Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. М. Атакишиев, М. К. Атакишиева, О q -аналоге гамма-интеграла Эйлера,
ТМФ, 2001, том 129, номер 1, 20–30

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf516>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 15:27:56

© 2001 г. Н. М. Атакишиев*, М. К. Атакишиева†

О q -АНАЛОГЕ ГАММА-ИНТЕГРАЛА ЭЙЛЕРА

Обсуждаются q -аналоги эйлеровой формулы дополнения и эйлерова гамма-интеграла. Ключевую роль в нашей работе играет q -обобщение Рамануджана интегрального представления Эйлера для гамма-функции, которое позволяет вывести интегральные преобразования Меллина для q -полиномов Стилтеса–Вигерта, Роджерса–Сегё, Лагерра, Уолла, альтернативных q -полиномов Шарлье и малых q -полиномов Якоби.

1. ВВЕДЕНИЕ

Интегральные преобразования находят широкое применение при решении различных задач с начальными и граничными условиями для линейных дифференциальных и интегральных уравнений. Более того, классические интегральные преобразования оказываются весьма эффективными при выявлении тесных связей между определенными q -специальными функциями. В частности, уже известны примеры интегральных преобразований Фурье, связывающих некоторые семейства q -полиномов [1], [2] и различные q -обобщения как экспоненциальной функции [3], [4], так и функции Бесселя [5].

Продолжая эту линию исследований, мы выводим интегральные преобразования Меллина для некоторых базисных гипергеометрических ортогональных полиномов из схемы Аски [6]. В разделе 2 приведен явный вид q -аналога формулы дополнения Эйлера, с помощью которого в разделе 3 удастся модифицировать рамануджановское q -обобщение интегрального представления Эйлера для гамма-функции. Это позволяет нам вывести в разделе 4 интегральные представления Меллина для q -полиномов Стилтеса–Вигерта, Роджерса–Сегё, Лагерра, Уолла, альтернативных q -полиномов Шарлье и малых q -полиномов Якоби.

2. q -АНАЛОГ ФОРМУЛЫ ДОПОЛНЕНИЯ ЭЙЛЕРА

“Среди многих замечательных формул, включающих гамма-функцию, формула дополнения Эйлера

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x} \quad (2.1)$$

---

*Instituto de Matemáticas, UNAM, Cuernavaca, Morelos, México.
E-mail: natig@matcuer.unam.mx

†Facultad de Ciencias, UAEM, Cuernavaca, Morelos, México

особенно примечательна, поскольку она связывает гамма-функцию с функцией синус” [7]. Чтобы получить q -аналог формулы (2.1), необходимо использовать определение q -гамма-функции $\Gamma_q(x)$ (мы придерживаемся общепринятых в теории q -специальных функций обозначений, см. [7] или [8]):

$$\Gamma_q(x) := \frac{(q; q)_\infty}{(q^x; q)_\infty} (1 - q)^{1-x}, \quad 0 < q < 1. \quad (2.2)$$

Это q -обобщение гамма-функции $\Gamma(x)$ является решением функционального (или разностного) уравнения

$$f(x+1) = \frac{1-q^x}{1-q} f(x), \quad f(1) = 1. \quad (2.3)$$

В пределе, когда $q \rightarrow 1 - 0$, функция $\Gamma_q(x)$ совпадает с $\Gamma(x)$, т.е.

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} \Gamma_q(x) = \Gamma(x). \quad (2.4)$$

Из определения (2.2) следует, что q -аналог формулы дополнения Эйлера (2.1) имеет вид

$$\Gamma_q(x) \Gamma_q(1-x) = \frac{i q^{\frac{1}{8}} (1-q) (q; q)_\infty^3}{q^{\frac{x}{2}} \theta_1(\ln q^{-\frac{ix}{2}}, q^{\frac{1}{2}})}, \quad (2.5)$$

где тэта-функция Якоби

$$\begin{aligned} \theta_1(z, q) &:= 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)z = \\ &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin z (q^2; q^2)_\infty (q^2 e^{2iz}; q^2)_\infty (q^2 e^{-2iz}; q^2)_\infty. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Легко проверить, что правая часть формулы (2.5) совпадает с функцией $\pi / \sin \pi x$ в пределе $q \rightarrow 1 - 0$. Действительно (ср. с доказательством предельного соотношения (2.4) в работе [9]),

$$\begin{aligned} \frac{q^{\frac{x}{2}} \theta_1(\ln q^{-\frac{ix}{2}}, q^{\frac{1}{2}})}{i q^{\frac{1}{8}} (1-q) (q; q)_\infty^3} &= \frac{(1-q^x) (q^{1+x}; q)_\infty (q^{1-x}; q)_\infty}{(1-q) (q; q)_\infty^2} = \\ &= \frac{1-q^x}{1-q} \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1-q^{n+x})(1-q^{n-x})}{(1-q^n)(1-q^n)}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 1-0} \frac{q^{\frac{x}{2}} \theta_1(\ln q^{-\frac{ix}{2}}, q^{\frac{1}{2}})}{i q^{\frac{1}{8}} (1-q) (q; q)_\infty^3} &= x \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(n+x)(n-x)}{n^2} = \\ &= x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right) = \frac{\sin \pi x}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Помимо этого, если сдвинуть x на 1 в левой части (2.5), то в соответствии с функциональным уравнением (2.3) это приводит лишь к умножению функции $\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)$ на фактор $-q^x$. Это согласуется со свойством преобразования тэта-функции

$$\theta_1(z + \pi\tau, q) = -q^{-1}e^{-2iz}\theta_1(z, q), \quad q = e^{\pi i\tau}, \quad (2.8)$$

по отношению к квазипериоду $\pi\tau = -i \ln q$ (ср. с формулой (10.7.6), с. 509 в книге [7], где пропущен знак минус в четвертой строке).

Почти все формулы этого раздела, за исключением явного вида соотношения (2.5) и последующего предельного перехода (2.7), приведены в недавно опубликованной монографии [7] по специальным функциям. q -Аналог (2.5) формулы дополнения Эйлера интересен и сам по себе. Кроме того, он понадобится нам в последующем.

3. q -АНАЛОГ ГАММА-ИНТЕГРАЛА

Рассмотрим интеграл

$$g_q(x) := \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{E_q((1-q)t)}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (3.1)$$

где $E_q(z)$ является q -экспоненциальной функцией Джексона,

$$E_q(z) := \sum_{n=0}^\infty \frac{q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q; q)_n} z^n = (-z; q)_\infty. \quad (3.2)$$

Известно, что функция (3.1) представляет собой частный случай рамануджановского интегрального обобщения бета-функции [10] и поэтому

$$g_q(x) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(1-x)}. \quad (3.3)$$

Детальное обсуждение формулы (3.3) можно найти в статьях [11], [12]. Поскольку q -экспоненциальная функция $E_q((1-q)t)$ стремится к e^t в пределе, когда $q \rightarrow 1-0$, формула (3.3) является q -обобщением интеграла Эйлера

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (3.4)$$

для гамма-функции $\Gamma(x)$. Несмотря на то что обе функции $g_q(x)$ и $\Gamma_q(x)$ совпадают с гамма-функцией $\Gamma(x)$ в пределе $q \rightarrow 1-0$, очевидно, что они отличаются друг от друга для произвольных $q \in (0, 1)$. В частности, их значения в целочисленных точках $x = n = 0, 1, 2, \dots$ связаны между собой следующим образом:

$$g_q(n) = \frac{\ln q^{-1}}{1-q} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \Gamma_q(n). \quad (3.5)$$

Это соотношение непосредственно следует из формулы (3.3), если учесть то обстоятельство, что вычеты функций $\Gamma(z)$ и $\Gamma_q(z)$ в простых полюсах $z = -n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) соответственно имеют вид $(-1)^n/n!$ и $(1-q)^{n+1}/(q^{-n}; q)_n \ln q^{-1}$.

Подчеркнем, что рамануджановский результат (3.3) не дает интегрального представления для q -гамма-функции $\Gamma_q(x)$ в той форме, в какой оно дается, например, интегралом Эйлера (3.4) для гамма-функции $\Gamma(x)$. Однако можно преобразовать соотношение (3.3) таким образом, чтобы оно содержало непосредственно q -гамма-функцию $\Gamma_q(x)$, а не $\Gamma_q(1-x)$. Введем с этой целью функцию

$$\begin{aligned} G_q(x) &:= \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} g_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{E_q((1-q)t)} = \\ &= \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(1-x)}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Легко проверить, что, во-первых, $G_q(x)$ удовлетворяет тому же функциональному (или разностному) уравнению (2.3) для q -гамма-функции $\Gamma_q(x)$ и, во-вторых, $G_q(x)$ совпадает с $\Gamma_q(x)$ при целочисленных значениях $x = n = 0, 1, 2, \dots$, т.е. $G_q(n) = \Gamma_q(n)$. Наконец, в пределе, когда q стремится к 1, $G_q(x)$ стремится к $\Gamma(x)$. Очевидно, что уравнение (2.3) определяет его решения с точностью до произвольного периодического множителя с единичным периодом. Это означает, что если записать

$$G_q(x) = c_q(x)\Gamma_q(x), \quad (3.7)$$

то в нашем конкретном случае этот множитель $c_q(x)$ должен удовлетворять следующим условиям:

- а) $c_q(x+1) = c_q(x)$;
- б) $c_q(n) = 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$;
- в) $\lim_{q \rightarrow 1-0} c_q(x) = 1$.

Чтобы определить $c_q(x)$, достаточно подставить (3.7) в (3.6) и воспользоваться формулами дополнения (2.1) и (2.5). Это приводит к соотношению

$$c_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} \frac{\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(x)\Gamma_q(1-x)} = \frac{\pi i}{\ln q} q^{\frac{1}{2}(x^2 - \frac{1}{4})} \frac{\theta_1(\ln q^{-\frac{ix}{2}}, q^{\frac{1}{2}})}{(q; q)_\infty^3 \sin \pi x}. \quad (3.8)$$

Периодичность $c_q(x)$ теперь является следствием свойства преобразования (2.8) тэта-функции $\theta_1(z, q)$. Чтобы убедиться в справедливости условий “б” и “в”, достаточно воспользоваться первой строкой в (3.8).

Таким образом, из (3.6) и (3.7) следует, что

$$c_q(x)\Gamma_q(x) = \frac{1-q}{\ln q^{-1}} q^{\frac{x(x-1)}{2}} \int_0^\infty \frac{t^{x-1} dt}{E_q((1-q)t)}, \quad \operatorname{Re} x > 0, \quad (3.9)$$

где периодический множитель $c_q(x)$ определен в (3.8). Конечно, можно подставить (3.8) в (3.9) и сократить общие множители в полученном таким образом соотношении. Однако интегральное представление в форме (3.9) достаточно удобно для последующих применений, поскольку периодический множитель $c_q(x)$ обладает очень простыми свойствами (в частности, он не меняется при сдвигах $x \rightarrow x + n$, где n — произвольное целое число).

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МЕЛЛИНА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ q -ПОЛИНОМОВ

Хорошо известно, что интегральное представление Эйлера (3.4) является интегральным преобразованием Меллина

$$g(z) = \mathfrak{M}\{f(t); z\} = \int_0^\infty f(t)t^{z-1} dt \quad (4.1)$$

экспоненциальной функции $f(t) = e^{-t}$. Аналогично формулы (3.1) или (3.9) представляют собой преобразование Меллина функции $E_q^{-1}((1-q)t)$:

$$\mathfrak{M}\{E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) = \frac{\ln q^{-1}}{1-q} c_q(x) q^{-\frac{x(x-1)}{2}} \Gamma_q(x), \quad \operatorname{Re} x > 0. \quad (4.2)$$

Вышеприведенная формула может быть использована для преобразования q -полиномов относительно переменной x в q -полиномы переменной q^{-x} (примеры таких полиномов из схемы Аски [6] приведены ниже). Действительно, пусть

$$p_n(x; q) = \sum_{k=0}^n a_{nk}(q) x^k \quad (4.3)$$

— полином степени n относительно переменной x (с коэффициентами $a_{nk}(q)$, которые могут зависеть помимо q от некоторых других параметров). Тогда из соотношений (4.1) и (4.2) следует, что преобразование Меллина функции $E_q^{-1}((1-q)t)$, умноженной на полином $p_n(\lambda t; q)$, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{p_n(\lambda t; q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} &= \sum_{k=0}^n \lambda^k a_{nk}(q) \mathfrak{M}\{t^k E_q^{-1}((1-q)t); x\} = \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda^k a_{nk}(q) g_q(x+k), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где λ — некоторая константа. Теперь мы можем подставить в (4.4) явный вид $g_q(x+k)$ из (4.2) и воспользоваться периодичностью $c_q(x)$ и соотношением

$$\Gamma_q(x+n) = \frac{(q^x; q)_n}{(1-q)^n} \Gamma_q(x), \quad (4.5)$$

которое является прямым следствием функционального уравнения (2.3) для q -гамма-функции $\Gamma_q(x)$. Это приводит к требуемому результату

$$\mathfrak{M}\{p_n(\lambda t; q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) \sum_{k=0}^n a_{nk}(q) q^{-\frac{k(k-1)}{2}} \left(\frac{\lambda q^{-x}}{1-q} \right)^k (q^x; q)_k. \quad (4.6)$$

Поскольку q -сдвинутый факториал

$$(z; q)_k = \sum_{j=0}^k \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q q^{\frac{j(j-1)}{2}} (-z)^j \quad (4.7)$$

является полиномом степени k по z , то правая часть формулы (4.6) представляет собой полином степени n относительно q^{-x} .

Мы приводим ниже преобразования Меллина для ряда семейств ортогональных q -полиномов из схемы Аски (см. [6], с. 61, 62).

1. Полиномы Стильтеса–Вигерта

$$S_n(x; q) := {}_1\phi_1(q^{-n}; 0; q, -q^{n+1}x) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} q^{k[n+\frac{k+1}{2}]} x^k \quad (4.8)$$

занимают самый низкий уровень в схеме Аски для базисных гипергеометрических полиномов с непрерывным свойством ортогональности (см. [6], с. 61; мы используем другую нормировку в определении (4.8)). Подставляя явный вид коэффициентов $a_{n,k}(q)$ из (4.8) в правую часть (4.6), получаем, что в данном случае

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{S_n(\lambda t; q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} &= g_q(x) {}_2\phi_1\left(q^{-n}, q^x; 0; q, \frac{\lambda q^{n+1-x}}{1-q}\right) = \\ &= q^{-\frac{n(n-1)}{2}} (-a)^{-n} U_n^{(a)}(q^{-x}; q) g_q(x), \end{aligned} \quad (4.9)$$

где $\lambda a = (1-q)q^{-n}$ и $U_n^{(a)}(x; q)$ являются полиномами Аль-Салама–Карлица I

$$U_n^{(a)}(x; q) := (-a)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} {}_2\phi_1\left(q^{-n}, x^{-1}; 0; q, q\frac{x}{a}\right) \quad (4.10)$$

со следующего уровня схемы Аски для q -полиномов с дискретным свойством ортогональности (см. [6], с. 62 и 113). Таким образом, интегральное преобразование Меллина (4.6) связывает два различных семейства q -полиномов: Стильтеса–Вигерта и Аль-Салама–Карлица I.

Отметим, что замена базы $q \rightarrow q^{-1}$ в (4.8) приводит к полиномам Роджерса–Сегё [13]–[15]

$$H_n(z; q) := {}_2\phi_0(q^{-n}, 0; q, q^n z) = \sum_{k=0}^n q^{-\frac{k(k-1)}{2}} \frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} (-q^n z)^k, \quad (4.11)$$

которые являются q -аналогами полиномов Эрмита на единичном круге. В этом случае формула (4.6) приводит к следующему результату:

$$\mathfrak{M}\{H_n(\lambda t; q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) {}_3\phi_0\left(q^{-n}, q^x, 0; q, -\frac{\lambda q^{n-x}}{1-q}\right). \quad (4.12)$$

Поскольку

$$\frac{(q^{-n}; q)_k}{(q; q)_k} = (-1)^k q^{\frac{k(k-1)}{2} - nk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q, \quad (4.13)$$

то полиномы (4.8) можно представить как

$$S_n(x; q) = \sum_{k=0}^n q^{k^2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-x)^k. \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} S_n(x; q) = (1-x)^n. \quad (4.15)$$

Кроме того, известно (см. [6], с. 143), что

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} (1-q)^{-n} U_n^{(a(q-1))}(q^x; q) = a^n C_n(x; a), \quad (4.16)$$

где $C_n(x; a)$ являются полиномами Шарлье. Поэтому преобразование Меллина (4.9) в пределе, когда параметр $q \rightarrow 1-0$, принимает вид (ср. [16])

$$\mathfrak{M}\left\{\left(1 + \frac{t}{a}\right)^n e^{-t}; x\right\} = C_n(-x; a) \Gamma(x). \quad (4.17)$$

Точно так же легко проверить, что предельная форма преобразования Меллина (4.12) совпадает с (4.17), причем $a = 1/\lambda$.

2. На втором уровне схемы Аски с непрерывным свойством ортогональности имеются два семейства q -полиномов типа (4.3): q -полиномы Лагерра и Уолла (которые иногда называют малыми q -полиномами Лагерра).

Семейство q -полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(x; q)$ ([6], с. 108) определяется как

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha)}(x; q) &:= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n}{(q; q)_n} {}_1\phi_1(q^{-n}; q^{\alpha+1}; q, -q^{n+\alpha+1}x) = \\ &= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n}{(q; q)_n} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k q^{k[n+\alpha+\frac{k+1}{2}]}}{(q^{\alpha+1}; q)_k (q; q)_k} x^k. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\{L_n^{(\alpha)}(\lambda t; q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} &= \\ &= \frac{(q^{\alpha+1}; q)_n}{(q; q)_n} g_q(x) {}_2\phi_1\left(q^{-n}, q^x; q^{\alpha+1}; q, \frac{\lambda q^{n+\alpha+1-x}}{1-q}\right). \end{aligned} \quad (4.19)$$

При $\lambda = 1-q$ можно просуммировать базисный гипергеометрический ряд ${}_2\phi_1$ в преобразовании Меллина (4.19) с помощью q -формулы Чжу–Вандермонда [8]

$${}_2\phi_1\left(a, q^{-n}; c; q, \frac{cq^n}{a}\right) = \frac{(c/a; q)_n}{(c; q)_n}. \quad (4.20)$$

Таким образом, преобразование (4.19) в этом частном случае сводится к следующему преобразованию Меллина:

$$\mathfrak{M}\{L_n^{(\alpha)}((1-q)t) E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) \frac{(q^{\alpha+1-x}; q)_n}{(q; q)_n}. \quad (4.21)$$

Полиномы Уолла задаются ([6], с. 107) формулой

$$p_n(x; a|q) := {}_2\phi_1(q^{-n}, 0; aq; q, qx) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k q^k}{(aq; q)_k (q; q)_k} x^k. \quad (4.22)$$

Следовательно, в этом случае мы получаем

$$\mathfrak{M}\{p_n(\lambda t; a|q)E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) {}_3\phi_1\left(q^{-n}, q^x, 0; aq; q, -\frac{\lambda q^{1-x}}{1-q}\right). \quad (4.23)$$

Поскольку

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} L_n^{(\alpha)}((1-q)y; q) = L_n^{(\alpha)}(y),$$

преобразование Меллина (4.19) в пределе, когда параметр $q \rightarrow 1-0$, сводится к виду

$$\mathfrak{M}\{L_n^{(\alpha)}(at)e^{-t}; x\} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_2F_1(-n, x; \alpha+1; a)\Gamma(x). \quad (4.24)$$

Гипергеометрические полиномы ${}_2F_1$ в (4.24) являются на самом деле полиномами Мейк-снера–Поллачека (ср. [16]).

Аналогично, поскольку

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} p_n((1-q)y; q^\alpha|q) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(y),$$

предельная форма преобразования Меллина (4.23) совпадает с (4.24).

3. На втором уровне схемы Аски с дискретным свойством ортогональности есть лишь одно семейство q -полиномов типа (4.3), а именно альтернативные q -полиномы Шарлье ([6], с. 110):

$$K_n(x; a; q) = {}_2\phi_1(q^{-n}, -aq^n; 0; q, qx) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k (-aq^n; q)_k}{(q; q)_k} (qx)^k. \quad (4.25)$$

Преобразование Меллина (4.6), соответствующее этому случаю, имеет вид

$$\mathfrak{M}\{K_n(\lambda t; a; q)E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) {}_3\phi_1\left(q^{-n}, -aq^n, q^x; 0; q, -\frac{\lambda q^{1-x}}{1-q}\right). \quad (4.26)$$

С помощью (4.13) можно представить соотношение (4.25) в виде

$$K_n(x; a; q) = \sum_{k=0}^n q^{\frac{k(k+1)}{2} - nk} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-aq^n; q)_k (-x)^k. \quad (4.27)$$

Следовательно,

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} K_n(x; a; q) = [1 - (1+a)x]^n.$$

Поэтому в пределе, когда параметр q стремится к 1, преобразование Меллина (4.26) приобретает вид (ср. с (4.17))

$$\mathfrak{M}\{[1 - (1+a)\lambda t]^n e^{-t}; x\} = C_n\left(-x; -\frac{1}{\lambda(1+a)}\right)\Gamma(x). \quad (4.28)$$

4. Наконец, на третьем уровне схемы Аски с непрерывным свойством ортогональности есть еще одно семейство типа (4.3), а именно малые q -полиномы Якоби

$$p_n(x; a, b|q) := {}_2\phi_1(q^{-n}, abq^{n+1}; aq; q, qx) = \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k (abq^{n+1}; q)_k}{(q; q)_k (aq; q)_k} (qx)^k. \quad (4.29)$$

Преобразование Меллина (4.6) для этих полиномов имеет вид

$$\mathfrak{M}\{p_n(\lambda t; a, b|q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} = g_q(x) {}_3\phi_1\left(q^{-n}, abq^{n+1}, q^x; aq; q, -\frac{\lambda q^{1-x}}{1-q}\right). \quad (4.30)$$

Если выбрать константу $\lambda = (1 - q^{-1})/b$, то можно упростить базисный гипергеометрический ряд ${}_3\phi_1$ в (4.30) с помощью формулы преобразования [8]

$${}_2\phi_1(q^{-n}, \beta; \gamma; q, z) = \frac{(\frac{\gamma}{\beta}; q)_n}{(\gamma; q)_n} {}_3\phi_1\left(q^{-n}, \beta, \frac{q}{z}; \frac{\beta q^{1-n}}{\gamma}; q, \frac{z}{\gamma}\right) \quad (4.31)$$

для обрывающегося ряда ${}_2\phi_1$. Это приводит к преобразованию Меллина

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}\left\{p_n\left(\frac{(1-q^{-1})t}{b}; a, b \mid q\right) E_q^{-1}((1-q)t); x\right\} = \\ = (-a^2 b)^n \frac{(bq; q)_n}{(aq; q)_n} q^{-\frac{n(n+1)}{2}} p_n(q^{-x}; b, a|q) g_q(x), \end{aligned} \quad (4.32)$$

воспроизводящему малые q -полиномы Якоби.

Отметим, что частный случай малых q -полиномов Якоби (4.29) с $a = b = 1$ известен как малые q -полиномы Лежандра

$$p_n(x|q) := {}_2\phi_1(q^{-n}, q^{n+1}; q; q, qx). \quad (4.33)$$

Преобразование Меллина (4.32) для этих полиномов имеет вид

$$\mathfrak{M}\{p_n((1-q^{-1})t|q) E_q^{-1}((1-q)t); x\} = (-1)^n q^{-\frac{n(n+1)}{2}} p_n(q^{-x}|q) g_q(x).$$

Известны следующие два предельных соотношения для малых q -полиномов Якоби (4.29):

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} p_n(x; q^\alpha; q^\beta|q) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2x), \quad (4.34a)$$

$$\lim_{q \rightarrow 1-0} p_n\left(\frac{1}{2}(1-q)x; q^\alpha, -q^\beta \mid q\right) = \frac{n!}{(\alpha+1)_n} L_n^{(\alpha)}(x), \quad (4.34b)$$

где $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ являются классическими полиномами Якоби. В случае первого предельного соотношения преобразование Меллина (4.30) (с $a = q^\alpha$ и $b = q^\beta$) сводится (ср. [16]) к преобразованию

$$\mathfrak{M}\{P_n^{(\alpha, \beta)}(1-2\lambda t)e^{-t}; x\} = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} {}_3F_1(-n, x, n+\alpha+\beta+1; \alpha+1; \lambda) \Gamma(x). \quad (4.35)$$

Если подставить $\lambda = (1-q)\gamma/2$, $a = q^\alpha$ и $b = -q^\beta$ в преобразование Меллина (4.30), то второй предельный переход (4.34b) соответствует тому же интегральному преобразованию (4.24) для полиномов Лагерра $L_n^{(\alpha)}(\gamma t)$ с $a = \gamma$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели лишь те семейства q -полиномов из схемы Аски, которые имеют ту же форму зависимости от переменной x , как в (4.3) (т.е. когда независимая переменная x является аргументом соответствующего обрывающегося базисного гипергеометрического ряда). Оставшаяся часть полиномов из той же схемы Аски характерна тем, что независимая переменная x входит в один (или два) из параметров соответствующего базисного гипергеометрического ряда. Простейшим примером такого рода являются дискретные q -полиномы Эрмита II

$$\begin{aligned}\tilde{h}_n(x; q) &:= i^{-n} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} {}_2\phi_0(q^{-n}, ix; q, -q^n) = \\ &= i^{-n} q^{-\frac{n(n-1)}{2}} \sum_{k=0}^n \frac{(q^{-n}; q)_k (ix; q)_k}{(q; q)_k} q^{nk - \frac{k(k-1)}{2}}.\end{aligned}\quad (5.1)$$

Существуют также полиномы Аль-Салама–Карлица II, большие q -полиномы Лагерра, большие q -полиномы Лежандра и большие q -полиномы Якоби. Поэтому следующий естественный шаг – применить технику вывода интегральных преобразований Меллина к вышеупомянутым семействам q -полиномов. Подробное обсуждение этих результатов будет приведено в следующей публикации.

Рассмотренная выше техника может быть применена к решению некоторых задач математической физики. Хорошо известно, что в нерелятивистской квантовой механике координатное и импульсное представления связаны между собой интегральным преобразованием Фурье. Однако в некоторых релятивистских подходах к квантовой механике переход от импульсного представления к конфигурационному осуществляется с помощью интегрального преобразования Меллина. Например, релятивистская квазипотенциальная [17], [18] модель линейного гармонического осциллятора, детально изученная в работах [19]–[21], описывается разностным гамильтонианом в конфигурационном x -представлении. Переход от конфигурационного к импульсному представлению в этом случае осуществляется интегральным преобразованием Меллина относительно переменной светового фронта $p^+ = p_0 + p$. Поэтому мы полагаем, что рассмотренная нами техника может быть использована для построения различных q -обобщений подобных моделей, основанных на разностных уравнениях.

Благодарности. Мы благодарны за частичную поддержку данного исследования, полученную нами в рамках гранта UNAM–DGAPA IN112300.

Список литературы

- [1] *Н. М. Атакишиев, Ш. М. Нагиев.* ТМФ. 1994. Т. 98. № 2. С. 241–247; J. Phys. A. 1994. V. 27. № 17. P. L611–L615.
- [2] *N. M. Atakishiyev.* J. Phys. A. 1997. V. 30. № 24. P. L815–L820.
- [3] *N. M. Atakishiyev and P. Feinsilver.* J. Phys. A. 1996. V. 29. № 8. P. 1659–1664.
- [4] *N. M. Atakishiyev.* J. Phys. A. 1996. V. 29. № 10. P. L223–L227; J. Phys. A. 1996. V. 29. № 22. P. 7177–7181.

- [5] *N. M. Atakishiyev*. Fourier–Gauss transforms of q -exponential and q -Bessel functions. In: *Symmetries and Integrability of Difference Equations*. Lecture Note Series. V. 255. Eds. P. A. Clarkson and F. W. Nijhoff. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. P. 345–352; Fourier–Gauss transforms of some q -special functions. In: *CRM Proceedings and Lecture Notes*. V. 25. Eds. D. Levi and O. Ragnisco. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2000. P. 13–21.
- [6] *R. Koekoek and R. F. Swarttouw*. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue. Report 98–17. Delft: Delft University of Technology, 1998.
- [7] *G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy*. *Special Functions*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
- [8] *Дж. Гаснер, М. Рахман*. Базисные гипергеометрические ряды. М.: Мир, 1993.
- [9] *G. E. Andrews*. q -Series: Their Development and Application in Analysis. Number Theory, Combinatorics, Physics, and Computer Algebra, CBMS Regional Conference Lecture Series. V. 66. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1986.
- [10] *S. Ramanujan*. Messenger of Math. 1915. V. 44. P. 10–18; reprinted: Some definite integrals. In: *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*. Eds. G. H. Hardy, P. V. Seshu Aiyar, and B. M. Wilson. Cambridge: Cambridge University Press, 1927. P. 53–58.
- [11] *R. Askey*. Amer. Math. Monthly. 1980. V. 87. № 5. P. 346–359.
- [12] *R. Askey*. Beta integrals and q -extensions. In: *Proc. of the Ramanujan Centennial International Conference (Annamalaingar, India, December 15–18, 1987)*. Eds. R. Balakrishnan, K. S. Padmanabhan, and V. Thangaraj. Trichy: Ramanujan Mathematical Society, 1988. P. 85–102.
- [13] *G. Szegő*. Sitz. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-Math. Klasse. 1926. V. 19. P. 242–252; reprinted: Ein Beitrag zur Theorie der Thetafunktionen. In: *Collected Papers*. Ed. R. Askey. Boston, MA: Birkhäuser, 1982. V. 1. P. 795–805.
- [14] *W. A. Al-Salam and L. Carlitz*. Boll. Unione Matem. Ital. 1957. V. 12. № 3. P. 414–417.
- [15] *L. Carlitz*. Publ. Math. Debrecen. 1958. V. 5. № 3, 4. P. 222–228.
- [16] *M. K. Atakishiyeva and N. M. Atakishiyev*. J. Phys. A. 1999. V. 32. № 3. P. L33–L41.
- [17] *A. A. Logunov and A. N. Tavkhelidze*. Nuovo Cimento. 1963. V. 29. № 2. P. 380–399.
- [18] *V. G. Kadyshevsky*. Nucl. Phys. B. 1968. V. 6. № 2. P. 125–148.
- [19] *А. Д. Донков, В. Г. Кадыевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов*. ТМФ. 1971. Т. 8. № 1. С. 61–72.
- [20] *Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов, Ш. М. Нагиев*. ТМФ. 1980. Т. 44. № 1. С. 47–62.
- [21] *Н. М. Атакишиев, Р. М. Мир-Касимов*. ТМФ. 1986. Т. 67. № 1. С. 68–75.

Поступила в редакцию 13.II.2001 г.,
после доработки 22.IV.2001 г.