Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Барановский, В. В. Михеев, И. В. Широков, Квантовые гамильтоновы системы на К-орбитах. Квазиклассический спектр асимметрического волчка, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 3–13

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf514>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.208.226.222

26 апреля 2023 г., 02:42:42

© 2001 г. С. П. Барановский*, В. В. Михеев*, И. В. Широков*

КВАНТОВЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА К-ОРБИТАХ. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Рассматриваются уравнения на группах Ли, а также классические и квантовые гамильтоновы системы на орбитах коприсоединенного представления. Показано, что переход к каноническим координатам на орбитах коприсоединенного представления позволяет строить квазиклассические решения и соответствующие спектры квантовых уравнений с сохранением всех симметрий исходной задачи. Предлагаемый метод применен для нахождения квазиклассического спектра квантового асимметрического волчка.

1. КЛАССИЧЕСКИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ НА К-ОРБИТАХ В КАНОНИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Пусть G – вещественная связная n -мерная группа Ли, $\mathcal{G}$ – ее алгебра Ли. Группа G действует на коалгебре $\mathcal{G}^*$ коприсоединенным представлением $\text{Ad}^*: G \times \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*$, $(g, f) \rightarrow \text{Ad}_g^* f$ по правилу

$$\langle \text{Ad}_g^* f, X \rangle \equiv \langle f, \text{Ad}_{g^{-1}} X \rangle; \quad f \in \mathcal{G}^*, \quad g \in G, \quad X \in \mathcal{G}. \quad (1)$$

Здесь Ad_g – линейный оператор присоединенного представления группы Ли G на алгебре Ли $\mathcal{G}$. Обозначим через f_i координаты ковектора f в дуальном базисе: $f = f_i e^i$, $\langle e^i, e_j \rangle = \delta_j^i$ (здесь $\{e_j\}$ – базис алгебры $\mathcal{G}$), тогда формула (1) в координатах примет вид $(\text{Ad}_g^* f)_i = (\text{Ad}_{g^{-1}})_i^j f_j$.

На дуальном пространстве $\mathcal{G}^*$ определена вырожденная линейная скобка Пуассона

$$\{\varphi, \psi\}(f) \equiv \langle f, [\nabla \varphi(f), \nabla \psi(f)] \rangle, \quad \varphi, \psi \in C^\infty(\mathcal{G}^*), \quad (2)$$

где

$$\nabla \varphi(f) \equiv \frac{\partial \varphi(f)}{\partial f_i} e_i.$$

* Омский государственный университет, Омск, Россия. E-mail: shirokov@univer.omsk.su

Обозначим через ω_λ симплектическую 2-форму (форму Кириллова [1]) на орбите $\mathcal{O}_\lambda$, которая на касательных векторах действует следующим образом:

$$\omega_\lambda(a, b) = \langle \lambda, [\alpha, \beta] \rangle, \quad a = \text{ad}_\alpha^* \lambda \in T_\lambda \mathcal{O}_\lambda, \quad b = \text{ad}_\beta^* \lambda \in T_\lambda \mathcal{O}_\lambda, \quad \alpha, \beta \in \mathcal{G}. \quad (3)$$

Очевидно, что скобка Пуассона на орбите $\mathcal{O}_\lambda$, определяемая формой Кириллова ω_λ , совпадает с ограничением на эту орбиту скобки Пуассона (2).

Рассмотрим гамильтонову систему на коалгебре $\mathcal{G}^*$ с гамильтонианом $H(f) \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$,

$$\frac{df}{dt} = \{H(f), f\}, \quad f|_{t=0} = \lambda. \quad (4)$$

С тех пор как в книге [2] было отмечено, что уравнения Эйлера есть система (4) на коалгебре $so^*(3)$ с квадратичным гамильтонианом, эта система стала популярным объектом исследований многих математиков и физиков [3]–[5].

Пусть λ – начальная точка для системы (4), тогда вся траектория лежит на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ и гамильтонова система (4) для произвольного гамильтониана допускает $\text{codim } \mathcal{O}_\lambda = n - \dim \mathcal{O}_\lambda$ интегралов движения (однако не все они являются независимыми). Ограничивая систему (4) на орбиту $\mathcal{O}_\lambda$, мы получим гамильтонову систему с гамильтонианом $H(f)|_{\mathcal{O}_\lambda}$ и скобкой Пуассона, определяемой формой Кириллова. Поэтому можно говорить, что система (4) есть гамильтонова система на К-орбите $\mathcal{O}_\lambda$.

Согласно теореме Дарбу на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ существуют локальные канонические координаты (координаты Дарбу), в которых форма ω_λ имеет вид

$$\omega_\lambda = \sum_{a=1}^{\frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda} dp_a \wedge dq^a.$$

Нетрудно видеть, что переход к каноническим координатам Дарбу $(f_i) \rightarrow (p_a, q^a)$ состоит в построении аналитических функций от переменных (p, q) , $f_i = f_i(q, p; \lambda)$, удовлетворяющих следующим условиям:

$$f_i(0, 0; \lambda) = \lambda_i, \quad (5)$$

$$\frac{\partial f_i(q, p; \lambda)}{\partial p_a} \frac{\partial f_j(q, p; \lambda)}{\partial q^a} - \frac{\partial f_j(q, p; \lambda)}{\partial p_a} \frac{\partial f_i(q, p; \lambda)}{\partial q^a} = C_{ij}^k f_k(q, p; \lambda), \quad (6)$$

$$K_\mu(f(q, p; \lambda)) = K_\mu(\lambda), \quad \mu = 1, \dots, \text{codim } \mathcal{O}_\lambda. \quad (7)$$

Здесь $K_\mu(f)$ – функции Казимира для орбиты $\mathcal{O}_\lambda$, т.е. такие функции из пространства $C^\infty(\mathcal{G}^*)$, что $\{\varphi(f), K_\mu(f)\}|_{\mathcal{O}_\lambda} = 0$, $\forall \varphi \in C^\infty(\mathcal{G}^*)$.

Потребуем, чтобы переход к каноническим координатам (или, иначе, qp -переход) был линейным по переменным p_a , т.е.

$$f_i(q, p; \lambda) = \alpha_i^a(q) p_a + \chi_i(q, \lambda), \quad \text{rank } \alpha_i^a(q) = \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda. \quad (8)$$

Конечно, в общем случае перехода (8) не существует, но если допустить, что функции $\alpha_i^a(q)$ и $\chi_i(q, \lambda)$ являются голоморфными функциями от комплексных переменных q , то тем самым мы значительно расширим класс алгебр Ли и К-орбит, для которых этот переход существует (считаем, что функционалы из $\mathcal{G}^*$ продолжаются на $\mathcal{G}^c$ по линейности). Область определения Q переменных q и область определения P переменных p устанавливаются из условия вещественности функций $f_i(q, p; \lambda)$.

В работе [6] доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА 1. *Линейный переход к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_\lambda$ существует тогда и только тогда, когда для линейного функционала λ существует нормальная, в общем случае комплексная, поляризация, т.е. подалгебра $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^c$ такая, что*

$$\dim \mathcal{H} = n - \frac{1}{2} \dim \mathcal{O}_\lambda, \quad \langle \lambda, [\mathcal{H}, \mathcal{H}] \rangle = 0, \quad \lambda + \mathcal{H}^\perp \subset \mathcal{O}_\lambda.$$

Линейный переход (8) удобен во многих отношениях. Во-первых, легко осуществляется процедура квантования скобки Пуассона, так как в этом случае не возникает проблемы упорядочивания операторов (см. ниже). Во-вторых, квадратичные гамильтонианы также становятся квадратичными по импульсам, и при квантовании мы получаем уравнения второго порядка. Линейный qp -переход существует в подавляющем большинстве случаев, так как известно (см., например, [7]), что для произвольной алгебры Ли и любого невырожденного ковектора существует разрешимая поляризация. С другой стороны, если алгебра $\mathcal{G}$ разрешима, то каждый функционал обладает поляризацией $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}^c$.

Определим понятие квантования К-орбит [6]. Подобное квантование проводится отдельно для каждого типа орбит и заключается в сопоставлении типу орбит специального представления алгебры Ли (λ -представления), а на орбиты при этом накладывается условие *целочисленности*. Напомним [1], что орбита $\mathcal{O}_\lambda$ целочисленна, если интеграл от 2-формы Кириллова (3) по любому двумерному циклу на этой орбите кратен целому числу.

Будем рассматривать функции перехода $f_i(q, p; \lambda)$ к локальным каноническим координатам как символы операторов. Последние определяются следующим образом: переменные p_a заменяются операторами дифференцирования $p_a \rightarrow \hat{p}_a \equiv -i\hbar \partial / \partial q^a$, тогда координаты ковектора f_i переходят в линейные операторы $f_i(q, p; \lambda) \rightarrow \hat{f}_i(q, \lambda) = f_i(q, -i\hbar \partial / \partial q; \lambda + i\hbar \beta)$ (здесь $\hbar$ — некоторый вещественный положительный параметр). Произвольной аналитической функции на коалгебре $\varphi(f)$ при квантовании сопоставляется симметризованная операторная функция $\varphi(\hat{f})$ от операторов $\hat{f}_i$. Вещественный вектор β определяется из условия вещественности функций

$$\kappa_\mu(\lambda) = K_\mu(\hat{f}). \quad (9)$$

Вышеуказанная процедура квантования неоднозначна. Эта неоднозначность исчезает, если мы потребуем, чтобы операторы $\hat{f}_i$ удовлетворяли коммутационным соотношениям

$$\frac{i}{\hbar} [\hat{f}_i, \hat{f}_j] = C_{ij}^k \hat{f}_k. \quad (10)$$

Если переход к каноническим координатам линейный, т.е. для орбит этого типа существует нормальная поляризация, то, очевидно,

$$\hat{f}_i = -i\hbar\alpha_i^a(q)\frac{\partial}{\partial q^a} + \chi_i(q, \lambda + i\hbar\beta). \quad (11)$$

Отметим, что в “классическом” пределе $\hbar \rightarrow 0$ имеем $\kappa_\mu(\lambda) \rightarrow K_\mu(\lambda)$, и коммутатор линейных операторов переходит в скобку Пуассона на коалгебре: $(i/\hbar)[\cdot, \cdot] \rightarrow \{\cdot, \cdot\}$.

Введем операторы $l_k(q, \partial_q, \lambda) \equiv (i/\hbar)\hat{f}_k(q, \lambda)$. Очевидно, что

$$[l_i, l_j] = C_{ij}^k l_k, \quad K_\mu(-i\hbar l(q, \partial_q, \lambda)) \equiv \kappa_\mu(\lambda) = \overline{\kappa_\mu(\lambda)}. \quad (12)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $f_i = f_i(q, p; \lambda)$ – переход к каноническим координатам на орбите $\mathcal{O}_\lambda$. Реализацию алгебры Ли $\mathcal{G}$ соответствующими операторами $l_i(q, \partial_q, \lambda)$ (12) будем называть λ -представлением.

В работе [6] показано, что величины $\kappa_\mu(\lambda)$, где функционал λ принадлежит невырожденной целочисленной орбите, образуют спектр операторов Казимира на группе Ли $\widehat{K}_\mu \equiv K_\mu(i\hbar\xi(g))$ (здесь $\xi_i(g)$ – левоинвариантные векторные поля на группе G).

2. КВАНТОВЫЕ УРАВНЕНИЯ НА К-ОРБИТАХ И КВАЗИКЛАССИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ

Пусть λ – невырожденный ковектор, принадлежащий целочисленной орбите. Будем также предполагать, что группа G унимодулярна; $l_i(q, \partial_q, \lambda)$ – λ -представление алгебры $\mathcal{G}$; dg – инвариантная мера на G ; $d\mu(q)$ – мера на Q такая, что операторы $l_i(q, \partial_q, \lambda)$ кососимметричны относительно скалярного произведения в $L_2(Q, d\mu(q))$. Отметим, что левоинвариантные (ξ_i) и правоинвариантные (η_i) векторные поля на G также кососимметричны относительно скалярного произведения в $L_2(G, dg)$.

Введем обобщенную функцию $D_{qq'}^\lambda(g)$ как решение переопределенной системы уравнений

$$[\xi_i(g) + l_i(q, \partial_q, \lambda)]D_{qq'}^\lambda(g) = 0, \quad [\eta_i(g) + \bar{l}_i(q', \partial_{q'}, \lambda)]D_{qq'}^\lambda(g) = 0. \quad (13)$$

Так как $D_{qq'}^\lambda(g)$ – обобщенные функции, то все равенства с их участием, в частности уравнения (13), следует понимать в слабом смысле. В дальнейшем мы это особо оговаривать не будем. Система (13) совместна, однако глобально решения существуют лишь для целочисленных орбит [6]. По построению функции $D_{qq'}^\lambda(g)$ являются собственными для всех операторов Казимира и определены системой (13) с точностью до постоянного множителя. Этот произвол мы устраним, введя условие нормировки $D_{qq'}^\lambda(e) = \delta(q, q')$, где $\delta(q, q')$ – дельта-функция относительно меры $d\mu(q)$. Отметим, что в силу переопределенности системы (13) функции $D_{qq'}^\lambda(g)$ находятся в квадратурах.

Семейство обобщенных функций $D_{qq'}^\lambda(g)$ полно и ортогонально [8]. В силу этого для каждой функции $\varphi(g)$ из плотного ядерного подпространства в $L_2(G, dg)$ определено

прямое и обратное преобразования Фурье,

$$\widehat{\varphi}_\lambda(q; q') = \int \varphi(g) D_{qq'}^\lambda(g) dg, \quad (14)$$

$$\varphi(g) = \int \widehat{\varphi}_\lambda(q; q') \overline{D_{qq'}^\lambda(g)} d\mu(q) d\mu(q') d\mu(\lambda), \quad (15)$$

где $d\mu(\lambda)$ – спектральная мера операторов Казимира $K_\mu(-i\hbar\xi) = K_\mu(i\hbar\eta)$, $\mu = 1, \dots, r$.

В общепринятом методе гармонического анализа функции, осуществляющие преобразование Фурье, являются собственными для полного n -мерного набора коммутирующих операторов из обертывающих алгебр лево- и правоинвариантных полей $U(\mathcal{G}^L)$, $U(\mathcal{G}^R)$. Предлагаемый здесь подход обладает следующим преимуществом: если функции $\varphi(g)$ и $\widehat{\varphi}_\lambda(q; q')$ связаны преобразованиями (14), (15), то этими же преобразованиями связаны и действия операторов,

$$\xi_i(g)\varphi(g) \Leftrightarrow l_i(q, \partial_q, \lambda)\widehat{\varphi}_\lambda(q; q'), \quad \eta_i(g)\varphi(g) \Leftrightarrow \bar{l}_i(q', \partial_{q'}, \lambda)\widehat{\varphi}_\lambda(q; q'). \quad (16)$$

Функции $H(f)$ на коалгебре сопоставим симметрическую функцию $H(-i\hbar\xi)$ от операторов $i\hbar\xi_k$ и рассмотрим соответствующее дифференциальное уравнение в $L_2(G, dg)$

$$H(i\hbar\xi)\varphi(g) = E\varphi(g). \quad (17)$$

Уравнение (17) будем называть *квантовым уравнением на группе Ли G* .

Используя преобразование (15) и формулу (16), получим для функции $\widehat{\varphi}_\lambda(q, q')$ эквивалентное уравнение

$$H(\hat{f}(q, \lambda))\widehat{\varphi}_\lambda(q; q') = E\widehat{\varphi}_\lambda(q; q'). \quad (18)$$

В силу того что переменные q' не входят в уравнение (18), его общее решение имеет вид

$$\widehat{\varphi}_\lambda(q; q') = C_{(\alpha)}(q', \lambda)\widehat{\varphi}_\lambda^{(\alpha)}(q), \quad (19)$$

где $C_{(\alpha)}(q', \lambda)$ – произвольные функции от переменных q' и параметров λ , а $\widehat{\varphi}_\lambda^{(\alpha)}(q)$ – независимые решения уравнения

$$H(\hat{f}(q, \lambda))\widehat{\varphi}_\lambda(q) = E\widehat{\varphi}_\lambda(q). \quad (20)$$

Уравнение (20) есть квантовый аналог классической гамильтоновой системы (4). Ниже мы покажем, что в квазиклассическом приближении решение уравнения (20) сводится к интегрированию классической системы (4). В силу этого уравнение (20) будем называть *квантовым уравнением на K -орбите*.

Произвольное решение $\varphi(g)$ уравнения (17) представляется в виде

$$\varphi(g) = \int C(q', \lambda)\varphi_\lambda(g; q') d\mu(\lambda) d\mu(q'), \quad (21)$$

где функции $\varphi_\lambda(g; q')$ образуют базис решений уравнения (17) и определяются формулой

$$\varphi_\lambda(g; q') = \int \widehat{\varphi}_\lambda(q) D_{qq'}^\lambda(g) d\mu(q). \quad (22)$$

Каждая функция $\varphi_\lambda(g; q')$ является собственной для всех операторов Казимира $K_\mu(-i\hbar\xi)$ с собственными значениями $\kappa_\mu(\lambda)$. Кроме того, эта функция, как следует из формул (13), (22), при произвольных $\widehat{\varphi}_\lambda(q)$ удовлетворяет соотношению

$$[\eta_i(g) + \bar{l}_i(q', \partial_{q'}, \lambda)] \varphi_\lambda(g; q') = 0.$$

Это означает, что семейство функций $\varphi_\lambda(g; q')$, нумеруемое переменными q' , является инвариантным относительно левого регулярного представления. В свою очередь, это означает, что в этом семействе можно выбрать базис в виде собственных функций максимального коммутативного набора из обертывающей алгебры правоинвариантных полей. Отсюда следует, что если мы, используя малость параметра $\hbar$, приближенно решим уравнение (20) и подставим это решение в (22), то тем самым мы не “теряем” точных квантовых интегралов движения. В то же время эти интегралы “теряются”, если использовать метод квазиклассического приближения в исходном уравнении (17).

Считая вещественный параметр $\hbar$ уравнения (20) малым, найдем квазиклассическое решение этого уравнения. Для этого представим функцию $\widehat{\varphi}_\lambda(q)$ в виде

$$\widehat{\varphi}_\lambda(q) = e^{\frac{iS(q)}{\hbar}}, \quad (23)$$

где комплексная функция $S(q)$ на Q представляется в виде степенного ряда по малому параметру $\hbar$,

$$S(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \hbar^k S_k(q).$$

Подставляя выражение (23) в уравнение (20), в нулевом приближении получим уравнение Гамильтона–Якоби для классической гамильтоновой системы (4),

$$H(f(p, q; \lambda)) = E, \quad p_a \equiv \frac{\partial S(q)}{\partial q^a}. \quad (24)$$

Таким образом, интегрирование квантового уравнения на группе Ли (17) эквивалентно решению квантового уравнения на К-орбите (20). Последнее в главном порядке квазиклассического приближения сводится к гамильтоновой системе на коалгебре (4). Из требования однозначности решения (23) получим условие квазиклассического квантования

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \oint_{\gamma \in H^1(Q)} p_a dq^a = n_\gamma \in \mathbb{Z}. \quad (25)$$

Продemonстрируем вышесказанное на нетривиальном примере, имеющем и самостоятельную ценность.

3. КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЙ СПЕКТР КВАНТОВОГО АСИММЕТРИЧЕСКОГО ВОЛЧКА

Рассмотрим задачу о квантовании движения трехмерного ротатора, закрепленного в точке. Группой симметрии данной задачи является группа $SO(3)$.

Пуассонова структура (2) на алгебре $so^*(3)$ задается соотношениями

$$\{f_1, f_2\} = f_3, \quad \{f_2, f_3\} = f_1, \quad \{f_3, f_1\} = f_2.$$

В этом случае единственная вырожденная К-орбита является нулевой точкой $f = 0$, невырожденные орбиты представляют собой двумерные сферы

$$\mathcal{O}_\lambda = \{K(f) \equiv f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = J^2, \neg(f = 0)\}, \quad \lambda = (J, 0, 0), \quad J > 0. \quad (26)$$

Форма Кириллова (3) на орбитах (26) имеет вид $\omega_\lambda = df_1 \wedge df_2 / f_3$ и совпадает с точностью до постоянного множителя с элементом поверхности сферы. Для целочисленных орбит $J = \hbar j$, $j = 0, 1, \dots$.

Коприсоединенным действием группы вращений $SO(3)$ произвольная невырожденная квадратичная форма на $so^*(3)$ приводится к диагональному виду. Функция

$$H(f) = Af_1^2 + Bf_2^2 + Cf_3^2 \quad (27)$$

является гамильтонианом для системы (4) уравнений Эйлера, описывающих движение асимметрического волчка, если считать f_k моментами импульса, а $A = 1/2I_1$, $B = 1/2I_2$, $C = 1/2I_3$, где I_k — главные моменты инерции твердого тела.

Линейный переход (8) к каноническим координатам на орбите (26), отвечающий комплексной поляризации $\mathcal{H} = \{e_1, e_2 + ie_3\}$ линейного функционала $\lambda = (J, 0, 0)$, имеет вид

$$f_1 = -ip \sin q + J \cos q, \quad f_2 = -ip \cos q - J \sin q, \quad f_3 = p. \quad (28)$$

Из условия вещественности величин f_k (28) нетрудно получить, что $q = \alpha + i\beta$, $\beta \in \mathbb{R}^1$, $\alpha \in S^1$, $p = -J \tanh \beta \in [-J, J]$, т.е. область Q представляет собой комплексный цилиндр с осью вдоль мнимой прямой, и пространство гладких функций на орбите (26) изоморфно пространству аналитических функций от вещественной переменной p , принадлежащей отрезку $[-J, J]$, и голоморфных 2π -периодических функций от комплексной переменной q . Гамильтониан (27) в канонических координатах принимает вид

$$H(f(q, p, \lambda)) = (-A \sin^2 q - B \cos^2 q + C)p^2 - 2iJ((A - B) \cos q \sin q)p + A J^2 \cos^2 q + B J^2 \sin^2 q. \quad (29)$$

Соответствующая гамильтонова система, ограниченная на поверхность постоянной энергии

$$H(f(q, p; \lambda)) = E, \quad (30)$$

одномерна и просто интегрируется в квадратурах.

Рассмотрим теперь уравнение вида (17), описывающее квантовый асимметрический волчок,

$$H(-i\hbar\xi)\varphi(g) \equiv -\hbar^2(A\xi_1^2 + B\xi_2^2 + C\xi_3^2)\varphi(g) = E\varphi(g). \quad (31)$$

Здесь ξ_k – левоинвариантные векторные поля на группе $SO(3)$ (генераторы правых сдвигов). Если обозначить через α, β, γ углы Эйлера, то в этих переменных поля ξ_k имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_1 &= -\frac{\cos \gamma}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \sin \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \gamma \cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \xi_2 &= \frac{\sin \gamma}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} + \cos \gamma \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\sin \gamma \cos \beta}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \xi_3 &= \frac{\partial}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

В силу своей левоинвариантности оператор уравнения (31) допускает группу симметрии $SO(3)$, состоящую из левых сдвигов, с генераторами

$$\begin{aligned} \eta_1 &= -\frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ \eta_2 &= \frac{\cos \beta \sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \eta_3 &= -\frac{\cos \beta \cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}. \end{aligned}$$

Несмотря на то что для задачи (31) существует тройка коммутирующих операторов симметрии (например, $\{\eta_1, K(\xi), H\}$), разделить переменные не удастся, так как не выполняются необходимые и достаточные условия теоремы о разделении переменных [9]. В стандартном подходе [10]–[12] решение уравнения (31) ищется в виде разложения по набору функций $E_{\mu\nu}^j(g)$, образующих пространство неприводимого представления группы $SO(3)$ со старшим весом j , т.е.

$$\varphi_\nu^j(g) = \sum_{\mu=-j}^{\mu=j} a_\mu E_{\mu\nu}^j(g). \quad (32)$$

Функции $E_{\mu\nu}^j(g)$ являются собственными для максимального коммутативного набора из обертывающих алгебр лево- и правоинвариантных векторных полей,

$$\begin{aligned} \eta_1 E_{\mu\nu}^j(g) &= i\nu E_{\mu\nu}^j(g), \\ \xi_3 E_{\mu\nu}^j(g) &= -i\mu E_{\mu\nu}^j(g), \\ K(-i\hbar\xi) E_{\mu\nu}^j(g) &= \hbar^2 j(j+1) E_{\mu\nu}^j(g). \end{aligned}$$

Подставляя разложение (32) в уравнение (31), получим $(2j+1)$ -мерную линейную систему для неизвестных величин a_μ (благодаря наличию дискретной симметрии эта система распадается на две независимые подсистемы размерности j и $j+1$). Система, приведенная выше, имеет точное решение, а именно,

$$E_{\mu\nu}^j = e^{-i\nu\alpha} d_{\mu\nu}^j(\beta) e^{-i\mu\gamma}, \quad (33)$$

где $d_{\mu\nu}^j(\beta)$ – ортонормированные полиномы Якоби.

Отметим, что в этом подходе задачу (31) удается свести к конечномерной линейной системе лишь в силу компактности группы $SO(3)$ и конечномерности всех ее неприводимых представлений. В некомпактном случае (например, для группы $SO(2,1)$) этот метод уже не работает. Кроме того, достаточно сложно проводить анализ спектра и собственных функций при больших значениях квантовых чисел. В этой связи укажем на работу [11], где используется квазиклассическое приближение для линейной конечномерной системы, к которой сводится задача (31) в стандартном подходе. Применим к этой задаче метод, описанный в предыдущих разделах.

Операторы λ -представления для невырожденных целочисленных ($J = j\hbar$) орбит, соответствующие каноническому переходу (28), имеют вид

$$l_1 = -i \sin q \frac{\partial}{\partial q} + \frac{i}{\hbar} J \cos q, \quad l_2 = -i \cos q \frac{\partial}{\partial q} - \frac{i}{\hbar} J \sin q, \quad l_3 = \frac{\partial}{\partial q}. \quad (34)$$

Оператор Казимира в λ -представлении есть $K(\hat{f}) = \hbar^2 j(j+1)$. Интегрирование по спектральной мере $d\mu(\lambda)$ в формуле (15) в данном случае сводится к суммированию по положительным целым числам j от 0 до ∞ . В области Q выберем меру

$$d\mu(q) = \frac{C_j dq d\bar{q}}{[1 + \cos(q - \bar{q})]^{j+1}}. \quad (35)$$

Константа C_j находится из условия нормировки $\int_Q d\mu(q) = 1$ и имеет вид

$$C_j = \frac{2^{j+2} \pi (j!)^2}{(2j+1)!}.$$

Скалярное произведение в пространстве $L_2(Q, d\mu(q))$ записывается как

$$(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \int_Q \overline{\varphi_1(q)} \varphi_2(q) d\mu(q). \quad (36)$$

Относительно этого скалярного произведения операторы l_i (34) кососимметричны и являются генераторами унитарного $(2j+1)$ -мерного неприводимого представления группы $SO(3)$ в пространстве $L_2(Q, d\mu(q))$. Набор функций $\{e^{ikq}\}$, $k = -j, -j+1, \dots, j$, образует базис пространства представления.

Функции $D_{qq'}^\lambda(g)$ находятся из уравнений (13) в квадратурах. Приведем связь этих функций с функциями $E_{\mu\nu}^j(g)$:

$$E_{\mu\nu}^j(g) = \int D_{qq'}^\lambda(g) e^{i(\mu q - \nu q')} d\mu(q) d\mu(q').$$

Общее решение уравнения (31) определяется формулой (22), в которой 2π -периодичные функции $\widehat{\varphi}_\lambda(q)$ удовлетворяют уравнению

$$\widehat{H}\widehat{\varphi}_\lambda(q) = E\widehat{\varphi}_\lambda(q), \quad (37)$$

где оператор $\widehat{H}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \widehat{H} = & \hbar^2(A \sin^2 q + B \cos^2 q - C) \frac{\partial^2}{\partial q^2} + [\hbar \sin q \cos q (\hbar - 2J)(A - B)] \frac{\partial}{\partial q} + \\ & + (A \cos^2 q + B \sin^2 q) J^2 + \hbar J (A \sin^2 q + B \cos^2 q). \end{aligned} \quad (38)$$

В квазиклассическом приближении (23) имеем уравнение (30), где функция $H(q, p)$ дается выражением (29) и $p = \partial S(q)/\partial q$. Формула (25) в данном случае принимает вид

$$\int_0^{2\pi} \frac{[(A - B)(E - CJ^2) \cos^2 q + (C - A)(E - BJ^2)]^{\frac{1}{2}}}{(A - B) \cos^2 q + C - A} dq = 2\pi \hbar n. \quad (39)$$

Вычисляя интеграл в этом выражении, окончательно получим следующую формулу для квазиклассического спектра асимметрического квантового волчка:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{(E - BJ^2)(C - A)}} \left[J^2(C - B) \Pi \left(2\pi, \frac{A - B}{A - C}, \sqrt{\frac{(E - CJ^2)(A - B)}{(E - BJ^2)(A - C)}} \right) + \right. \\ & \left. + (E - CJ^2) K \left(2\pi, \sqrt{\frac{(E - CJ^2)(A - B)}{(E - BJ^2)(A - C)}} \right) \right] = 2\pi n \hbar, \end{aligned} \quad (40)$$

где K – полный эллиптический интеграл первого рода, а Π – эллиптический интеграл третьего рода [13].

Рассмотрим случай, когда волчок мало отличается от симметрического. Введем безразмерный параметр асимметрии $\varepsilon = (A - B)/B$ (для симметрического волчка $\varepsilon = 0$). Вычисляя интеграл (39) с точностью до $O(\varepsilon^2)$, получим

$$E_{jn} = BJ^2 \frac{\kappa(\varepsilon + 4) - \varepsilon}{4\kappa - \varepsilon} - 8\hbar^2 n^2 B \frac{\kappa^3}{(4\kappa - \varepsilon)^2} - 4\hbar n B \frac{\kappa^2}{(4\kappa - \varepsilon)^2} \sqrt{4\hbar^2 n^2 \kappa^2 - J^2 \varepsilon (4\kappa - \varepsilon)}, \quad (41)$$

где введено обозначение $\kappa = (B - C)/B$.

При необходимости выражения (40), (41) поддаются дальнейшему анализу, что может оказаться полезным в прикладных задачах, например в ядерной физике [12].

Список литературы

- [1] *А. А. Кириллов*. Элементы теории представлений. М.: Наука, 1978.
- [2] *В. И. Арнольд*. Математические методы классической механики. М.: Наука, 1979.
- [3] *А. Т. Фоменко*. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [4] *А. М. Переломов*. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [5] *В. В. Трофимов, А. Т. Фоменко*. Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. М.: Факториал, 1995.
- [6] *И. В. Широков*. ТМФ. 2000. Т. 123. № 3. С. 407–423.
- [7] *Ж. Диксмье*. Универсальные обертывающие алгебры. М.: Мир, 1978.
- [8] *И. В. Широков*. К-орбиты, гармонический анализ на однородных пространствах и интегрирование дифференциальных уравнений. Препринт. Омск: ОмГУ, 1998.
- [9] *В. Н. Шаповалов*. Дифференциальные уравнения. 1980. Т. 16. № 10. С. 1864–1874.
- [10] *Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц*. Квантовая механика. Нерелятивистская теория. М.: Наука, 1989.
- [11] *П. А. Браун, А. А. Киселев*. Введение в теорию молекулярных спектров. Л.: ЛГУ, 1983.
- [12] *И. Айзенберг, В. Грайнер*. Модели ядер. Коллективные и одночастичные явления. М.: Атомиздат, 1975.
- [13] *Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш*. Специальные функции (Формулы, графики, таблицы). М.: Наука, 1964.

Поступила в редакцию 28.II.2001 г.