Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Г. Корепанов, Е. В. Мартюшев, Классическое решение уравнения пентагона, связанное с группой $SL(2)$, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 14–19

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf515>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 14:35:00

© 2001 г. И. Г. Корепанов*, Е. В. Мартюшев*
**КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ
ПЕНТАГОНА, СВЯЗАННОЕ С ГРУППОЙ $SL(2)$**

Получено новое решение уравнения пентагона, связанное с плоской геометрией, инвариантной относительно действия группы $SL(2)$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Основная цель этой работы – построение нового классического решения уравнения пентагона. Уравнением пентагона мы называем всякое алгебраическое соотношение, отвечающее локальной перестройке “2 тетраэдра → 3 тетраэдра” триангуляции трехмерного многообразия, при этом левая и правая части равенства естественно сопоставляются диаграммам, изображенным в левой и правой частях рисунка. Левая диаграмма состоит из двух тетраэдров $ABCD$ и $ABCE$, а правая – из трех тетраэдров $ABDE$, $BCDE$ и $CADE$. Подразумевается, что каждая из этих диаграмм представляет часть триангулированного трехмерного многообразия, а переход от левой части к правой соответствует перестройке типа “2 → 3” триангуляции.

*Южно-Уральский государственный университет, Челябинск, Россия. E-mail: kig@susu.ac.ru

Мы не будем здесь пытаться формализовать понятие *классического* (т.е. не квантового) решения уравнения пентагона. Вместо этого мы приведем пример такого решения из работы [1]. Представим себе, что точки A, B, C, D и E на рисунке помещены в трехмерное евклидово пространство. Это сопоставляет изображенным на рисунке диаграммам метрические величины, в частности длины ребер (обозначаем их буквой l , например l_{AB} — длина ребра AB), двугранные углы и объемы тетраэдров (например, объем тетраэдра $ABCD$ будем обозначать V_{ABCD} или, короче, V_E , имея в виду, что точка E не входит в его множество вершин).

Нам понадобится рассмотреть (бесконечно малый) *угол дефекта* ω_{DE} вокруг ребра DE . Он определяется следующим образом. В евклидовом пространстве, конечно, длина l_{DE} выражается через длины остальных девяти ребер (по известному соотношению Кэли–Менгера). Если мы начнем изменять длину l_{DE} при постоянных остальных длинах, пятивершинник в правой части рисунка уже не сможет быть помещен в трехмерное евклидово пространство. Это, однако, не мешает существованию каждого из евклидовых тетраэдров $ABDE$, $ACDE$ и $BCDE$ по отдельности. В каждом из них можно вычислить двугранный угол при ребре DE для данной чуть измененной длины l_{DE} . Обозначим эти углы соответственно γ, β и α и положим по определению

$$\omega_{DE} = 2\pi - \alpha - \beta - \gamma. \quad (1)$$

Ниже в формуле (2) производная $\partial\omega_{DE}/\partial l_{DE}$ берется при “правильном” значении l_{DE} , при котором $\omega_{DE} = 0$.

Классическое решение уравнения пентагона из работы [1] (в нем присутствуют модули, чтобы не возникало вопросов об ориентации тетраэдров и знаках углов) имеет вид

$$\left| \frac{1}{V_D V_E} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{l_{DE}^2}{V_A V_B V_C} \left(\frac{\partial\omega_{DE}}{\partial l_{DE}} \right)^{-1} \right|. \quad (2)$$

На основе этого решения в работе [1] определяется инвариант трехмерных многообразий. Отметим, что в работе [1] приведена лишь простейшая из версий этого инварианта (есть гипотеза, что эта версия связана с первой группой гомологий многообразия). В любом случае, инвариант из работы [1] связан с пределом *классических $6j$ -символов*, соответствующих группе $SU(2)$, при стремлении размерности представлений к бесконечности; такой предел на физическом уровне строгости изучен Понцано и Редже [2], а на математическом — Робертсом [3]. Классические же $6j$ -символы, в свою очередь, могут рассматриваться как предельные случаи квантовых $6j$ -символов.

Все это делает естественным построение и изучение новых классических решений уравнения пентагона. Это актуально уже потому, что ставит весьма интригующие вопросы: пределом каких $6j$ -символов является данное решение уравнения пентагона, и особенно пределом каких квантовых объектов является, скажем, решение аналога уравнения пентагона в размерности 4, приведенное в работе [4]? Такие многомерные обобщения, будучи интересны для топологии, быть может, еще более интересны с точки зрения возможных связей с интегрируемыми системами в многомерном пространстве-времени (нет нужды напоминать, что пока не найдено моделей статистической механики

в трех измерениях, которые поддавались бы такому же анализу, как двумерная модель Изинга, или, скажем, вполне интегрируемых уравнений в $(3 + 1)$ -мерном дискретном пространстве-времени, аналогичных $(2 + 1)$ -мерному уравнению Хироты).

В настоящей статье мы выводим довольно удивительный аналог формулы (2), в котором роль объемов играют проекции площадей граней тетраэдров на некоторую фиксированную плоскость. Находятся и аналоги длин ребер и углов дефектов. Вся конструкция инвариантна относительно группы $SL(2)$, т.е. группы линейных преобразований плоскости, сохраняющих площадь (подобную роль для формулы (2) играет группа движений трехмерного евклидова пространства). Заметим, что мы намеренно не указываем, над каким числовым полем мы рассматриваем эту плоскость. Хотя в настоящей работе мы имеем в виду главным образом поля $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, впоследствии может оказаться, что рассмотрение полей *конечной характеристики* ведет к интересным топологическим инвариантам.

Содержание статьи следующее. В разделе 2 мы вводим $SL(2)$ -аналоги длин ребер, соотношения Кэли–Менгера и двугранных углов и объясняем соображения, из которых они естественно получаются. В разделе 3 строится решение уравнения пентагона – $SL(2)$ -аналог формулы (2). В заключительном разделе 4 мы обсуждаем результаты, намечаем пути дальнейших исследований и высказываем несколько гипотез.

2. $SL(2)$ -АНАЛОГИ МЕТРИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН И СООТНОШЕНИЙ

В этом разделе мы предложим $SL(2)$ -вариант конструкции, которая в евклидовом случае (см. [1]) обладает следующими характерными чертами. В евклидовом случае диаграммы, изображенные на рисунке, рассматриваются как находящиеся в трехмерном евклидовом пространстве. Тогда длина ребра DE определяется через длины остальных ребер, причем уравнение для ее определения может быть записано как $\omega_{DE} = 0$ (см. формулу (1) и пояснения к ней), т.е. сумма некоторых величин (а именно, двугранных углов) по тетраэдрам, окружающим ребро DE , равна нулю (по модулю 2π).

Поместим теперь диаграммы, приведенные на рисунке, вместо трехмерного в *двумерное* пространство (или, если угодно, спроецируем их на двумерное пространство) – аффинную плоскость над некоторым полем. В этой плоскости нам не понадобится вычислять расстояния между точками или углы, но потребуются *площади* фигур. Поэтому будем считать, что в этой плоскости задана *симплектическая структура*. Фиксируем начало координат O , и тогда наши дальнейшие построения будут инвариантны относительно действия группы $SL(2)$.

Аналогом длины отрезка AB (который обозначаем λ_{AB}) будет ориентированная площадь треугольника OAB :

$$\lambda_{AB} \stackrel{\text{def}}{=} S_{OAB}.$$

Понятно, что

$$\lambda_{BA} = -\lambda_{AB}. \quad (3)$$

Площадь произвольного многоугольника есть циркуляция величин λ , например для треугольника ABC

$$S_{ABC} = \lambda_{AB} + \lambda_{BC} + \lambda_{CA}. \quad (4)$$

Аналогом соотношения Кэли–Менгера, налагающим одну зависимость на десять величин λ на правой диаграмме рисунка, служит билинейное соотношение

$$S_{ADB} S_{CDE} + S_{BDC} S_{ADE} + S_{CDA} S_{BDE} = 0 \quad (5)$$

или любое равносильное ему соотношение, получаемое перестановкой букв A, B, C, D и E .

Разделив равенство (5) на $S_{ADE} S_{BDE} S_{CDE}$, получим соотношение, имеющее вид суммы по тетраэдрам $ABDE, BCDE$ и $CADE$, прилежащим к ребру DE :

$$\frac{S_{ADB}}{S_{ADE} S_{BDE}} + \frac{S_{BDC}}{S_{BDE} S_{CDE}} + \frac{S_{CDA}}{S_{CDE} S_{ADE}} = 0. \quad (6)$$

Разумеется, в формуле (6) можно произвести замену $D \leftrightarrow E$, эквивалентную замене $D \rightarrow E$ в *числителях* всех дробей. Теперь можно поступить следующим образом: фиксируем числа p и q и положим (не опасаясь путаницы с *евклидовыми* двугранными углами из формулы (1))

$$\alpha = \frac{pS_{BDC} + qS_{BEC}}{S_{BDE} S_{CDE}}, \quad \beta = \frac{pS_{CDA} + qS_{CEA}}{S_{CDE} S_{ADE}}, \quad \gamma = \frac{pS_{ADB} + qS_{AEB}}{S_{ADE} S_{BDE}}. \quad (7)$$

Стремясь к максимальному сходству с евклидовым случаем, определим функцию ω_{DE} от десяти “длин”:

$$\omega_{DE} = \omega_{DE}(\lambda_{AB}, \dots, \lambda_{DE}) = -\alpha - \beta - \gamma, \quad (8)$$

где подразумевается, что мы раскрываем правую часть по формулам (7) и (4) с учетом условия (3). Тогда условие

$$\omega_{DE} = 0 \quad (9)$$

однозначно определяет величину λ_{DE} , одну и ту же для всех p и q , кроме случая $p+q = 0$, когда это условие превращается в тривиальное тождество.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ПЕНТАГОНА

Теперь можно вычислить частную производную $\partial\omega_{DE}/\partial\lambda_{DE}$ и, записав полученный результат в подходящем виде, получим решение уравнения пентагона, аналогичное (2). Мы разобьем вычисления на простые шаги по аналогии с работами [1] и [5].

Шаг 1. Производная от “двугранного угла” тетраэдра по “длине” противолежащего ребра. Здесь речь идет о тетраэдре, скажем $BCDE$, в котором “длины” всех ребер, кроме BC , фиксированы. Первая из формул (7) очевидным образом дает (с учетом (4))

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_{BC}} = -\frac{p+q}{S_{BDE} S_{CDE}}. \quad (10)$$

Шаг 2. Связь между дифференциалами “длин” двух пересекающихся ребер при постоянных остальных восьми “длинах”. Здесь речь идет о конфигурации из пяти точек и десяти ребер. Пусть меняются только “длины” λ_{BC} и λ_{CA} . Рассмотрим вместе с (10) аналогичную формулу для $\partial\beta/\partial\lambda_{CA}$ и заметим, что “угол” γ не меняется, следовательно, $d\alpha + d\beta = 0$. Отсюда находим

$$\frac{\partial\lambda_{CA}}{\partial\lambda_{BC}} = -\frac{S_{ADE}}{S_{BDE}}. \quad (11)$$

Шаг 3. То же для скрещивающихся ребер. Сначала произведем замену $A \leftrightarrow D$ в формуле (11):

$$\frac{\partial\lambda_{CD}}{\partial\lambda_{BC}} = -\frac{S_{DAE}}{S_{BAE}}. \quad (12)$$

Теперь произведем замены $C \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ в формуле (12):

$$\frac{\partial\lambda_{CD}}{\partial\lambda_{DE}} = -\frac{S_{CAB}}{S_{EAB}}.$$

Рассмотрим λ_{BC} как неявную функцию от λ_{DE} , определяемую условием $\lambda_{CD} = \text{const}$. По формуле дифференцирования неявной функции получим

$$\frac{\partial\lambda_{BC}}{\partial\lambda_{DE}} = \frac{S_{CAB}}{S_{DAE}}. \quad (13)$$

Шаг 4. Завершающий. Теперь пусть могут меняться только λ_{DE} и λ_{BC} . Имеем

$$0 = d(\alpha + \beta + \gamma) = \frac{\partial(\alpha + \beta + \gamma)}{\partial\lambda_{DE}} + \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda_{BC}} \frac{\partial\lambda_{BC}}{\partial\lambda_{DE}},$$

откуда, подставляя выражения (10) и (13) и используя определение (8) величины ω_{DE} , находим

$$\frac{\partial\omega_{DE}}{\partial\lambda_{DE}} = (p + q) \frac{S_{ABC}}{S_{ADE} S_{BDE} S_{CDE}}. \quad (14)$$

Вспомним, что параметры p и q входят в определение (7) аналогов двугранных углов при ребре DE таким образом, что замена $D \leftrightarrow E$ влечет за собой и замену $p \leftrightarrow q$. Резонно выбрать p и q наиболее простым и симметричным образом: положим $p = q = 1/2$. Тогда соотношение (14) можно записать в виде, максимально похожем на выражение (2):

$$\frac{1}{S_{ABC}} = \frac{1}{S_{ADE} S_{BDE} S_{CDE}} \left(\frac{\partial\omega_{DE}}{\partial\lambda_{DE}} \right)^{-1}. \quad (15)$$

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Левая и правая части соотношения (15) столь же естественно соответствуют двум диаграммам, приведенным на рисунке, как и левая и правая части соотношения (2) или, скажем, аналогичных соотношений для квантовых $6j$ -символов. В самом деле, в левой

части (15) присутствуют площади в точности тех треугольников (двумерных граней 3-симплексов), которые присутствуют на левой диаграмме рисунка и отсутствуют на правой, и аналогично для правой части (15). Поэтому не вызывает сомнений возможность “глобализации” формулы (15), т.е. построения на ее основе инвариантов трехмерных многообразий по образцу работы [1].

Похоже, что если прямо следовать простейшей схеме, изложенной в работе [1], то мы получим, по существу, тот же самый инвариант, несмотря на то что в настоящей работе мы используем *площади* проекций двумерных граней на фиксированную плоскость, а в работе [1] использовались *объемы* трехмерных симплексов. Имеющиеся примеры, а также аналогия между матрицей $A = (\partial\omega_a/\partial l_b)$ из работы [1] и *матрицей зацепления* в исчислении Кирби (см., например, раздел 9.4 учебника [6]) наводят на мысль, что этот инвариант, вероятно, совпадает с порядком подгруппы кручения первой группы гомологий H_1 многообразия. Поэтому мы намерены исследовать менее тривиальные случаи, соответствующие нетривиальным гомоморфизмам фундаментальной группы π_1 многообразия в группу $SL(2)$ или (для случая работы [1]) в группу $O(3)$.

По-видимому, конструкции настоящей работы можно обобщить на высшие аналоги уравнения пентагона, аналогично тому, как в работе [4] “метрическое” решение уравнения пентагона обобщается до решения уравнения перестройки $3 \leftrightarrow 3$ кластера из 4-симплексов. Далее, имеет смысл подумать об универсальной конструкции, из которой все наши решения и, возможно, квантовые $6j$ -символы получались бы как частные случаи.

Благодарности. Один из авторов (И. Г. Корепанов) благодарит Российский фонд фундаментальных исследований за финансовую поддержку (грант № 01-01-00059).

Список литературы

- [1] *I. G. Korepanov.* Invariants of PL manifolds from metrized simplicial complexes. Three-dimensional case. J. Nonlin. Math. Phys. 2001 (in press).
- [2] *G. Ponzano, T. Regge.* Semiclassical limit of Racah coefficients. In: Spectroscopic and Group Theoretical Methods in Physics. Ed. F. Bloch. Amsterdam: North-Holland, 1968. P. 1–58.
- [3] *J. D. Roberts.* Geom. Topol. (electronic). 1999. V. 3. P. 21–66.
- [4] *I. G. Korepanov.* A formula with hypervolumes of six 4-simplices and two discrete curvatures. nlin.SI/0003024.
- [5] *И. Г. Корепанов.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 169–176.
- [6] *С. В. Матвеев, А. Т. Фоменко.* Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. 2-е изд. М.: Наука, 1998.

Поступила в редакцию 13.II.2001 г.