфных в трубах $\mathbb{T}_\pm$ и допускающих аналитическое продолжение в расширенную

область $\mathbb{T}^{\text{ext}}$ по теореме Баргмана–Холла–Вайтмана [1], [2]. Эти аналитические функции симметричны относительно полного отражения $p + i\eta \rightarrow -p - i\eta$ в случае целого спина и антисимметричны в случае полуцелого, а в силу спектрального условия и теоремы единственности совпадают друг с другом в $\mathbb{T}^{\text{ext}}$. Для граничных значений отсюда следует тождество

$$\widetilde{W}(p) \pm \widetilde{W}'(-p) = \mp \widetilde{W}(-p) - \widetilde{W}'(p). \quad (53)$$

Снова учитывая спектральное условие, мы видим, что тогда носителем $\widetilde{W}(p) + \widetilde{W}'(p)$ может быть только точка $p = 0$. Порядок сингулярности этой обобщенной функции должен быть равен нулю в силу условия положительности. В случае полуцелого спина такого члена в ее разложении по ковариантам нет, а в случае целого спина он не может преобразовываться при отражении по формуле (53). Таким образом, $\widetilde{W}(p) + \widetilde{W}'(p) \equiv 0$, что завершает доказательство.

10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Полученные результаты позволяют обращаться с высокосингулярными лоренц-ковариантными обобщенными функциями столь же просто, как и с обычными распределениями умеренного роста. Существенным дополнением теоремы 7 служат теорема 2.14 из работы [22] и теорема 9 из статьи [24], которые показывают, что конус $\overline{V}$ является несущим конусом нечетных лоренц-инвариантных функционалов при любой сингулярности. В разделе 9 рассматривались двухточечные вайтмановские функции специального вида, однако естественный аналог ковариантного разложения [2], [23] имеется для вакуумного среднего любой пары полей над S^β , преобразующихся по конечномерным неприводимым или просто приводимым представлениям группы $SL(2, \mathbb{C})$. К открытым вопросам относится вывод для четных и нечетных инвариантных функционалов класса S'^β аналога представления Мете. Отметим еще, что полученные теоремы можно распространить на функционалы, определенные на обобщенных пространствах Гельфанда–Шилова S^b , задаваемых индикаторной функцией b , характеризующей рост их фурье-образов. Соответствующие ограничения на индикаторную функцию установлены в статье [21].

Благодарности. Автор благодарен Российскому фонду фундаментальных исследований за финансовую поддержку, оказанную грантом № 99-01-00376 и грантом поддержки ведущих научных школ № 00-15-96566.

Список литературы

- [1] Р. Стритер, А. Вайтман. РСТ, спин и статистика и все такое. М.: Наука, 1966.
- [2] Н. Н. Боголюбов, А. А. Логунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [3] Н. Н. Мейман. ЖЭТФ. 1964. Т. 47. С. 1966.
- [4] A. Jaffe. Phys. Rev. 1967. V. 158. P. 1454.
- [5] М. З. Иофа, В. Я. Файнберг. ТМФ. 1967. Т. 1. С. 187.
- [6] М. З. Иофа, В. Я. Файнберг. ЖЭТФ. 1969. Т. 56. С. 1644.
- [7] V. Ya. Fainberg, A. V. Marshakov. Phys. Lett. B. 1988. V. 211. P. 82.
- [8] M. Z. Iofa, V. Ya. Fainberg. Nuovo Cim. 1971. V. 5A. P. 273.

- [9] *В. Я. Файнберг*. О квантовых теориях с неполиномиальным ростом матричных элементов. В сб.: Проблемы теоретической физики. М.: Наука, 1972. С. 119.
- [10] *V. Ya. Fainberg, M. A. Soloviev*. Ann. Phys. 1978. V. 113. P. 421.
- [11] *S. B. Giddings*. Phys. Rev. D. 2000. V. 61. P. 106008.
- [12] *Г. В. Ефимов*. Нелокальные взаимодействия квантованных полей. М.: Наука, 1977.
- [13] *Г. В. Ефимов*. Проблемы квантовой теории нелокальных взаимодействий. М.: Наука, 1985.
- [14] *J. W. Moffat*. Quantum field theory solution to the gauge hierarchy and cosmological constant problems. hep-ph/0003171.
- [15] *М. А. Соловьев*. ТМФ. 1971. Т. 7. С. 183.
- [16] *S. Nagatachi, N. Mugibayashi*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 46. P. 119.
- [17] *S. Nagatachi, N. Mugibayashi*. Commun. Math. Phys. 1976. V. 49. P. 257.
- [18] *М. А. Соловьев*. ТМФ. 1973. Т. 15. С. 3.
- [19] *U. Moschella, F. Strocchi*. Lett. Math. Phys. 1992. V. 24. P. 103.
- [20] *M. A. Soloviev*. Lett. Math. Phys. 1997. V. 41. P. 265.
- [21] *А. Г. Смирнов, М. А. Соловьев*. ТМФ. 2000. Т. 123. С. 355.
- [22] *М. А. Соловьев*. Труды ФИАН. 1993. Т. 209. С. 121.
- [23] *A. I. Oksak, I. T. Todorov*. Commun. Math. Phys. 1969. V. 14. P. 271.
- [24] *М. А. Соловьев*. ТМФ. 1999. Т. 121. С. 139.
- [25] *И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов*. Обобщенные функции. Т. 2. М.: Физмат, 1958.
- [26] *В. П. Паламодов*. УМН. 1971. Т. 26. С. 3.
- [27] *Х. Шефер*. Топологические векторные пространства. М.: Мир, 1971.
- [28] *И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин*. Обобщенные функции. Т. 4. М.: Физмат, 1961.
- [29] *Л. Хермандер*. Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 1. М.: Мир, 1986.
- [30] *A. Lambert*. Ann. Inst. Fourier. 1979. V. 29. P. 57.
- [31] *П. Шапиро*. Теория гиперфункций. М.: Мир, 1972.
- [32] *T. Kawai*. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A. Math. 1970. V. 17. P. 467.
- [33] *Д. А. Райков*. Сиб. матем. ж. 1966. Т. 7. С. 353.
- [34] *A. Grothendieck*. Mem. Amer. Math. Soc. 1955. V. 16.
- [35] *В. С. Ретак*. ДАН. 1970. Т. 194. С. 1277.
- [36] *В. Я. Файнберг, М. А. Соловьев*. ТМФ. 1992. Т. 93. С. 514.
- [37] *M. A. Soloviev*. Lett. Math. Phys. 1995. V. 33. P. 49.
- [38] *Д. П. Желобенко*. Компактные группы Ли и их представления. М.: Наука, 1970.
- [39] *A. S. Wightman*. Adv. Math. Suppl. Stud. 1981. V. 7B. P. 769.
- [40] *M. A. Soloviev*. Commun. Math. Phys. 1997. V. 184. P. 579.
- [41] *В. С. Владимиров*. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
- [42] *Г. Е. Шилов*. Математический анализ. Второй специальный курс. М.: Наука, 1965.
- [43] *Н. Бурбаки*. Топологические векторные пространства. М.: ИЛ, 1959.

Поступила в редакцию 15.V.2001 г.