Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Тютин, Общий вид $*$ -коммутатора на алгебре Грассмана, *ТМФ*, 2001, том 128, номер 3, 515–539

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf512>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 17:26:45

ОБЩИЙ ВИД *-КОММУТАТОРА НА АЛГЕБРЕ ГРАССМАНА

Изучается общий вид *-коммутиатора на алгебре Грассмана, рассматриваемого как деформация обычной скобки Пуассона. Показано, что с точностью до преобразования подобия кроме *-коммутиатора Мойла на алгебре Грассмана существуют и другие деформации скобки Пуассона (по одной при четных и нечетных n , n – число образующих алгебры Грассмана), не сводящиеся к *-коммутиатору Мойла преобразованием подобия.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно, наибольшие надежды на построение квантовой механики на нетривиальных многообразиях связаны с так называемыми геометрическим или деформационным квантованиями [1]–[5]. Операторам ставятся в соответствие функции на фазовом пространстве, а произведение операторов и их коммутатор описываются ассоциативным *-произведением и *-коммутиатором функций, которые представляют собой деформации соответственно обычного поточечного произведения и скобки Пуассона. На четных многообразиях, по крайней мере локально, *-коммутиатор совпадает с обычным коммутиатором в алгебре с ассоциативным *-произведением. Представляет интерес выяснить, какова ситуация в случае, когда фазовое пространство является супермногообразием. В настоящей работе мы изучаем общий вид деформации невырожденной скобки Пуассона на алгебре Грассмана. Показано, что на алгебре Грассмана кроме *-коммутиаторов, эквивалентных *-коммутиатору Мойла [6], существуют и другие деформации, не сводящиеся к *-коммутиатору Мойла преобразованием подобия.

Дальнейший план статьи следующий. В разделе 2 описана точная постановка задачи. В разделе 3 найдено решение тождества Якоби, рассматриваемого как уравнение для *-коммутиатора, в низшем приближении по параметру деформации. В разделе 4 рассмотрены высшие деформации и сформулирован основной результат работы. В приложениях 1 и 2 приведены решения уравнений, встретившихся в основном тексте.

Приведем некоторые соглашения в обозначениях, встречающиеся в основном тексте:

* Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия

ξ^α , $\alpha = 1, \dots, n$, – нечетные антикоммутирующие образующие алгебры Грассмана,

$$\varepsilon(\xi^\alpha) = 1, \quad \xi^\alpha \xi^\beta + \xi^\beta \xi^\alpha = 0, \quad \partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha},$$

$\varepsilon(A)$ означает грассманову четность величины A ;

$$\begin{aligned} [\xi^\alpha]^0 &\equiv 1, & [\xi^\alpha]^k &\equiv \xi^{\alpha_1} \dots \xi^{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n, & [\xi^\alpha]^k &= 0, \quad k > n, \\ [\partial_\alpha]^0 &\equiv 1, & [\partial_\alpha]^k &\equiv \partial_{\alpha_1} \dots \partial_{\alpha_k}, \quad 1 \leq k \leq n, & [\partial_\alpha]^k &= 0, \quad k > n, \\ & & [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k &\equiv \overleftarrow{\partial}_{\alpha_1} \dots \overleftarrow{\partial}_{\alpha_k}; \\ T_{\dots[\alpha]_k \dots} &\equiv T_{\dots\alpha_1 \dots \alpha_k \dots}, & T_{\dots\alpha_i \alpha_{i+1} \dots} &= -T_{\dots\alpha_{i+1} \alpha_i \dots}, & i &= 1, \dots, k-1. \end{aligned}$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ

Рассмотрим грассманову алгебру $\mathcal{G}_K$ над полем $K = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ с образующими ξ^α , $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Общий элемент f алгебры (функция от образующих) имеет вид

$$f \equiv f(\xi) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} f_{[\alpha]_k} [\xi^\alpha]^k, \quad f_{[\alpha]_0} \equiv f_0 = \text{const}, \quad f_{[\alpha]_k} \in K.$$

Пусть на алгебре Грассмана $\mathcal{G}_K$ задана невырожденная скобка Пуассона

$$\{f_1, f_2\}(\xi) \equiv [f_1, f_2]_{*0}(\xi) \equiv c_0(\xi \mid f_1, f_2) = f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \omega^{\alpha\beta}(\xi) \partial_\beta f_2(\xi), \quad (1)$$

где $\omega^{\alpha\beta}(\xi)$ – симплектическая метрика, четная симметричная тензорная функция, удовлетворяющая тождеству Якоби:

$$\omega^{\beta\alpha} = \omega^{\alpha\beta}, \quad \omega^{\alpha\delta} \partial_\delta \omega^{\beta\gamma} + \omega^{\gamma\delta} \partial_\delta \omega^{\alpha\beta} + \omega^{\beta\delta} \partial_\delta \omega^{\gamma\alpha} = 0.$$

Мы будем интересоваться общим видом $*$ -коммутатора, т.е. билинейного отображения $\mathcal{G}_K \times \mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{G}_K$:

$$f_3(\xi) \equiv [f_1, f_2]_*(\xi) = C(\xi \mid f_1, f_2),$$

со следующими свойствами.

1. Четность

$$\varepsilon(C(\xi \mid f_1, f_2)) = \varepsilon(f_1) + \varepsilon(f_2).$$

2. Антисимметрия

$$C(\xi \mid f_2, f_1) = -(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_2)} C(\xi \mid f_1, f_2).$$

3. Тождество Якоби

$$(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} [f_1, [f_2, f_3]_*]_* + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0 \quad \forall f_1, f_2, f_3, \quad (2)$$

или эквивалентно

$$(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)}C(\xi \mid f_1, f_{23}) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0 \quad \forall f_1, f_2, f_3, \quad (3)$$

где обозначено $f_{ij}(\xi) \equiv C(\xi \mid f_i, f_j)$.

4. Предполагается, что *-коммутатор задается рядом по параметру $\hbar^2$:

$$[f_1, f_2]_*(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{2k} [f_1, f_2]_{*k}(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^{2k} c_k(\xi \mid f_1, f_2), \quad (4)$$

где $[f_1, f_2]_{*0} = c_0(\xi \mid f_1, f_2)$ совпадает со скобкой Пуассона (1) (граничное условие или принцип соответствия). Иными словами, мы хотим установить общий вид деформации скобки Пуассона на алгебре Грассмана. Параметр деформации обозначен через $\hbar^2$, причем без ограничения общности можно считать $\hbar$ вещественным и положительным числом.

Условие (2) (или эквивалентно (3)) будем рассматривать как уравнение на возможную структуру *-коммутатора. Отметим, что если $C(\xi \mid f_1, f_2)$ удовлетворяет свойствам 1–3, тогда и C_T (или эквивалентно $*_T$ -коммутатор),

$$C_T(\xi \mid f_1, f_2) = T^{-1}C(\xi \mid Tf_1, Tf_2) \quad (5)$$

(T – неособенное четное линейное отображение $\mathcal{G}_K \rightarrow \mathcal{G}_K$), также удовлетворяет свойствам 1–3. Граничное условие при этом может измениться. Оператор T в общем случае имеет вид

$$T = T'(1 + \hbar^2 t_1 + \dots), \quad T' = T|_{\hbar=0}.$$

Пусть $T' = T_\eta$ – оператор замены образующих:

$$\begin{aligned} T_\eta \xi^\alpha &= \eta^\alpha(\xi), & T_\eta^{-1} \xi^\alpha &= T_\zeta \xi^\alpha = \zeta^\alpha(\xi), \\ T_\eta f(\xi) &= f(\eta(\xi)), & T_\eta^{-1} f(\xi) &= T_\zeta f(\xi) = f(\zeta(\xi)), \end{aligned} \quad (6)$$

где функции $\zeta^\alpha(\xi)$ отвечают обратной замене: $\eta^\alpha(\zeta(\xi)) = \xi^\alpha$, $\varepsilon(\eta^\alpha) = \varepsilon(\zeta^\alpha) = 1$.

$*_{T_\eta}$ -Коммутатор обладает свойством 4, но с измененной скобкой Пуассона:

$$\omega^{\alpha\beta}(\xi) \longrightarrow \omega_{T_\eta}^{\alpha\beta}(\xi) = \xi^\alpha \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \zeta^{\alpha'}} \omega^{\alpha'\beta'}(\zeta(\xi)) \frac{\partial}{\partial \zeta^{\beta'}} \xi^\beta.$$

Преобразования *-коммутатора вида (5) мы будем называть преобразованиями подобия, а *- и $*_T$ -коммутаторы, удовлетворяющие соотношению (5), будем называть связанными преобразованием подобия или эквивалентными. *-Коммутатор, полученный из скобки Пуассона преобразованием подобия, будем называть тривиальной деформацией скобки Пуассона.

Предположим, что выполнено подходящее преобразование подобия, приводящее скобку Пуассона к каноническому виду, т.е. будем считать, что скобка Пуассона имеет вид

$$\{f_1, f_2\}(\xi) \equiv [f_1, f_2]_{*0}(\xi) \equiv c_0(\xi \mid f_1, f_2) = f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha f_2(\xi), \quad \lambda_\alpha^2 = 1, \quad (7)$$

где $\lambda_\alpha = 1$ в случае комплексной алгебры Грассмана $\mathcal{G}_\mathbb{C}$ и $\lambda_\alpha = \pm 1$ в случае вещественной алгебры Грассмана $\mathcal{G}_\mathbb{R}$.

Уравнение (2) (или эквивалентно (3)) будем решать в терминах рядов по $\hbar^2$. В нулевом порядке оно, очевидно, выполнено. В первом порядке по $\hbar^2$ получаем

$$(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)}[f_1, [f_2, f_3]_{*1}]_{*0} + (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)}[f_1, [f_2, f_3]_{*0}]_{*1} + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0, \quad (8)$$

или эквивалентно

$$(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)}[f_1, c_1(f_2, f_3)]_{*0}(\xi) + (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)}c_1(\xi | f_1, [f_2, f_3]_{*0}) + \text{цикл}(1, 2, 3) = 0. \quad (9)$$

Кроме того, должны быть выполнены условия 1 и 2:

$$c_1(\xi | f_2, f_1) = -(-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_2)}c_1(\xi | f_1, f_2), \quad \varepsilon(c_1(\xi | f_1, f_2)) = \varepsilon(f_1) + \varepsilon(f_2).$$

Очевидным решением уравнения (8) или (9) является билинейный функционал $c_{1\text{трив}}$, полученный из скобки Пуассона применением преобразования подобия $Tf = T(\xi | f) = (1 + \hbar t_1 + O(\hbar^2))f(\xi) = f(\xi) + \hbar t_1(\xi | f) + O(\hbar^2)$, $\varepsilon(Tf) = \varepsilon(t_1 f) = \varepsilon(f)$:

$$c_{1\text{трив}}(\xi | f_1, f_2) = [f_1, t_1 f_2]_{*0}(\xi) - t_1(\xi | [f_1, f_2]_{*0}) + [t_1 f_1, f_2]_{*0}(\xi). \quad (10)$$

Рассмотрим алгебру $\mathcal{B} = \sum_{\oplus} \mathcal{B}_k$ четных k -линейных функционалов $\Phi_k(\xi | f_1, \dots, f_k) \in \mathcal{B}_k$ (отображений $(\mathcal{G} \times)^k \rightarrow \mathcal{G}$), $\varepsilon(\Phi_k(\xi | f_1, \dots, f_k)) = \varepsilon(f_1) + \dots + \varepsilon(f_k) \pmod{2}$, $k \geq 1$, $\mathcal{B}_0 = K$, обладающих свойством

$$\begin{aligned} \Phi_k(\xi | f_q, \dots, f_{i-1}, f_i, f_{i+1}, \dots, f_n) = \\ = -(-1)^{\varepsilon(f_i)\varepsilon(f_{i+1})}\Phi_k(\xi | f_q, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, f_i, \dots, f_n). \end{aligned}$$

Умножение в этой алгебре (отображение $\mathcal{B}_k \times \mathcal{B}_l \rightarrow \mathcal{B}_{k+l}$) определено следующим образом:

$$\Phi_k \circ \Phi_l(\xi | f_1, \dots, f_{k+l}) = \frac{1}{(k+l)!} \sum_P \text{sign } P \Phi_k(\xi | f_{i_1}, \dots, f_{i_k}) \Phi_l(\xi | f_{i_{k+1}}, \dots, f_{i_{k+l}}),$$

сумма берется по всем перестановкам P чисел $1, 2, \dots, k+l$, $\text{sign } P$ — знак (четность) перестановки P , вычисляемый по правилу: перестановка соседних индексов i_p и i_q дает знаковый фактор $(-1)^{1+\varepsilon(f_{i_p})\varepsilon(f_{i_q})}$. В этой алгебре введем градуировку g : $g(\Phi_k) = k$, превращающую алгебру $\mathcal{B}$ в градуированную алгебру: $g(\mathcal{B}_k) = k$. Рассмотрим линейный оператор d_C — дифференциал, кограничный оператор Шевалле: $\mathcal{B}_k \rightarrow \mathcal{B}_{k+1}$, $g(d_C) = 1$, действующий по правилу

$$\begin{aligned} d_C \Phi_k(f_1, \dots, f_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1+\varepsilon(f_i) \sum_{l=1}^{i-1} \varepsilon(f_l)} \times \\ \times f_i(\xi) *_{0} \Phi_k(\xi | f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_{k+1}) + \\ + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{j+1+\varepsilon(f_j)(\varepsilon(f_{i+1})+\dots+\varepsilon(f_{j-1}))} \times \\ \times \Phi_k(\xi | f_1, \dots, f_{i-1}, f_i *_{0} f_j, f_{i+1}, \dots, f_{j-1}, f_{j+1}, \dots, f_{k+1}), \\ d_C \mathcal{B}_0 = 0. \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что

$$d_C^2 = 0, \quad d_C(\Phi_k \circ \Phi_l) = (d_C \Phi_k) \circ \Phi_l + (-1)^{g(\Phi_k)} \Phi_k \circ d_C \Phi_l.$$

В терминах оператора Шевалле d_C уравнения (9) и (10) переписываются следующим образом:

$$d_C c_1(\xi \mid f_1, f_2, f_3) = 0, \\ c_{1\text{трив}}(\xi \mid f_1, f_2) = d_C t_1(\xi \mid f_1, f_2).$$

Можно сказать, что c_1 принадлежит второй группе когомологий Шевалле, а тривиальные деформации первого порядка обычной скобки Пуассона принадлежат нулевой когомологии Шевалле. Задача описания всех решений уравнения (9) может быть теперь сформулирована как задача вычисления второй группы когомологий Шевалле $H^2(d_C, \mathcal{B})$.

3. ДЕФОРМАЦИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Для решения уравнения (9) удобно воспользоваться импульсным представлением *-коммутиатора (любой билинейный функционал может быть представлен в таком виде)

$$c_1(\xi \mid f_1, f_2) = f_1(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi).$$

Свойства 1 и 2 дают

$$\varepsilon(c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}) = k + l \pmod{2}, \quad c_1^{[\beta]_l | [\alpha]_k} = -(-1)^{kl} c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}. \quad (11)$$

Уравнение (9) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} & f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma \left(f_2(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) \right) + \\ & + (-1)^{\varepsilon(f_2)\varepsilon(f_3)} \left(f_1(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi) - \\ & - \left(f_1(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi) + \\ & + f_1(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l (f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi)) + \\ & + (-1)^{\varepsilon(f_2)\varepsilon(f_3)} (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi)) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi) - \\ & - (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi)) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Преобразование подобия также будем записывать в импульсном представлении:

$$\begin{aligned}
 t_1(\xi | f) &= \sum_{k=0}^n t_1^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f(\xi), \quad \varepsilon(t_1^{[\alpha]k}) = k \pmod{2}, \\
 c_{1\text{трив}}(\xi | f_1, f_2) &= f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma \left(\sum_{k=0}^n t_1^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_2(\xi) \right) - \\
 &\quad - \sum_{k=0}^n t_1^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi)) + \\
 &\quad + \left(\sum_{k=0}^n t_1^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_1(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Уравнение (12) будем решать, изучая коэффициенты при разных степенях производных функций f_i . Далее будет предполагаться, что $n \geq 2$.

ЭТАП 0. Рассмотрим коэффициент в уравнении (12) перед $f_1(\xi)$ без производных:

$$\begin{aligned}
 &(-1)^{\varepsilon(f_2)\varepsilon(f_3)} \left(\sum_{l=0}^n c_1^{0|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi) - \\
 &\quad - \left(\sum_{l=0}^n c_1^{0|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi) + \\
 &\quad + \sum_{l=0}^n c_1^{0|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l (f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi)) = 0.
 \end{aligned}$$

Из условия (11) антисимметрии коэффициентов $c_1^{[\alpha]k|[\beta]l}(\xi)$ следует $c_1^{0|0}(\xi) = 0$.

0_а. Коэффициент перед $\partial_\alpha f_2(\xi)$:

$$\sum_{l=1}^n (-1)^l c_1^{0|[\beta]l}(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha [\partial_\beta]^l f_3(\xi) - c_1^{0|\alpha}(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi) = 0.$$

Из этих уравнений следует (см. приложение 1)

$$\begin{aligned}
 \lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{0|\beta}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{0|\alpha}(\xi) &= 0 \implies c_1^{0|\alpha}(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha c_{10}(\xi), \quad \varepsilon(c_{10}) = 0, \\
 \partial_\alpha c_1^{0|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) &= 0 \implies c_1^{0|[\beta]l}(\xi) = \text{const}, \quad l \geq 2.
 \end{aligned} \quad (14)$$

0_б. Коэффициент перед $\partial_\alpha \partial_\beta f_2(\xi)$, $f_3(\xi) = e^{\xi^\gamma p_\gamma}$, $p_\alpha \xi^\beta + \xi^\beta p_\alpha = p_\alpha p_\beta + p_\beta p_\alpha = 0$:

$$\lambda_\alpha c_1^{0|[\gamma]l-1|\alpha} [p_\gamma]^{l-1} p_\beta - \lambda_\beta c_1^{0|[\gamma]l-1|\beta} [p_\gamma]^{l-1} p_\alpha = 0, \quad l \geq 2. \quad (15)$$

Общее решение уравнения (15) есть (см. приложение 1)

$$c_1^{0|[\alpha]l} = 0, \quad 2 \leq l \leq n-1, \quad c_1^{0|[\alpha]n} = c_{1n} \varepsilon^{[\alpha]n}, \quad c_{1n} = \text{const}, \quad \varepsilon(c_{1n}) = n \pmod{2}.$$

Вклад в коэффициент $c_1^{0|[\alpha]k}$ от преобразования подобия дает только член, содержащий t_1^0 в выражении (13), этот вклад равен

$$c_{1\text{трив}}^{0|\alpha} = -\lambda_\alpha \partial_\alpha t_1^0(\xi), \quad c_{1\text{трив}}^{0|[\alpha]k} = 0, \quad k \geq 2.$$

Выполняя преобразование подобия с $t_1^0(\xi) = c_{10}(\xi)$, мы приходим к выражению для *-коммутиатора с $c_1^{0|[\alpha]k} = c_1^{[\alpha]k|0} = 0$, $k \leq n-1$, и

$$c_1^{0|[\alpha]n} = c_{1n} \varepsilon^{[\alpha]n}, \quad c_1^{[\alpha]n|0} = -c_{1n} \varepsilon^{[\alpha]n}, \quad c_{1n} = \text{const}, \quad \varepsilon(c_{1n}) = n \pmod{2}.$$

Заметим, что в случае рассматриваемых нами алгебр Грассмана над полями $\mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$ коэффициент c_{1n} может быть отличен от нуля только при четных n . Кроме того, если потребовать, чтобы функции $f(\xi) = \text{const}$ *-коммутировали с любой функцией, тогда $c_{1n} = 0$.

ЭТАП 1. Коэффициент в уравнении (12) перед $\partial_\gamma f_1(\xi)$:

$$\begin{aligned} & \lambda_\gamma f_2(\xi) \sum_{k,l=1}^n (-1)^k [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k \partial_\gamma c_1^{[\alpha]k|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) - \\ & - \sum_{l=1}^n \partial_\alpha c_1^{\gamma|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi) \lambda_\alpha \partial_\alpha f_3(\xi) + \\ & + (-1)^{\varepsilon(f_2)} \lambda_\alpha \partial_\alpha f_2(\xi) \sum_{l=1}^n \partial_\alpha c_1^{\gamma|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) - 2c_{1n} \varepsilon^{[\beta]n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) \lambda_\gamma \partial_\gamma f_3(\xi) + \\ & + (-1)^{\varepsilon(f_2)} 2\lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi) c_{1n} \varepsilon^{[\beta]n} [\partial_\beta]^n f_3(\xi) - \sum_{l=0}^n \left[c_1^{\gamma|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l (\partial_\alpha f_2(\xi) \lambda_\alpha \partial_\alpha f_3(\xi)) - \right. \\ & - c_1^{\gamma|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l \partial_\alpha f_2(\xi) \lambda_\alpha \partial_\alpha f_3(\xi) - \\ & \left. - (-1)^{l(1+\varepsilon(f_2))} c_1^{\gamma|[\beta]l}(\xi) \partial_\alpha f_2(\xi) \lambda_\alpha [\partial_\beta]^l \partial_\alpha f_3(\xi) \right] = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

1_a. Коэффициент перед $\partial_\alpha f_2(\xi)$, $[\partial_\gamma]^k f_3(\xi)$:

$$\lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{\beta|[\gamma]k}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{\alpha|[\gamma]k}(\xi) + \delta_{1k} \lambda_\gamma \partial_\gamma c_1^{\beta|\alpha}(\xi) + \delta_{kn} 2c_{1n} \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} \varepsilon^{[\gamma]n} = 0, \\ k = 1, \dots, n.$$

1_{a1}. При $k = 1$

$$\begin{aligned} & \lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{\beta|\gamma}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{\alpha|\gamma}(\xi) + \lambda_\gamma \partial_\gamma c_1^{\beta|\alpha}(\xi) = 0 \implies \\ & \implies c_1^{\alpha|\beta}(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{\beta}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{\alpha}(\xi) \end{aligned} \quad (17)$$

с некоторой функцией $c_1^\alpha(\xi)$ (см. приложение 1). Здесь было учтено также, что из свойств (11) антисимметрии коэффициентов $c_1^{[\alpha]k|[\beta]l}$ следует $c_1^{\alpha|\beta} = c_1^{\beta|\alpha}$.

1_{a2}. При $2 \leq k \leq n-1$

$$\lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{\beta|\gamma|k}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{\alpha|\gamma|k}(\xi) = 0 \quad \implies \quad c_1^{\alpha|\beta|k}(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{[\beta]k}(\xi) \quad (18)$$

с некоторыми функциями $c_1^{[\beta]k}(\xi)$ (см. приложение 1).

1_{an}. При $k = n$

$$\begin{aligned} \lambda_\alpha \partial_\alpha c_1^{\beta|\gamma|n}(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c_1^{\alpha|\gamma|n}(\xi) &= -\lambda_\alpha c_{1n} \delta_{\alpha\beta} \varepsilon^{[\gamma]n} \implies \\ \implies c_1^{\alpha|\beta|n}(\xi) &= \left(\lambda_\alpha \partial_\alpha c'_{1n}(\xi) - \frac{1}{2} \xi^\alpha c_{1n} \right) \varepsilon^{[\beta]n} \end{aligned} \quad (19)$$

с некоторой функцией $c'_{1n}(\xi)$. Выполним преобразование подобия с $t_1^0(\xi) = 0$, $t_1^{[\alpha]k}(\xi) = -c_1^{[\alpha]k}(\xi)$, $k = 1, \dots, n-1$, $t_1^{[\alpha]n} = -c'_{1n}(\xi) \varepsilon^{[\alpha]n}$. Оно не меняет коэффициентов $c^{0|[\alpha]k}$ и приводит $c_1^{\alpha|\beta|k}$ к виду

$$c_1^{\alpha|\beta|k}(\xi) = 0, \quad k \leq n-1, \quad c_1^{\alpha|\beta|n}(\xi) = -\frac{1}{2} \xi^\alpha c_{1n} \varepsilon^{[\beta]n}.$$

1_b. Коэффициенты перед $[\partial_\alpha]^k f_2(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi)$, $k, l \geq 2$:

$$\begin{aligned} \lambda_\gamma f_2(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k \partial_\gamma c_1^{[\alpha]k|[\beta]l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_3(\xi) - \\ - \delta_{k+l, n+2} (-1)^{(l-1)\varepsilon(f_2)} C_n^{k-1} \frac{1}{2} \xi^\gamma c_{1n} \varepsilon^{[\alpha]_{k-1}[\beta]_{l-1}} \lambda_\sigma \partial_\sigma [\partial_\alpha]^{k-1} f_2(\xi) \partial_\sigma [\partial_\beta]^{l-1} f_3(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Нетрудно видеть, что второе слагаемое в уравнении (20) тождественно равно нулю, так что из (20) следует

$$c_1^{[\alpha]k|[\beta]l}(\xi) = c_1^{[\alpha]k|[\beta]l} = \text{const} \quad \forall k, l \geq 2.$$

При $n = 2$ имеем $c_1^{[\alpha]2|[\beta]2} = c_1^{(2)} \varepsilon^{[\alpha]2} \varepsilon^{[\beta]2}$. Условие (11) антисимметрии коэффициентов дает $c_1^{(2)} = -c_1^{(2)} = 0$. Таким образом, при $n = 2$ получаем

$$\begin{aligned} [f_1, f_2]_{*1}(\xi) &= d_C t_1(\xi | f_1, f_2) + c_{12} \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]2} [\partial_\beta]^2 f_2(\xi) - \right. \\ &\quad \left. - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^2 \varepsilon^{[\alpha]2} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Пусть далее $n \geq 3$.

ЭТАП 2. Коэффициент в уравнении (12) перед $\partial_\alpha \partial_\beta f_1(\xi)$ и производными $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ порядков $k, l \geq 2$:

$$\begin{aligned} & k \left(\lambda_\alpha f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{k-1} c_1^{\beta[\gamma]_{k-1}|\delta]_l} - \lambda_\beta f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\beta [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{k-1} c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1}|\delta]_l} \right) [\partial_\delta]^l f_3(\xi) + \\ & + l f_2(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^k \left(c_1^{[\gamma]_k|\beta[\delta]_{l-1}} \lambda_\alpha \partial_\alpha [\partial_\gamma]^{l-1} f_3(\xi) - c_1^{[\gamma]_k|\alpha[\delta]_{l-1}} \lambda_\beta \partial_\beta [\partial_\gamma]^{l-1} f_3(\xi) \right) - \\ & - 2(-1)^{k+l} C_{k+l-2}^{k-1} \lambda_\sigma f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\sigma [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{k-1} c_1^{\alpha\beta|\gamma]_{k-1}[\delta]_{l-1}} \partial_\sigma [\partial_\delta]^{l-1} f_3(\xi) = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

$$\mathbf{2}_a. \quad f_2(\xi) = \xi^\gamma \xi^\sigma, \quad f_3(\xi) = e^{\xi^\delta p_\delta};$$

$$\begin{aligned} & \left(\delta_{\gamma\beta} \lambda_\beta c_1^{\alpha\sigma|\delta]_l} - \delta_{\gamma\alpha} \lambda_\alpha c_1^{\beta\sigma|\delta]_l} - \delta_{\sigma\beta} \lambda_\beta c_1^{\alpha\gamma|\delta]_l} + \delta_{\sigma\alpha} \lambda_\alpha c_1^{\beta\gamma|\delta]_l} \right) [p_\delta]^l = \\ & = l \left(\delta_{\alpha\delta} c_1^{\gamma\sigma|\beta[\delta]_{l-1}} - \delta_{\beta\delta} c_1^{\gamma\sigma|\alpha[\delta]_{l-1}} - \delta_{\gamma\delta} c_1^{\alpha\beta|\sigma[\delta]_{l-1}} + \delta_{\sigma\delta} c_1^{\alpha\beta|\gamma[\delta]_{l-1}} \right) \lambda_\delta p_\delta [p_\delta]^{l-1}. \end{aligned} \quad (23)$$

Общее решение уравнения (23) можно представить в виде (см. приложение 1)

$$c_1^{\alpha\beta|\delta]_l} [p_\delta]^l = (\delta_{\alpha\delta} a_1^{\beta[\delta]_{l-1}} - \delta_{\beta\delta} a_1^{\alpha[\delta]_{l-1}}) \lambda_\delta p_\delta [p_\delta]^{l-1}, \quad l \geq 2, \quad (24)$$

тензор $a_1^{\alpha_1 \dots \alpha_l} = a_1^{[\alpha]_l}$ полностью антисимметричен по своим индексам. Отметим, что согласно формуле (24) $c_1^{\alpha\beta|\delta]_n} = 0$.

Выполним преобразование подобия с $t_1^{[\alpha]_k}(\xi) = (2/k) a_1^{[\alpha]_k}$, $k \geq 2$. Согласно (13) имеем

$$c_{1\text{трив}}(\xi | f_1, f_2) = -f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \overleftarrow{\partial}_\beta \sum_{l=2} (\delta_{\alpha\delta} a_1^{\beta[\delta]_{l-1}} - \delta_{\beta\delta} a_1^{\alpha[\delta]_{l-1}}) \lambda_\delta \partial_\delta [\partial_\delta]^{l-1} f_2(\xi) + \dots,$$

где многоточие означает слагаемые, содержащие третью и более высокие производные функции $f_1(\xi)$. Это преобразование сокращает вклад в *-коммутатор слагаемых с $c_1^{\alpha\beta|\delta]_l}$, $2 \leq l < n$, т.е. можно считать, что

$$c_1^{\alpha\beta|\delta]_l} = 0, \quad 2 \leq l \leq n.$$

ЭТАП 3. Теперь уравнение (22) упрощается, поскольку третье слагаемое в левой части равно нулю (включая случаи $k+l \geq n+2$):

$$\begin{aligned} & k \left(\lambda_\alpha f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{k-1} c_1^{\beta[\gamma]_{k-1}|\delta]_l} - \lambda_\beta f_2(\xi) \overleftarrow{\partial}_\beta [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{k-1} c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1}|\delta]_l} \right) [\partial_\delta]^l f_3(\xi) + \\ & + l f_2(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^k \left(c_1^{[\gamma]_k|\beta[\delta]_{l-1}} \lambda_\alpha \partial_\alpha [\partial_\delta]^{l-1} f_3(\xi) - \right. \\ & \left. - c_1^{[\gamma]_k|\alpha[\delta]_{l-1}} \lambda_\beta \partial_\beta [\partial_\delta]^{l-1} f_3(\xi) \right) = 0, \quad k, l \geq 2. \end{aligned} \quad (25)$$

$\mathbf{3}_a$. Коэффициент перед $[\partial_\gamma]^n f_2(\xi)$, $f_3(\xi) = e^{\xi^\delta p_\delta}$. Вводя обозначение $c_1^{[\alpha]_k|\beta]_n} = c_1^{[\alpha]_k} \varepsilon^{[\beta]_n}$, $c_1^{[\alpha]_n|\beta]_l} = -(-1)^{ln} c_1^{[\beta]_l} \varepsilon^{[\alpha]_n}$ и используя соотношение

$$\overleftarrow{\partial}_\alpha [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^{n-1} \varepsilon^{\beta[\gamma]_{n-1}} = \frac{1}{n} \delta_{\alpha\beta} [\overleftarrow{\partial}_\gamma]^n \varepsilon^{[\gamma]_n},$$

получаем (с учетом того, что первое слагаемое в уравнении (25) тождественно равно нулю)

$$c_1^{\alpha[\delta]_{l-1}} \lambda_\beta p_\beta [p_\delta]^{l-1} = c_1^{\beta[\delta]_{l-1}} \lambda_\alpha p_\alpha [p_\delta]^{l-1}. \quad (26)$$

Из уравнения (26) следует (см. приложение 1) $c_1^{[\alpha]_k} = 0$, $k < n$, т.е.

$$c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_n} = c_1^{[\alpha]_n | [\beta]_l} = 0, \quad k, l < n.$$

При $k = l = n$ имеем

$$c_1^{[\alpha]_n | [\beta]_n} = \varepsilon^{[\alpha]_n} c_1^{(n)} \varepsilon^{[\beta]_n}, \quad \varepsilon(c_1^{(n)}) = 0, \quad c_1^{(n)} = -(-1)^n c_1^{(n)}. \quad (27)$$

Последнее равенство в (27) следует из условия (11) антисимметрии коэффициентов, что означает, что коэффициенты $c_1^{(n)}$ могут быть отличны от нуля только при нечетных n .

Для последующего полезно заметить, что оператор $[\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} c_1^{(n)} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n$ может быть также представлен в форме ($n = 2p + 1$)

$$[\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} c_1^{(n)} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n = c_1'^{(n)} (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^n, \quad c_1'^{(n)} = (-1)^p n! \lambda_1 \dots \lambda_n c_1^{(n)}. \quad (28)$$

3б. $k = l = 3$, $f_2(\xi) = \xi^{\alpha_3} \xi^{\alpha_2} \xi^{\alpha_1}$, $f_3(\xi) = \xi^{\beta_1} \xi^{\beta_2} \xi^{\beta_3}$:

$$\begin{aligned} & \delta_{\alpha\alpha_1} \lambda_\alpha c_1^{\beta\alpha_2\alpha_3 | \beta_1\beta_2\beta_3} + \delta_{\alpha\alpha_2} \lambda_\alpha c_1^{\beta\alpha_3\alpha_1 | \beta_1\beta_2\beta_3} + \delta_{\alpha\alpha_3} \lambda_\alpha c_1^{\beta\alpha_1\alpha_2 | \beta_1\beta_2\beta_3} - \\ & - \delta_{\beta\alpha_1} \lambda_\beta c_1^{\alpha\alpha_2\alpha_3 | \beta_1\beta_2\beta_3} - \delta_{\beta\alpha_2} \lambda_\beta c_1^{\alpha\alpha_3\alpha_1 | \beta_1\beta_2\beta_3} - \delta_{\beta\alpha_3} \lambda_\beta c_1^{\alpha\alpha_1\alpha_2 | \beta_1\beta_2\beta_3} + \\ & + \delta_{\alpha\beta_1} \lambda_\alpha c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \beta\beta_2\beta_3} + \delta_{\alpha\beta_2} \lambda_\alpha c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \beta\beta_3\beta_1} + \delta_{\alpha\beta_3} \lambda_\alpha c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \beta\beta_1\beta_2} - \\ & - \delta_{\beta\beta_1} \lambda_\beta c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \alpha\beta_2\beta_3} - \delta_{\beta\beta_2} \lambda_\beta c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \alpha\beta_3\beta_1} - \delta_{\beta\beta_3} \lambda_\beta c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \alpha\beta_1\beta_2} = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Общее решение уравнения (29) есть (см. приложение 1)

$$\begin{aligned} c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 | \beta_1\beta_2\beta_3} = & - \frac{\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \lambda_{\alpha_3} \Sigma}{n(n-1)(n-2)} (\delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\alpha_3\beta_3} + \delta_{\alpha_1\beta_3} \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta_{\alpha_3\beta_2} + \\ & + \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\alpha_2\beta_3} \delta_{\alpha_3\beta_1} - \delta_{\alpha_1\beta_2} \delta_{\alpha_2\beta_1} \delta_{\alpha_3\beta_3} - \delta_{\alpha_1\beta_3} \delta_{\alpha_2\beta_2} \delta_{\alpha_3\beta_1} - \delta_{\alpha_1\beta_1} \delta_{\alpha_2\beta_3} \delta_{\alpha_3\beta_2}) \end{aligned} \quad (30)$$

или

$$[\overleftarrow{\partial}_\alpha]^3 c_1^{[\alpha]_3 | [\beta]_3} [\partial_\beta]^3 = \frac{6\Sigma}{n(n-1)(n-2)} (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^3 \quad (31)$$

(ср. с выражением (28)).

3в. Рассмотрим, наконец, оставшийся общий случай уравнения (25). Выберем $f_2(\xi) = e^{q_\gamma \xi^\gamma}$, $f_3(\xi) = e^{\xi^\delta p_\delta}$, $q_\alpha q^\beta + q^\beta q_\alpha = p_\alpha q_\beta + p_\beta q_\alpha = q_\alpha \xi^\beta + \xi^\beta q_\alpha = 0$:

$$\begin{aligned} & k \left(\lambda_\alpha q_\alpha [q_\gamma]^{k-1} c_1^{\beta[\gamma]_{k-1} | [\delta]_l} - \lambda_\beta q_\beta [q_\gamma]^{k-1} c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1} | [\delta]_l} \right) [p_\delta]^l + \\ & + l [q_\gamma]^k \left(c_1^{[\gamma]_k | \beta[\delta]_{l-1}} \lambda_\alpha p_\alpha [p_\delta]^{l-1} - c_1^{[\gamma]_k | \alpha[\delta]_{l-1}} \lambda_\beta p_\beta [p_\delta]^{l-1} \right) = 0, \end{aligned} \quad (32)$$

$$3 \leq k, l < n, \quad k + l \geq 7.$$

Из уравнения (32) следует (см. приложение 1)

$$\begin{aligned} c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l} &= 0, \quad k \neq l, \quad k + l \neq n, \\ c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_{n-k}} &= c_1^{(k)} \varepsilon^{[\alpha]_k | [\beta]_{n-k}}, \quad k, n - k \geq 4, \quad 2k \neq n, \\ \varepsilon(c_1^{(k)}) &= n \pmod{2}, \quad c_1^{(k)} = -c_1^{(n-k)}. \end{aligned} \quad (33)$$

Так как $c_1^{(k)}$ являются числами, они могут быть отличны от нуля только при четных n .

ЭТАП 4. Коэффициент в уравнении (12) перед $\partial_{\alpha_1} \partial_{\alpha_2} \partial_{\alpha_3} f_1(\xi)$ и производными $f_2(\xi)$ и $f_3(\xi)$ порядков ≥ 3 . В уравнении (12) первые три слагаемых равны нулю. Остальные три слагаемых приводят к уравнению следующей общей структуры:

$$c_1^{[\beta]_3 | [\gamma]_{k+l-2}} [\partial]^k f_2 [\partial]^l f_3 + c_1^{[\beta]_k | [\gamma]_{l+1}} [\partial]^k f_2 [\partial]^l f_3 + c_1^{[\beta]_{k+1} | [\gamma]_l} [\partial]^k f_2 [\partial]^l f_3 = 0. \quad (34)$$

4а. $k = l - 1$, $4 \leq l < n$, $2l \neq n$, $f_2(\xi) = e^{q_\beta \xi^\beta}$. В этом случае первые два слагаемых в уравнении (34) равны нулю, и оно принимает вид

$$(\delta_{\alpha_1 \beta} c_1^{\alpha_2 \alpha_3 [\beta]_{l-2} | [\gamma]_l} + \delta_{\alpha_2 \beta} c_1^{\alpha_3 \alpha_1 [\beta]_{l-2} | [\gamma]_l} + \delta_{\alpha_3 \beta} c_1^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{l-2} | [\gamma]_l}) \lambda_\beta q_\beta [q_\beta]^{l-2} = 0. \quad (35)$$

Общее решение уравнения есть (см. приложение 1)

$$c_1^{[\beta]_l | [\gamma]_l} = 0.$$

Таким образом, при нечетных n определена структура всех коэффициентов $c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_l}$.

4б. $n = 2m$ – четное, $k = m - 1$, $l = m$, $f_2(\xi) = e^{q_\beta \xi^\beta}$, $f_3(\xi) = e^{\xi^\gamma p_\gamma}$. Уравнение (34) имеет вид (с учетом уже частично установленной структуры коэффициентов $c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_{2m-k}}$, $k \neq m$, см. формулы (33))

$$\begin{aligned} 3C_{2m-3}^{m-2} c_1^{(3)} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 [\beta]_{m-2} | [\gamma]_{m-1}} \lambda_\delta q_\delta [q_\beta]^{m-2} p_\delta [p_\gamma]^{m-1} + \\ + (-1)^m C_{m+1}^2 c_1^{(m-1)} (\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{m-1} | [\gamma]_{m-1}} \delta_{\alpha_3 \gamma} + \text{цикл}(1, 2, 3)) [q_\beta]^{m-1} \lambda_\gamma p_\gamma [p_\gamma]^{m-1} - \\ - C_m^2 (c_1^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{m-2} | [\gamma]_m} \delta_{\alpha_3 \beta} + \text{цикл}(1, 2, 3)) \lambda_\beta q_\beta [q_\beta]^{m-2} [p_\gamma]^m = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

Из уравнения (36) вытекает (см. приложение 1) соотношение

$$c_1^{[\alpha]_m | [\beta]_m} = c_1^{(m)} \varepsilon^{[\alpha]_m | [\beta]_m}.$$

Но тогда (ср. с (33))

$$c_1^{(m)} = -c_1^{(m)} = 0,$$

т.е.

$$c_1^{[\alpha]_m | [\beta]_m} = 0.$$

4_в. Коэффициент в уравнении (34) перед $[\partial]^k f_2$, $[\partial]^l f_3$, $k + l = n - 4$. В этом случае число индексов у всех коэффициентов $c_1^{[\alpha]_{k_1} | [\beta]_{k_2}}$ в уравнении (12) равно n ($k_1 + k_2 = n$). Все эти коэффициенты имеют структуру

$$c_1^{[\alpha]_k | [\beta]_{n-k}} = c_1^{(k)} \varepsilon[\alpha]_k [\beta]_{n-k}, \quad c_1^{(n-k)} = -c_1^{(k)}, \quad c_1^{(m)} = 0.$$

Уравнение (34) принимает вид

$$\begin{aligned} & 3C_{n-3}^{k-1} c_1^{(3)} \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3} [\beta]_{k-1} [\gamma]_{l-1} \lambda_\delta q_\delta [q_\beta]^{k-1} p_\delta [p_\gamma]^{l-1} - \\ & - (-1)^k C_{n-k}^2 c_1^{(k)} (\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2} [\beta]_k [\gamma]_{l-1} \delta_{\alpha_3 \gamma} + \text{цикл}(1, 2, 3)) [q_\beta]^k \lambda_\gamma p_\gamma [p_\gamma]^{l-1} - \\ & - C_{n-l}^2 c_1^{(l)} (\varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2} [\beta]_{k-1} [\gamma]_1 \delta_{\alpha_3 \beta} + \text{цикл}(1, 2, 3)) \lambda_\beta q_\beta [q_\beta]^{k-1} [p_\gamma]^l = 0, \end{aligned} \quad (37)$$

откуда имеем (см. приложение 1)

$$c_1^{(k)} = 0 \quad \forall k.$$

Итак, мы установили, что при $n \geq 3$ решение уравнения (12) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} [f_1, f_2]_{*1}(\xi) &= \sigma_1 f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^3 f_2(\xi) + c_1^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) + \\ &+ c_{1n} \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right) + \\ &+ d_C t_1(\xi | f_1, f_2), \end{aligned} \quad (38)$$

причем в силу (28) можно считать, что $c_1^{(3)} = 0$. Прямой подстановкой выражения (38) в уравнение (12) убеждаемся, что оно удовлетворяется без дальнейших ограничений на коэффициенты.

Проверим, что первые три слагаемых в правой части выражения (38) не могут быть представлены в виде $c_{\text{трив}} = d_C t$.

Итак, мы должны решить уравнение

$$\begin{aligned} & \sigma f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^3 f_2(\xi) + c^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) + \\ &+ c_n \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right) = \\ &= d_C t(\xi | f_1, f_2). \end{aligned} \quad (39)$$

Мы, однако, сразу решим более общее уравнение

$$\text{левая часть (39)} = T_\eta^{-1} (d_C t(\xi | T_\eta f_1, T_\eta f_2)), \quad (40)$$

где T_η – оператор замены образующих (см. (6)). Уравнение (40) можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 & \sigma f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^3 f_2(\xi) + c^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) + \\
 & + c_n \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) - \right. \\
 & \left. - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right) = \\
 & = \sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} f_2(\xi)) - \\
 & - f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k f_2(\xi) \right) - \\
 & - \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k f_1(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} f_2(\xi). \quad (41)
 \end{aligned}$$

Напомним, что можно считать $c_1^{(3)} = 0$, что мы далее и примем.

Прежде всего, заметим, что в левой части уравнения (41) старший порядок производных, действующих на обе функции, равен $2n$, в то время как в правой части старший порядок равен $n + 2$. Равенство $2n = n + 2$ не может быть выполнено при $n \geq 3$, откуда вытекает $c^{(n)} = 0$, $n \geq 2$. Далее, в левой части уравнения (41) слагаемое, содержащее $f_1(\xi)$ без производных, содержит также $[\partial_\alpha]^n f_2(\xi)$. В правой же части этого уравнения слагаемое, содержащее $f_1(\xi)$ без производных, содержит только первую производную функции $f_2(\xi)$, откуда следует $c_n = 0$, $n \geq 2$. В результате уравнение (41) при $n \geq 3$ принимает вид

$$\begin{aligned}
 \sigma f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha)^3 f_2(\xi) & = \sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} f_2(\xi)) - \\
 & - f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k f_2(\xi) \right) - \\
 & - \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\zeta(\xi)) [\partial_{\zeta^\alpha}]^k f_1(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_{\zeta^\gamma} \lambda_\gamma \partial_{\zeta^\gamma} f_2(\xi), \quad (42)
 \end{aligned}$$

или в эквивалентной форме

$$\begin{aligned}
 \sigma f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_{\eta^\alpha} \lambda_\alpha \partial_{\eta^\alpha})^3 f_2(\xi) & = \sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi)) - \\
 & - f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_2(\xi) \right) - \\
 & - \left(\sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_1(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi). \quad (43)
 \end{aligned}$$

ЭТАП 0'. Коэффициент в уравнении (43) перед $f_1(\xi)$ без производных:

$$\partial_\gamma t^0(\xi) \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^0(\xi) = t_0 = \text{const}.$$

ЭТАП 1'. Коэффициент в уравнении (43) перед $\partial_\alpha f_1(\xi)$, $[\partial_\beta]^k f_2(\xi)$, $k \geq 4$:

$$\partial_\alpha t^{[\beta]k}(\xi) = 0 \quad \Longrightarrow \quad t^{[\beta]k}(\xi) = t^{[\beta]k} = \text{const}, \quad k \geq 4. \quad (44)$$

ЭТАП 2'. Коэффициент в уравнении (43) перед $\partial_\alpha \partial_\beta f_1(\xi)$, $f_2(\xi) = e^{\xi^\beta p_\beta}$:

$$(t^{\alpha[\gamma]k-1} \delta_{\beta\gamma} - t^{\beta[\gamma]k} \delta_{\alpha\gamma}) \lambda_\gamma p_\gamma [p_\gamma]^k = 0, \quad k \geq 4. \quad (45)$$

Общее решение уравнения (45) есть (см. приложение 1)

$$t^{[\alpha]k} = 0, \quad 4 \leq k \leq n-1, \quad t^{[\alpha]n} = t_n \varepsilon^{[\alpha]n}. \quad (46)$$

Уравнение (43) приобретает вид

$$\begin{aligned} \sigma f_1(\xi) (\overleftarrow{\partial}_{\eta^\alpha} \lambda_\alpha \partial_{\eta^\alpha})^3 f_2(\xi) &= \sum_{k=0}^3 t^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k (f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi)) - \\ &- f_1(\xi) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma \left(\sum_{k=0}^3 t^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_2(\xi) \right) - \\ &- \left(\sum_{k=0}^3 t^{[\alpha]k}(\xi) [\partial_\alpha]^k f_1(\xi) \right) \overleftarrow{\partial}_\gamma \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi). \end{aligned} \quad (47)$$

ЭТАП 3'. Коэффициент в уравнении (47) перед $[\partial_\alpha]^3 f_1(\xi)$, $[\partial_\beta]^3 f_2(\xi)$:

$$\begin{aligned} \sigma A_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}^{[\alpha]3} \lambda_{\gamma_1} \lambda_{\gamma_2} \lambda_{\gamma_3} A_{\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3}^{[\beta]3} &= 0 \quad \Longrightarrow \quad \sigma = 0, \\ A_{[\gamma]3}^{[\alpha]3} &= \frac{1}{6} [\partial_\gamma]^3 [\xi^\alpha]^3. \end{aligned}$$

Итак, представления (39), (40) возможны только в случае, если $\sigma = c^{(n)} = c_n = 0$, т.е., в частности, вторая группа когомологий Шевалле описывается параметрами σ , $c^{(n)}$, c_n . Для полноты приведем общее решение уравнения

$$d_C t(\xi \mid f_1, f_2) = 0.$$

Оно имеет вид

$$t(\xi \mid f) = t_0 \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\alpha \partial_\alpha \right) f(\xi) + t(\xi) \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha f(\xi) + t_n \varepsilon^{[\alpha]n} [\partial_\alpha]^n f(\xi).$$

Резюмируя, можно сказать, что общее решение уравнения (12) при $n \geq 3$ имеет вид (38). Предполагая, что соответствующее преобразование подобия, устраняющее слагаемые вида $d_C t_1(\xi | f_1, f_2)$ из выражения для *-коммутиатора, выполнено, представим *-коммутиатор при $n \geq 3$ в форме

$$\begin{aligned} C(\xi | f_1, f_2) &= [f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa_1\lambda)}(\xi) + \hbar^2 c_1^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) + \\ &+ \hbar^2 c_{1n} \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]_n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) - \right. \\ &- f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]_n} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \Big) + \\ &+ \hbar^4 c_2(\xi | f_1, f_2) + O(\hbar^6), \\ c_2(\xi | f_1, f_2) &= f_1(\xi) \sum_{k,l=0}^n [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^k c_2^{[\alpha]_k | [\beta]_l}(\xi) [\partial_\beta]^l f_2(\xi), \\ \varepsilon(c_2^{[\alpha]_k | [\beta]_l}) &= k + l \pmod{2}, \quad c_2^{[\beta]_l | [\alpha]_k} = -(-1)^{kl} c_2^{[\alpha]_k | [\beta]_l}, \end{aligned} \quad (48)$$

где скобка Мойяла $[f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa_1\lambda)}(\xi)$, $\kappa_1 = (6\sigma_1)^{1/2}$, определена следующим образом:

$$[f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa_1\lambda)}(\xi) = \frac{1}{\hbar\kappa_1} f_1(\xi) \operatorname{sh}(\hbar\kappa_1 \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha) f_2(\xi). \quad (49)$$

Скобка Мойяла (49) удовлетворяет тождеству Якоби (2), (3). Действительно, рассмотрим ассоциативное *-произведение Вейля

$$f_1 *_{W(\hbar\kappa\lambda)} f_2(\xi) = f_1(\xi) e^{\hbar\kappa \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha} f_2(\xi)$$

для произвольного комплексного κ . Нетрудно проверить, что оно обладает свойством

$$f_2 *_{W(\hbar\kappa\lambda)} f_1(\xi) = (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_2)} f_1(\xi) e^{-\hbar\kappa \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha} f_2(\xi).$$

Поэтому справедливо представление

$$2f_1(\xi) \operatorname{sh}(\hbar\kappa \overleftarrow{\partial}_\alpha \lambda_\alpha \partial_\alpha) f_2(\xi) = f_1 *_{W(\hbar\kappa\lambda)} f_2(\xi) - (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_2)} f_2 *_{W(\hbar\kappa\lambda)} f_1(\xi),$$

откуда и следует, что скобка Мойяла $[f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa\lambda)}(\xi)$ удовлетворяет тождеству Якоби.

4. ДЕФОРМАЦИИ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Для последующего полезно отметить, что в процессе построения общего решения уравнения (12) были использованы только уравнения для коэффициентов перед $[\partial_\alpha]^k f_1(\xi)$, $k = 0, 1, 2$, а при $n \geq 4$ также перед $[\partial_\alpha]^3 f_1(\xi) [\partial_\alpha]^k f_2(\xi) [\partial_\alpha]^l f_3(\xi)$, $k, l < n$.

Подставим представление (48) в тождество Якоби (2), которое будет удовлетворяться в нулевом и первом порядках по $\hbar^2$. В порядке $\hbar^4$ имеем

$$\begin{aligned} (-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} d_C c_2(\xi | f_1, f_2, f_3) = \\ = 2c_{1n}\sigma_1 \left((-1)^{\varepsilon(f_1)\varepsilon(f_3)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]n} f_2(\xi) (\overleftarrow{\partial}_\beta \lambda_\beta \partial_\beta)^3 f_3(\xi) + \text{цикл}(1, 2, 3) \right). \end{aligned} \quad (50)$$

При выводе уравнения (50) учтено, что $c_{1n}c_1^{(n)} = 0 \quad \forall n$, поскольку при четном n равны нулю коэффициенты $c_1^{(n)}$, а при нечетном n равны нулю коэффициенты c_{1n} .

Пусть $n \geq 3$. Рассмотрим уравнения, возникающие из равенства нулю коэффициентов в уравнении (50) перед $[\partial_\alpha]^k f_1(\xi)$, $k = 0, 1, 2$, а также перед $[\partial_\alpha]^3 f_1(\xi) [\partial_\alpha]^k f_2(\xi) \times [\partial_\alpha]^l f_3(\xi)$, $k, l < n$. Правая часть (50) не дает вклада в эти уравнения, т.е. они будут совпадать с соответствующими уравнениями, возникающими при решении однородного уравнения (12). Как отмечалось, этого достаточно для полного определения всех коэффициентов функционала $c_2(\xi | f_1, f_2)$. При этом, очевидно, будет выполняться равенство

$$d_C c_2(\xi | f_1, f_2, f_3) = 0.$$

Тогда из уравнения (50) следует

$$c_{1n}\sigma_1 = 0 \quad \implies \quad \text{либо } c_{1n} = 0, \quad \text{либо } \sigma_1 = 0.$$

Применяя далее метод индукции, мы получаем, что с точностью до преобразования подобия деформации невырожденной скобки Пуассона на алгебре Грассмана с $n \geq 3$, удовлетворяющие условиям, сформулированным в разделе 2, даются следующими выражениями:

$$1) \quad n = 2k, \quad k \geq 2,$$

$$[f_1, f_2]_{*(1)}(\xi) = [f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa\lambda)}(\xi), \quad (51)$$

$$\begin{aligned} [f_1, f_2]_{*(2)}(\xi) = [f_1, f_2]_{*0}(\xi) + \hbar^2 c_n \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi) - \right. \\ \left. - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]n} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right); \end{aligned} \quad (52)$$

$$2) \quad n = 2k + 1, \quad k \geq 1,$$

$$[f_1, f_2]_{*(1)}(\xi) = [f_1, f_2]_{M(\hbar\kappa\lambda)}(\xi) + \hbar^2 c^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]n} \varepsilon^{[\beta]n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi), \quad (53)$$

$$[f_1, f_2]_{*(2)}(\xi) = [f_1, f_2]_{*0}(\xi) + \hbar^2 c^{(n)} f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^n \varepsilon^{[\alpha]n} \varepsilon^{[\beta]n} [\partial_\beta]^n f_2(\xi). \quad (54)$$

Конечно, $*$ -коммутатор (54) является предельным случаем (при $\kappa \rightarrow 0$) $*$ -коммутатора (53). Коэффициенты κ , c_n , $c^{(n)}$ могут зависеть от $\hbar$. Если потребовать, чтобы функции $f(\xi) = \text{const}$ $*$ -коммутировали с любой функцией, тогда $c_n = 0$.

Можно считать, что в выражениях (51)–(53) $\kappa = \lambda_\alpha = 1$, $c_n = 0$, 1 в случае алгебры Грассмана над $\mathbb{C}$ и $\kappa = 1, i$, $\lambda_\alpha = \pm 1$, $c_n = 0, \pm 1$ в случае алгебры Грассмана над $\mathbb{R}$.

Кроме того, в выражении (54) можно считать $c^{(n)} = 0, 1$ в случае алгебры Грассмана над $\mathbb{C}$ и $c^{(n)} = 0, \pm 1$ в случае алгебры Грассмана над $\mathbb{R}$.

Действительно, выполним преобразование подобия *-коммутирующих (51)–(54) с оператором $T = T^{(\mu)}$,

$$T^{(\mu)} f(\xi) = \frac{1}{\mu^2} f(\mu\xi), \quad \mu \in K. \quad (55)$$

Преобразованные *-коммутирующие сохраняют свою структуру (51)–(54) (в частности, нулевое по $\hbar^2$ приближение не меняется), но с измененными параметрами:

$$\kappa \rightarrow \kappa\mu^2, \quad c^{(n)} \rightarrow c^{(n)}\mu^{2(n-1)}, \quad c_n \rightarrow c_n\mu^{n-2}. \quad (56)$$

В случае алгебры Грассмана $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ можно выбрать μ из условия $\kappa\mu^2 = 1$ в формулах (51), (53) и $c_n\mu^{n-2} = 1$ при $c_n \neq 0$ в формуле (52). В случае алгебры Грассмана $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$ условию $\kappa\mu^2 = 1$ в формулах (51), (53) можно удовлетворить при $\sigma_1 > 0$. Если же $\sigma_1 < 0$, тогда коэффициент κ чисто мнимый, и можно выбрать μ из условия $\kappa\mu^2 = i$. Отметим, что в этом случае скобка Мойла не может быть представлена как коммутатор в алгебре с ассоциативным произведением. Коэффициент c_n в формуле (52) можно нормировать на $+1, 0, -1$ при $c_n > 0$, $c_n = 0$, $c_n < 0$, соответственно. Если в формуле (53) коэффициент κ фиксирован, тогда у нас уже нет возможности преобразовывать коэффициент $c^{(n)}$ и он остается произвольным. Однако в формуле (54) коэффициент $c^{(n)}$ может быть нормирован на $0, 1$ при $c^{(n)} = 0$, $c^{(n)} \neq 0$ в случае алгебры Грассмана $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ и на $+1, 0, -1$ при $c^{(n)} > 0$, $c^{(n)} = 0$, $c^{(n)} < 0$ в случае алгебры Грассмана $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$.

Рассмотрим оставшиеся случаи $n = 1$ и $n = 2$.

1. В случае $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} f &= a + b\xi, \\ [f_1, f_2]_{*0}(\xi) &= \lambda f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} \partial f_1(\xi) = \lambda b_1 b_2, \quad \lambda = \pm 1, \\ [f_1, f_2]_*(\xi) &= \lambda f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} \partial f_1(\xi) + \\ &+ \hbar^2 c_1(\xi) (-1)^{\varepsilon(f_1)} (f_1(\xi) \partial f_2(\xi) + f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} f_2(\xi)) + \hbar^2 c_2(\xi) f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} \partial f_1(\xi), \\ \varepsilon(c_1(\xi)) &= 1 \Rightarrow c_1(\xi) = c_1 \xi, \quad \varepsilon(c_2(\xi)) = 0 \Rightarrow c_2(\xi) = c_2, \quad c_1, c_2 = \text{const}. \end{aligned}$$

Делая преобразование подобия, отвечающее замене $\xi \rightarrow \xi' = (1 + \hbar^2 c_2 / \lambda)^{-1/2} \xi$, получаем следующее выражение для *-коммутирующего:

$$\begin{aligned} [f_1, f_2]_*(\xi) &= \lambda f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} \partial f_1(\xi) + \hbar^2 c_1 \xi (-1)^{\varepsilon(f_1)} (f_1(\xi) \partial f_2(\xi) + f_1(\xi) \overleftarrow{\partial} f_2(\xi)) = \\ &= \lambda b_1 b_2 + \hbar^2 c_1 \xi (a_1 b_2 - b_1 a_2). \end{aligned}$$

Выберем $f_1(\xi) = a_1$, $\varepsilon(f_1) = 0$, $f_{2,3}(\xi) = b_{2,3} \xi$, $\varepsilon(f_{2,3}) = 1$ и рассмотрим тождество Якоби (2) для этих функций:

$$0 = [f_1, [f_2, f_3]_*]_* + [f_2, [f_3, f_1]_*]_* - [f_3, [f_1, f_2]_*]_* = -2\hbar^2 \lambda c_1 a_1 b_2 b_3 \implies c_1 = 0.$$

Таким образом, в случае алгебры Грассмана с одной образующей нетривиальные деформации невырожденной скобки Пуассона отсутствуют.

2. Случай $n = 2$. Используя предыдущие результаты (см., в частности, (50) и (21)), получаем, что с точностью до преобразований подобия возможные деформации невырожденной скобки Пуассона на алгебре Грассмана с двумя образующими имеют вид

$$[f_1, f_2]_*(\xi) = [f_1, f_2]_{*0}(\xi) + \\ + \hbar^2 c_2 \left(f_1(\xi) \left(1 - \frac{1}{2} \overleftarrow{\partial}_\alpha \xi^\alpha \right) \varepsilon^{[\beta]2} [\partial_\beta]^2 f_2(\xi) - f_1(\xi) [\overleftarrow{\partial}_\alpha]^2 \varepsilon^{[\alpha]2} \left(1 - \frac{1}{2} \xi^\beta \partial_\beta \right) f_2(\xi) \right)$$

(c_2 может зависеть от $\hbar$), т.е. даются выражением (52). Заметим, что формально формулы (51)–(54) справедливы при всех n , поскольку скобка Моеля при $n = 1, 2$ переходит в скобку Пуассона, а вторые слагаемые в правых частях формул (53) и (54) при $n = 1$ пропорциональны скобке Пуассона.

Итак, показано, что с помощью преобразований подобия произвольный $*$ -коммутатор (удовлетворяющий условиям, сформулированным в разделе 2) может быть приведен к виду (51)–(54). Возможно ли с помощью преобразований подобия свести выражения (51)–(54) к скобке Пуассона? Ответ на этот вопрос отрицательный. Достаточно рассмотреть лишь случай алгебр Грассмана $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$. Запишем оператор T , генерирующий преобразование подобия, в виде

$$T = T'(1 + \hbar^2 t_1 + O(\hbar^4)), \quad T' = T|_{\hbar=0}$$

(T' – неособенный оператор). В силу граничного условия (4) преобразование подобия, генерируемое оператором T' , должно сохранять нулевое по $\hbar^2$ приближение $*$ -коммутатора скобкой Пуассона (быть может, с другой симплектической метрикой):

$$T'^{-1}([T' f_1, T' f_2]_{*0})(\xi) = [f_1, f_2]_{*0}(\xi) = T_{\eta'}^{-1}([T_{\eta'} f_1, T_{\eta'} f_2]_{*0})(\xi),$$

где $T_{\eta'}$ – оператор замены образующих, приводящей скобку Пуассона $[\cdot, \cdot]_{*0'}$ к каноническому виду $[\cdot, \cdot]_{*0}$. Оператор $T'' = T_{\eta'}^{-1} T'$ удовлетворяет уравнению

$$T''[f_1, f_2]_{*0}(\xi) = [T'' f_1, T'' f_2]_{*0}(\xi). \quad (57)$$

Общий вид таких операторов найден в приложении 2:

$$T'' = T^{(\mu)} T_{\eta}^{(c)} T^{(n)}, \\ T_{\eta}^{(c)} f(\xi) = f(\eta(\xi)), \quad T^{(n)} = (1 + t_n \varepsilon^{[\alpha]n} [\partial_\alpha]^n), \quad t_n = \text{const}, \quad \varepsilon(t_n) = n \pmod{2},$$

$\varepsilon(\eta^\alpha) = 1$, замена $\xi^\alpha \rightarrow \eta^\alpha(\xi)$ каноническая, оператор $T^{(\mu)}$ определен формулой (55). Оператор T' имеет вид

$$T' = T^{(\mu)} T_{\zeta} T^{(n)},$$

где T_{ζ} – оператор некоторой замены образующих.

Нетрудно проверить, что преобразование подобия, генерируемое оператором $T^{(n)}$, оставляет инвариантным не только $*_0$ -коммутатор (скобку Пуассона), но и полные $*$ -коммутаторы, задаваемые формулами (51)–(54). Преобразование подобия, генерируемое оператором $T^{(\mu)}$, приводит только к умножению коэффициентов в формулах (51)–(54) на ненулевые множители (см. (56)). Таким образом, чтобы существовала возможность сведения $*$ -коммутатора к $*_0$ -коммутатору в первом порядке по $\hbar^2$, должно выполняться уравнение (40), которое, как показано, не имеет решений при ненулевых коэффициентах κ , $c^{(n)}$, c_n .

Итак, показано, что справедлива

ТЕОРЕМА. *С точностью до преобразования подобия деформации невырожденной скобки Пуассона на алгебре Грассмана, удовлетворяющие условиям, сформулированным в разделе 2, даются выражениями (51)–(54), причем $\kappa = 1$, $c_n = 0, 1$ в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ и $\kappa = 1, i$, $c_n = 0, \pm 1$ в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$, в формуле (53) $c^{(n)}$ – произвольное комплексное число в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ и произвольное действительное число в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$, а в формуле (54) $c^{(n)} = 0, 1$ в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{C}}$ и $c^{(n)} = 0, \pm 1$ в случае алгебры $\mathcal{G}_{\mathbb{R}}$.*

Наконец, отметим, что в принципе $*$ -коммутаторы (51)–(54) с разными значениями параметра $\hbar$ также могут быть связаны преобразованием подобия, генерируемым оператором $T^{(\mu)}$ с подходящим μ .

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

В этом приложении приведены решения уравнений, встретившихся в тексте.

УРАВНЕНИЯ (14), (18) и (17). Рассмотрим уравнение

$$d\Omega(x, \xi) = 0, \quad d = \xi^\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad d^2 = 0, \quad (\text{П.1})$$

x^α – набор четных переменных (образующих), $x^\alpha x^\beta - x^\beta x^\alpha = x^\alpha \xi^\beta - \xi^\beta x^\alpha = 0$. Для его решения введем операторы

$$\gamma = x^\alpha \lambda_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha}, \quad N = x^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha},$$

образующие алгебру:

$$\gamma^2 = 0, \quad d\gamma + \gamma d = 0, \quad [d, N] = [\gamma, N] = 0.$$

Легко видеть, что если функция $\Omega(x, \xi)$ удовлетворяет уравнению (П.1) и на ней определен оператор N^{-1} (для этого должно выполняться условие $\Omega(0, 0) = 0$), тогда функция $\Omega(x, \xi)$ представима в виде

$$\Omega(x, \xi) = d\Xi(x, \xi), \quad \Xi(x, \xi) = \gamma \frac{1}{N} \Omega(x, \xi),$$

а общее решение уравнения (П.1) есть

$$\Omega(x, \xi) = d\Xi(x, \xi) + \text{const}. \quad (\text{П.2})$$

Пусть функция $\Omega(x, \xi)$ имеет вид $\Omega(x, \xi) = x^\alpha c^\alpha(\xi)$ и удовлетворяет уравнению (П.1). Тогда из (П.1) и (П.2) следует равенство

$$\lambda_\alpha \partial_\alpha c^\beta(\xi) + \lambda_\beta \partial_\beta c^\alpha(\xi) = 0, \quad c^\alpha(\xi) = \lambda_\alpha \partial_\alpha c(\xi),$$

что дает решения уравнений (14) и (18). Аналогично, выбирая $\Omega(x, \xi) = x^\alpha x^\beta c^{\alpha\beta}(\xi)$, мы получим решение уравнения (17).

УРАВНЕНИЯ (15), (26) и (45). Эти уравнения приводятся к виду

$$(a^{\alpha[\gamma]_{k-1}}(\xi) \delta_{\beta\gamma} - a^{\beta[\gamma]_k}(\xi) \delta_{\alpha\gamma}) \lambda_\gamma p_\gamma [p_\gamma]^{k-1} = 0, \quad k \geq 2, \quad (\text{П.3})$$

где $a^{[\alpha]_k} = c_1^{0[\alpha]_k}$, $c_1^{[\alpha]_k}$ или $t^{[\alpha]_k}$. Применим к уравнению (П.3) оператор $\lambda_\beta \partial / \partial p_\beta$:

$$(n - k) a^{[\alpha]_k} = 0 \implies a^{[\alpha]_k} = 0, \quad 2 \leq k \leq n - 1.$$

Отметим, что $a^{[\alpha]_n} = a_n \varepsilon^{[\alpha]_n}$ тождественно удовлетворяет уравнению (П.3).

УРАВНЕНИЕ (23). Подействуем на уравнение (23) оператором $\lambda_\alpha \partial / \partial \alpha$:

$$\begin{aligned} (n - l) c_1^{\gamma\sigma[\beta]_{l-1}} [p_\delta]^{l-1} &= \lambda_\beta (\delta_{\beta\sigma} \Delta^{\gamma[\delta]_{l-1}} - \delta_{\beta\gamma} \Delta^{\sigma[\delta]_{l-1}}) [p_\delta]^{l-1} + \\ &+ (l - 1) (\delta_{\sigma\delta} \Delta^{\beta[\gamma]_{l-2}} - \delta_{\gamma\delta} \Delta^{\beta[\sigma]_{l-2}}) \lambda_\delta p_\delta [p_\delta]^{l-2}, \\ \Delta^{\alpha[\beta]_{l-1}} &\equiv \lambda_\gamma \delta_{\gamma\sigma} c_1^{\alpha\gamma[\sigma]_{l-1}}. \end{aligned} \quad (\text{П.4})$$

Применение к уравнению (П.4) оператора $p_\sigma \lambda_\beta \partial / \partial p_\beta$ дает

$$(l - 2) p_\gamma \Delta^{[p_\delta]_{l-2}} [p_\delta]^{l-2} = 0, \quad \Delta^{[p_\delta]_{l-2}} \equiv \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} \Delta^{\alpha[\beta]_{l-2}}, \quad (\text{П.5})$$

откуда следует, что тензор $\Delta^{[\delta]_{l-2}}$ может быть отличен от нуля только при $l = 2$ или $l - 2 = n$. Так как $l \leq n$, получаем, что $\Delta^{[\delta]_{l-2}}$ может быть отличен от нуля только при $l = 2$.

Умножим уравнение (П.4) на $\lambda_\beta \delta_{\beta\sigma}$:

$$\Delta^{\gamma[p_\delta]_{l-1}} [p_\delta]^{l-1} + \Delta^{\delta[\gamma]_{l-2}} p_\delta [p_\delta]^{l-2} = \Delta^{[p_\delta]_{l-2}} \lambda_\gamma p_\gamma [p_\delta]^{l-2}. \quad (\text{П.6})$$

Применяя к уравнению (П.6) оператор $\lambda_\gamma \partial / \partial p_\gamma$ или просто рассматривая его при $l = 2$, находим, что $\Delta^{[\delta]_{l-2}} = 0$ и при $l = 2$. Уравнение (П.6) принимает вид

$$\Delta^{\gamma[p_\delta]_{l-1}} [p_\delta]^{l-1} + \Delta^{\delta[\gamma]_{l-2}} p_\delta [p_\delta]^{l-2} = 0. \quad (\text{П.7})$$

Дифференцируя уравнение (П.7) по p_σ , получаем

$$l\Delta^{\gamma|\sigma[\delta]_{l-2}}[p_\delta]^{l-2} = (l-2)\Delta^{\delta|\gamma\sigma[\delta]_{l-3}}p_\delta[p_\delta]^{l-3} + (\Delta^{\gamma|\sigma[\delta]_{l-2}} - \Delta^{\sigma|\gamma[\delta]_{l-2}})[p_\delta]^{l-2},$$

откуда следует, что тензоры $\Delta^{\alpha|[\alpha]_{l-1}}$ полностью антисимметричны по всем индексам:

$$\Delta^{\alpha|[\alpha]_{l-1}} = \Delta^{[\alpha]_l}.$$

Умножая уравнение (П.4) при $l < n$ на p_β , получаем окончательно

$$\begin{aligned} c_1^{\alpha\beta|[\delta]_l}[p_\delta]^l &= (\delta_{\alpha\delta}a_1^{\beta[\delta]_{l-1}} - \delta_{\beta\delta}a_1^{\alpha[\delta]_{l-1}})\lambda_\delta p_\delta[p_\delta]^{l-1}, \\ a_1^{\alpha[\alpha]_{l-1}} &\equiv -\frac{l}{n-l}\Delta^{[\alpha]_l}, \quad 2 \leq l < n. \end{aligned} \quad (\text{П.8})$$

При $l = n$ правая часть уравнения (23) равна нулю (чтобы установить это, следует использовать равенство $c_1^{\alpha\beta|[\gamma]_n} = c_1^{\alpha\beta}\varepsilon^{[\gamma]_n}$ и тождество $\varepsilon^{\beta[\delta]_{n-1}}p_\alpha[p_\delta]^{n-1} = (1/n)\delta_{\alpha\beta}\varepsilon^{[\delta]_n}[p_\delta]^n$). Умножим уравнение (23) на $\lambda_\alpha\delta_{\alpha\gamma}$:

$$(2-n)c_1^{\beta\sigma|[\delta]_n}[p_\delta]^n = 0,$$

откуда следует $c_1^{\beta\sigma|[\delta]_n} = 0$. Отметим, что представление (П.8) справедливо фактически и при $l = n$.

УРАВНЕНИЕ (29). Умножим уравнение (29) на $\lambda_\alpha\delta_{\alpha\alpha_1}$ (и затем заменим β на α_1):

$$\begin{aligned} (n-2)c_1^{\alpha_1\alpha_2\alpha_3|\beta_1\beta_2\beta_3} - \\ - [c_1^{\alpha_2\alpha_3\alpha_1|\beta_1\beta_2\beta_3} - c_1^{\alpha_2\alpha_3\beta_1|\beta_2\beta_3\alpha_1} + c_1^{\alpha_2\alpha_3\beta_2|\beta_3\alpha_1\beta_1} - c_1^{\alpha_2\alpha_3\beta_3|\alpha_1\beta_1\beta_2}] = \\ = \lambda_{\alpha_1}(\delta_{\alpha_1\beta_1}\Sigma^{\alpha_2\alpha_3|\beta_2\beta_3} + \delta_{\alpha_1\beta_2}\Sigma^{\alpha_2\alpha_3|\beta_3\beta_1} + \delta_{\alpha_1\beta_3}\Sigma^{\alpha_2\alpha_3|\beta_1\beta_2}), \end{aligned} \quad (\text{П.9})$$

$$\Sigma^{\alpha_1\alpha_2|\beta_1\beta_2} \equiv \lambda_\gamma c_1^{\alpha_1\alpha_2\gamma|\beta_1\beta_2} = \Sigma^{\beta_1\beta_2|\alpha_1\alpha_2}.$$

Свойство симметрии тензора $\Sigma^{\alpha_1\alpha_2|\beta_1\beta_2}$ следует из условия (11) антисимметрии коэффициентов.

Уравнение (П.9) умножаем на $\lambda_{\alpha_3}\delta_{\alpha_3\beta_3}$:

$$\begin{aligned} (n-1)\Sigma^{\alpha_1\alpha_2|\beta_1\beta_2} - [\Sigma^{\alpha_1\alpha_2|\beta_1\beta_2} + \Sigma^{\alpha_1\beta_1|\beta_2\alpha_2} + \Sigma^{\alpha_1\beta_2|\alpha_2\beta_1}] = \\ = \lambda_{\alpha_1}(\delta_{\alpha_1\beta_2}\Sigma^{\alpha_2|\beta_1} - \delta_{\alpha_1\beta_1}\Sigma^{\alpha_2|\beta_2}), \end{aligned} \quad (\text{П.10})$$

$$\Sigma^{\alpha|\beta} \equiv \lambda_\gamma\Sigma^{\alpha\gamma|\gamma\beta} = \Sigma^{\beta|\alpha}.$$

Умножение уравнения (П.9) на $\lambda_{\alpha_1}\delta_{\alpha_1\alpha_2}$ дает

$$\Sigma^{\alpha\beta_1|\beta_2\beta_3} + \Sigma^{\alpha\beta_2|\beta_3\beta_1} + \Sigma^{\alpha\beta_3|\beta_1\beta_2} = 0. \quad (\text{П.11})$$

Наконец, уравнение (П.10) умножаем на $\lambda_{\alpha_2} \delta_{\alpha_2 \beta_1}$:

$$\begin{aligned}\Sigma^{\alpha|\beta} &= \frac{1}{n} \lambda_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} \Sigma, \\ \Sigma &= \lambda_{\gamma} \Sigma^{\gamma|\gamma}, \quad \varepsilon(\Sigma) = 0.\end{aligned}\tag{П.12}$$

Подставляя выражение (П.12) в уравнение (П.10) и используя условие (П.11), получаем

$$\Sigma^{\alpha_1 \alpha_2 |\beta_1 \beta_2} = -\frac{1}{n(n-1)} \lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} (\delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_2} - \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_1}) \Sigma.\tag{П.13}$$

Представим $c_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3}$ в виде

$$\begin{aligned}c_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} &= -\frac{\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \lambda_{\alpha_3} \Sigma}{n(n-1)(n-2)} (\delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_2} \delta_{\alpha_3 \beta_3} + \delta_{\alpha_1 \beta_3} \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta_{\alpha_3 \beta_2} + \\ &+ \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \delta_{\alpha_3 \beta_1} - \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta_{\alpha_3 \beta_3} - \delta_{\alpha_1 \beta_3} \delta_{\alpha_2 \beta_2} \delta_{\alpha_3 \beta_1} - \\ &- \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \delta_{\alpha_3 \beta_2}) + \tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3}\end{aligned}\tag{П.14}$$

и подставим (П.14) в уравнение (П.9), в результате получаем

$$(n-2)\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} = \tilde{c}_1^{\alpha_2 \alpha_3 \alpha_1 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} - \tilde{c}_1^{\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 |\beta_2 \beta_3 \alpha_1} + \tilde{c}_1^{\alpha_2 \alpha_3 \beta_2 |\beta_3 \alpha_1 \beta_1} - \tilde{c}_1^{\alpha_2 \alpha_3 \beta_3 |\alpha_1 \beta_1 \beta_2}.\tag{П.15}$$

Правая часть уравнения (П.15) антисимметрична относительно перестановки индексов α_1 и β_1 , поэтому и левая часть, т.е. тензор $\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3}$, также меняет знак при перестановке индексов α_1 и β_1 . Следовательно, тензор $\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3}$ полностью антисимметричен по всем индексам, в частности

$$\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} = -\tilde{c}_1^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}.$$

Но из условия (11) следует $\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} = \tilde{c}_1^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 |\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3}$, т.е. $\tilde{c}_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} = 0$.
Окончательно получаем

$$\begin{aligned}c_1^{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 |\beta_1 \beta_2 \beta_3} &= -\frac{\lambda_{\alpha_1} \lambda_{\alpha_2} \lambda_{\alpha_3} \Sigma}{n(n-1)(n-2)} (\delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_2} \delta_{\alpha_3 \beta_3} + \delta_{\alpha_1 \beta_3} \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta_{\alpha_3 \beta_2} + \\ &+ \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \delta_{\alpha_3 \beta_1} - \delta_{\alpha_1 \beta_2} \delta_{\alpha_2 \beta_1} \delta_{\alpha_3 \beta_3} - \\ &- \delta_{\alpha_1 \beta_3} \delta_{\alpha_2 \beta_2} \delta_{\alpha_3 \beta_1} - \delta_{\alpha_1 \beta_1} \delta_{\alpha_2 \beta_3} \delta_{\alpha_3 \beta_2}).\end{aligned}$$

УРАВНЕНИЕ (32). Подействуем на уравнение (32) оператором $\lambda_{\beta} \partial / \partial q_{\beta}$:

$$\begin{aligned}(n-l)[q_{\gamma}]^k c_1^{[\gamma]_k |\alpha[\delta]_{l-1}} + k q_{\delta} [q_{\gamma}]^{k-1} c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1} |\delta[\delta]_{l-1}} + \\ + (-1)^k k \lambda_{\alpha} q_{\alpha} [q_{\gamma}]^{k-1} \Delta^{[\gamma]_{k-1} |[\delta]_{l-1}} = 0, \\ \Delta^{[\gamma]_{k-1} |[\delta]_{l-1}} \equiv \lambda_{\gamma} c_1^{[\gamma]_{k-1} \gamma | \gamma[\delta]_{l-1}}.\end{aligned}\tag{П.16}$$

На уравнение (П.16) подействуем оператором $\lambda_\alpha \partial / \partial q_\alpha$:

$$(k-l)\Delta^{[\gamma]_{k-1}|\delta]_{l-1}} = 0 \implies \Delta^{[\gamma]_{k-1}|\delta]_{l-1}} = 0, \quad k \neq l.$$

Пусть в уравнении (П.16) $k \neq l$. Подействуем на него оператором $\partial / \partial q_\alpha$:

$$[q_\gamma]^{k-1} [(n-l)c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1}|\beta[\delta]_{l-1}} + c_1^{\beta[\gamma]_{k-1}|\alpha[\delta]_{l-1}}] = (k-1)q_\delta [q_\delta]^{k-2} c_1^{\beta\alpha[\gamma]_{k-2}|\delta[\delta]_{l-1}}.$$

Это выражение сложим с таким же, но с переставленными индексами α и β :

$$c_1^{\alpha[\gamma]_{k-1}|\beta[\delta]_{l-1}} + c_1^{\beta[\gamma]_{k-1}|\alpha[\delta]_{l-1}} = 0,$$

откуда следует, что $c_1^{[\alpha]_k|[\beta]_l}$ полностью антисимметричен по всем индексам при $k \neq l$. Используя этот факт в уравнении (П.16), получаем

$$(n-k-l)c_1^{[\alpha]_k|[\beta]_l} = 0.$$

Таким образом, окончательно имеем

$$\begin{aligned} c_1^{[\alpha]_k|[\beta]_l} &= 0, \quad 3 \leq k, l < n, \quad k \neq l, \quad k+l \neq n, \\ c_1^{[\alpha]_k|[\beta]_{n-k}} &= c_1^{(k)} \varepsilon^{[\alpha]_k|[\beta]_{n-k}}, \quad k, n-k \geq 4, \quad 2k \neq n. \end{aligned}$$

УРАВНЕНИЕ (35). Действуя на уравнение (35) оператором $\lambda_{\alpha_3} \partial / \partial q_{\alpha_3}$, получаем (после сокращения на $(n-2)$)

$$c_1^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{l-2} | [\gamma]_l} = 0.$$

УРАВНЕНИЕ (36). Подействуем на уравнение (36) оператором $\lambda_{\alpha_3} \partial / \partial q_{\alpha_3}$:

$$\begin{aligned} &((-1)^m 3C_{2m-3}^{m-2} c_1^{(3)} + (m-1)C_{m+1}^2 c_1^{(m-1)}) \varepsilon^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{m-2} | [\gamma]_m} [q_\beta]^{m-2} [p_\gamma]^m - \\ &- mC_m^2 c_1^{\alpha_1 \alpha_2 [\beta]_{m-2} | [\gamma]_m} [q_\beta]^{m-2} [p_\gamma]^m = 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$c_1^{[\alpha]_m|[\beta]_m} = c_1^{(m)} \varepsilon^{[\alpha]_m|[\beta]_m}, \quad c_1^{(m)} = \frac{1}{mC_m^2} ((-1)^m 3C_{2m-3}^{m-2} c_1^{(3)} + C_{m+1}^2 c_1^{(m-1)}).$$

УРАВНЕНИЕ (37), $n = 2m$. Подействуем на уравнение (37) оператором $\lambda_{\alpha_3} \partial / \partial q_{\alpha_3}$:

$$3C_{n-3}^{k-1} c_1^{(3)} - (-1)^k k C_{n-k}^2 c_1^{(k)} + (-1)^k l C_{n-l}^2 c_1^{(l)} = 0. \quad (\text{П.17})$$

Уравнение (П.17) упрощается, если его переписать в терминах d_k :

$$\begin{aligned} d_k &\equiv (-1)^k k! (n-k)! c_1^{(k)}, \quad d_{n-k} = -d_k, \\ d_3 + d_k - d_{k+1} &= 0, \end{aligned}$$

откуда следует

$$d_k = (k-2)d_3.$$

Вспоминая, что $0 = c_1^{(m)} = d_m$, получаем

$$d_3 = 0 \implies c_1^{(k)} = 0 \quad \forall k.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

В этом приложении устанавливается общий вид операторов T'' , генерирующих преобразования подобия, относительно которых скобка Пуассона на алгебре Грассмана $\mathcal{G}_S$ инвариантна. Операторы T'' удовлетворяют уравнению (57).

Воспользуемся импульсным представлением оператора T''

$$T'' = \sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k, \quad \varepsilon(t^{[\alpha]_k}) = k \pmod{2},$$

в терминах которого уравнение (57) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n t^{[\alpha]_k}(\xi) [\partial_\alpha]^k (\partial_\gamma f_1(\xi) \lambda_\gamma \partial_\gamma f_2(\xi)) = \\ = \left(\sum_{k_1=0}^n \partial_\gamma t^{[\alpha]_{k_1}}(\xi) [\partial_\alpha]^{k_1} + \sum_{k_1=0}^n t^{[\alpha]_{k_1}}(\xi) [\partial_\alpha]^{k_1} \partial_\gamma \right) f_1(\xi) \lambda_\gamma \times \\ \times \left(\sum_{k_2=0}^n \partial_\gamma t^{[\beta]_{k_2}}(\xi) [\partial_\beta]^{k_2} + \sum_{k_2=0}^n t^{[\beta]_{k_2}}(\xi) [\partial_\beta]^{k_2} \partial_\gamma \right) f_2(\xi). \end{aligned} \quad (\text{П.18})$$

ЭТАП 0. Коэффициент в (П.18) перед $f_1(\xi)$:

$$\partial_\gamma t^0(\xi) \lambda_\gamma \partial_\gamma \left(\sum_{k=0}^n t^{[\beta]_k}(\xi) [\partial_\beta]^k f_2(\xi) \right) = 0 \quad \implies \quad t^0(\xi) = t_0 = \text{const}.$$

Из условия обратимости оператора T'' следует $t_0 \neq 0$. Представим оператор T'' в виде

$$T'' = T^{(\mu)} T^{(1)}, \quad T^{(\mu)} f(\xi) = \frac{1}{\mu^2} f(\mu\xi), \quad (\text{П.19})$$

где $\mu = t_0^{1/2}$. Нетрудно убедиться, что преобразование подобия, генерируемое оператором $T^{(\mu)}$ (и ему обратным), оставляет $*$ -коммутатор инвариантным. Следовательно, оператор $T^{(1)}$ и его коэффициенты (для которых мы сохраним обозначение $t^{[\alpha]_k}$) удовлетворяют уравнениям (57) и (П.18), соответственно. При этом у оператора $T^{(1)}$ коэффициент t_0 равен единице.

ЭТАП 1. Коэффициент в (П.18) перед $\partial_\alpha f_1(\xi)$, $\partial_\beta f_2(\xi)$ ($t_0 = 1$):

$$\{\eta^\alpha(\xi), \eta^\beta(\xi)\} = \lambda_\alpha \delta_{\alpha\beta} = \{\xi^\alpha, \xi^\beta\},$$

где введено обозначение $\eta^\alpha(\xi) \equiv t^\alpha(\xi) + \xi^\alpha$. Таким образом, преобразование образующих $\xi^\alpha \rightarrow \eta^\alpha(\xi)$ каноническое. Представим оператор T'' в виде

$$T'' = T^{(\mu)} T_\eta^{(c)} T^{(2)},$$

где оператор $T^{(\mu)}$ определяется формулой (П.19), а оператор $T_\eta^{(c)}$ описывает каноническое преобразование образующих: $T_\eta^{(c)} f(\xi) = f(\eta(\xi))$. Нетрудно проверить, что преобразование подобия, генерируемое оператором $T_\eta^{(c)}$, оставляет *-коммутатор инвариантным. Следовательно, преобразование подобия, генерируемое оператором $T^{(2)}$, также оставляет *-коммутатор инвариантным. Кроме того, для оператора $T^{(2)}$ имеют место равенства $t^0(\xi) = 1$, $t^\alpha(\xi) = 0$ (за коэффициентами оператора $T^{(2)}$ мы сохраняем старые обозначения $t^{[\alpha]_k}$). Далее мы рассматриваем уравнение (П.18) как уравнение на коэффициенты оператора $T^{(2)}$.

ЭТАП 1'. Коэффициенты в (П.18) перед $\partial_\alpha f_1(\xi)$, $[\partial_\beta]^k f_2(\xi)$, $k \geq 2$:

$$\partial_\alpha t^{[\beta]_k}(\xi) = 0 \quad \implies \quad t^{[\alpha]_k}(\xi) = t^{[\alpha]_k} = \text{const}.$$

ЭТАП 2. Коэффициент в (П.18) перед $\partial_\alpha \partial_\beta f_1(\xi)$, $f_2(\xi) = e^{\xi^\alpha p_\alpha}$:

$$(\delta_{\alpha\gamma} t^{\beta[\gamma]_{k-1}} - \delta_{\beta\gamma} t^{\alpha[\gamma]_{k-1}}) \lambda_\gamma p_\gamma [p_\gamma]^{k-1} = 0.$$

Общее решение этого уравнения есть (см. решение уравнения (П.3))

$$t^{[\alpha]_k} = 0, \quad 2 \leq k \leq n-1, \quad t^{[\alpha]_n} = t_n \varepsilon^{[\alpha]_n},$$

$t_n \neq 0$ только при четных n , откуда следует

$$T^{(2)} \equiv T^{(n)} = 1 + t_n \varepsilon^{[\alpha]_n} [\partial_\alpha]^n.$$

Таким образом, установлен общий вид операторов T'' :

$$T'' = T^{(\mu)} T_\eta^{(c)} T^{(n)}.$$

Благодарности. Автор благодарит И.Ю. Типунина за полезные обсуждения, Российский фонд фундаментальных исследований (грант № 99-01-00980 и грант поддержки научных школ № 00-15-96566) и Комиссию Европейского Сообщества (грант INTAS № 00-00262).

Список литературы

- [1] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowich, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 61.
- [2] *F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowich, D. Sternheimer.* Ann. Phys. 1978. V. 111. P. 111.
- [3] *М. В. Карасев, В. П. Маслов.* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование. М.: Наука, 1991.
- [4] *B. Fedosov.* Deformation quantization and Index Theory. Berlin: Akademie, 1996.
- [5] *M. Kontsevich.* Deformation quantization of Poisson manifolds. I. q-alg/9709040.
- [6] *J. E. Moyal.* Proc. Cambridge Philos. Soc. 1949. V. 45. P. 99.

Поступила в редакцию 20.IV.2001 г.