Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. У. Уразбоев, А. Б. Хасанов, Интегрирование уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником при начальных данных типа “ступеньки”, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 38–54

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf518>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 12:45:46

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ
КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА С САМОСОГЛАСОВАННЫМ
ИСТОЧНИКОМ ПРИ НАЧАЛЬНЫХ
ДАННЫХ ТИПА “СТУПЕНЬКИ”**

Показано, что “ступенчатые” решения уравнения Кортевега–де Фриза с самосогласованным источником можно получить с помощью метода обратной задачи рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля на всей прямой.

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1967 году Гарднер, Грин, Крускал и Миура (ГГКМ) [1] предложили метод обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля как метод решения задачи Коши для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0.$$

Вскоре после этого Лакс [2] указал на общий характер этого метода. Несколько лет спустя Захаров и Шабат [3] путем нетривиального распространения методов ГГКМ и Лакса смогли решить задачу Коши для другого важного нелинейного эволюционного уравнения – так называемого нелинейного уравнения Шредингера. Тем самым был открыт путь для построения некоторых других классов уравнений, решаемых этими методами. В работе [4] была установлена важная роль, которую играют квадраты собственных функций в задачах на собственные значения для системы дифференциальных уравнений первого порядка. Ньюэлл [5] показал, что именно квадраты собственных функций, а не сами собственные функции, существенны при интегрировании с помощью метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля. Строгое доказательство этого факта приведено в книге [6].

В работе [7] с помощью метода обратной задачи рассеяния была решена задача Коши для уравнения КдФ с начальными данными типа “ступеньки” и построено асимптотическое решение при $t \rightarrow \infty$ в окрестности переднего фронта. Эта задача впервые рассматривалась в работах [8], [9], где приближенным методом Уизема было построено

*Ургенчский государственный университет, Ургенч, Узбекистан

асимптотическое решение, выраженное через эллиптические функции Якоби с медленно меняющимися параметрами.

В данной работе рассматривается задача

$$\begin{aligned} u_t - 6uu_x + u_{xxx} &= 2 \sum_{n=1}^N (\varphi_n \psi_n)_x, \\ -\varphi_n'' + u(x, t)\varphi_n &= \lambda_n \varphi_n, \\ -\psi_n'' + u(x, t)\psi_n &= \lambda_n \psi_n, \quad n = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^1. \quad (1.2)$$

Начальная функция $u_0(x)$ обладает следующими свойствами:

$$1) \quad u_0(x) \rightarrow \begin{cases} 0, & x \rightarrow -\infty, \\ c^2, & x \rightarrow \infty, \quad c > 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

2) уравнение Штурма–Лиувилля

$$-y'' + u_0(x)y = \lambda y, \quad x \in \mathbb{R}^1,$$

имеет ровно N собственных значений $\lambda_1(0), \lambda_2(0), \dots, \lambda_N(0)$.

В рассматриваемой задаче функция $\varphi_n(x, t)$ является собственной функцией уравнения Штурма–Лиувилля с потенциалом $u(x, t)$, а $\psi_n(x, t)$ – линейно независимое с $\varphi_n(x, t)$ решение, причем

$$W\{\varphi_n(x, t), \psi_n(x, t)\} \equiv \varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} = \omega_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.4)$$

где $\omega_n(t)$ – изначально заданные непрерывные функции от t , удовлетворяющие условию

$$\int_0^t \omega_n(t) dt < -\lambda_n(0), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.5)$$

при всех неотрицательных значениях t .

Будем предполагать, что решение $u(x, t)$ задачи (1.1)–(1.5) существует, обладает требуемой гладкостью и достаточно быстро стремится к своим пределам при $x \rightarrow \pm\infty$, т.е.

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|u(x, t)| dx + \int_0^{\infty} (1+x)|u(x, t) - c^2| dx + \sum_{k=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^k u(x, t)}{\partial x^k} \right| dx < \infty. \quad (1.6)$$

Основная цель данной работы – получить представления для решений $u(x, t)$, $\varphi_n(x, t)$, $\psi_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, в рамках метода обратной задачи рассеяния для уравнения Штурма–Лиувилля.

Отметим, что в “быстроубывающем” случае ($c = 0$) задача (1.1)–(1.5) была рассмотрена в работе [10], где, в частности, был получен закон эволюции данных рассеяния.

Оказалось, что дискретные собственные значения рассматриваемой задачи не инвариантны по t . Эта ситуация возникает в задачах, для которых полюс дисперсионного соотношения [5] совпадает с одним из значений дискретного спектра, при этом соответствующий солитон по-прежнему сохраняет свою индивидуальность, но теперь это изменяющаяся индивидуальность. В “быстроубывающем” случае непрерывный спектр оператора Штурма–Лиувилля заполняет положительную полуось $(0, \infty)$ и является двукратным, а в случае $c \neq 0$ двукратный непрерывный спектр состоит из интервала (c^2, ∞) ; кроме того, у этого оператора появляется простой непрерывный спектр, заполняющий интервал $(0, c^2)$, что является причиной появления бесконечного числа невзаимодействующих солитонов в окрестности переднего фронта при $t \rightarrow \infty$.

2. ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

Рассмотрим уравнение Штурма–Лиувилля на всей оси $(-\infty < x < \infty)$

$$L_0 y = -y'' + V(x)y = k^2 y \quad (2.1)$$

с вещественным локально суммируемым потенциалом $V(x)$, имеющим разные пределы

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = c^2, \quad c \geq 0. \quad (2.2)$$

Предположим, что $V(x)$ достаточно быстро стремится к своим пределам, так что

$$\int_{-\infty}^0 (1-x)|V(x)| dx < \infty, \quad \int_0^{\infty} (1+x)|V(x) - c^2| dx < \infty. \quad (2.3)$$

В этом разделе будут приведены необходимые для дальнейшего сведения, касающиеся прямой и обратной задач рассеяния для уравнения (2.1). Задача рассеяния на потенциале $V(x)$ с разными пределами на $\pm\infty$ рассматривалась в работах [11], [12]. Были изучены свойства S -матрицы и выведены интегральные уравнения для решения обратной задачи рассеяния. Положим $l = \sqrt{k^2 - c^2}$, выбирая ветвь корня в плоскости с разрезом $[-c, c]$ такую, что $\operatorname{Im} l > 0$ при $\operatorname{Im} k > 0$ и $\operatorname{sign} l = \operatorname{sign} k$ при действительных k и $|k| > c$. Обозначим через $f^+(x, k)$ и $f^-(x, k)$ решения Йоста уравнения (2.1) с асимптотиками

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} f^+(x, k) e^{-ilx} &= 1, \quad \operatorname{Im} l \geq 0, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f^-(x, k) e^{ikx} &= 1, \quad \operatorname{Im} k \geq 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

При условии (2.3) такие решения существуют, определяются асимптотиками (2.4) однозначно и оказываются регулярными функциями l и k при $\operatorname{Im} l > 0$ и $\operatorname{Im} k > 0$, соответственно. Справедливы представления с помощью операторов преобразования

$$\begin{aligned} f^+(x, k) &= e^{ilx} + \int_x^{\infty} A_1(x, z) e^{ilz} dz, \\ f^-(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x A_2(x, z) e^{-ikz} dz. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Ядра этих операторов $A_1(x, z)$ и $A_2(x, z)$ – вещественные функции, связанные с потенциалом $V(x)$ соотношениями

$$V(x) = 2 \frac{dA_2(x, x)}{dx}, \quad V(x) = c^2 - 2 \frac{dA_1(x, x)}{dx}. \quad (2.6)$$

При вещественных $k \neq 0$ функции $f^-(x, -k) = \overline{f^-(x, k)}$ и $f^+(x, -k) = \overline{f^+(x, k)}$ ($\text{Im } f^+(x, k) = 0$ при $|k| \leq c$) также являются решениями уравнения (2.1), т.е. пары функций $\{f^+(x, k), f^+(x, -k)\}$ и $\{f^-(x, k), f^-(x, -k)\}$ являются парами линейно независимых решений уравнения (2.1), поэтому

$$f^+(x, k) = C_{11}(k)f^-(x, k) + C_{12}(k)f^-(x, -k), \quad |k| > 0, \quad (2.7)$$

$$f^-(x, k) = C_{22}(k)f^+(x, k) + C_{21}(k)f^+(x, -k), \quad |k| > c. \quad (2.8)$$

Сформулируем основные свойства коэффициентов $C_{ij}(k)$.

ЛЕММА 2.1. *При действительных k справедливы соотношения*

$$\begin{aligned} C_{11}(k) &= \frac{1}{2ik} W\{f^+(x, k), f^-(x, -k)\}, \\ C_{12}(k) &= \frac{1}{2ik} W\{f^-(x, k), f^+(x, -k)\}, \\ C_{22}(k) &= -\frac{1}{2il} W\{f^-(x, k), f^+(x, -k)\}, \\ C_{21}(k) &= -\frac{1}{2il} W\{f^+(x, k), f^-(x, k)\}, \end{aligned} \quad \begin{aligned} &k \neq 0 \\ & \\ &|k| > c. \end{aligned} \quad (2.9)$$

С помощью двух последних формул можно доопределить коэффициенты $C_{22}(k)$ и $C_{21}(k)$ и при $|k| \leq c$.

ЛЕММА 2.2. *При действительных k имеют место следующие формулы:*

$$1) \quad C_{ij}(-k) = \overline{C_{ij}(k)}, \quad kC_{12}(k) = lC_{21}(k), \quad -kC_{11}(-k) = lC_{22}(k); \quad (2.10)$$

$$2) \quad C_{11}(k) = \overline{C_{12}(k)}, \quad C_{22}(k) = -C_{21}(k), \quad |k| \leq c; \quad (2.11)$$

$$3) \quad \frac{k}{l} |C_{12}(k)|^2 = 1 + \frac{k}{l} |C_{11}(k)|^2 = 1 + \frac{l}{k} |C_{22}(k)|^2 = \frac{l}{k} |C_{21}(k)|^2, \quad |k| > c. \quad (2.12)$$

Положим

$$S_{11}(k) = \frac{1}{C_{21}(k)}, \quad S_{12}(k) = \frac{C_{22}(k)}{C_{21}(k)}, \quad S_{21}(k) = \frac{C_{11}(k)}{C_{12}(k)}, \quad S_{22}(k) = \frac{1}{C_{12}(k)}. \quad (2.13)$$

Матрица $\|S_{ij}\|$, $i, j = 1, 2$, называется S -матрицей уравнения (2.1).

Будем предполагать, что решения $f^+(x, -k)$, $f^-(x, k)$ при $k = 0$ линейно независимы. Тогда справедлива следующая лемма [11], [12].

ЛЕММА 2.3. 1. Коэффициенты $S_{ij}(k)$ являются непрерывными функциями k ($-\infty < k < \infty$). Коэффициенты $S_{11}(k)$ и $S_{22}(k)$ являются предельными значениями функций, мероморфных в верхней полуплоскости с простыми полюсами в точках $k_n = i\chi_n$, $n = 1, 2, \dots, N$, причем $-\chi_n^2$ является собственным значением оператора L_0 .

2. На вещественной оси выполняются соотношения

$$\begin{aligned} S_{ij}(-k) &= \overline{S_{ij}(k)}, & lS_{22}(k) &= kS_{11}(k), \\ \sqrt{\frac{k}{l}} S_{11}(k)S_{21}(-k) + \sqrt{\frac{l}{k}} S_{12}(k)S_{22}(-k) &= 0, \end{aligned} \quad (2.14)$$

$$\frac{k}{l} |S_{11}(k)|^2 + |S_{12}(k)|^2 = \frac{l}{k} |S_{22}(k)|^2 + |S_{21}(k)|^2 = 1 \quad \text{при } |k| > c, \quad (2.15)$$

$$S_{21}(k) = \frac{S_{22}(k)}{S_{22}(k)}, \quad S_{21}(k) = -1 \quad \text{при } |k| \leq c, \quad (2.16)$$

$$S_{21}(0) = -1, \quad S_{22}(0) = S_{11}(\pm c) = 0, \quad S'_{22}(0) \neq 0, \quad S'_{11}(\pm c) \neq 0.$$

Учитывая эти свойства, S -матрицу можно восстановить по коэффициенту $S_{21}(k)$ и полюсам $S_{22}(k)$. Действительно, согласно (2.15) и (2.16) имеем

$$\begin{aligned} |S_{22}(k)| &= \sqrt{(1 - |S_{21}(k)|^2) \frac{k}{l}} \quad \text{при } |k| > c, \\ \arg S_{22}(k) &= \frac{1}{2} \arg S_{21}(k) \quad \text{при } |k| \leq c. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Рассмотрим функцию

$$W(k) = \frac{i}{\sqrt{k^2 - c^2}} \ln \left[\prod_{l=1}^N \frac{k - i\chi_l}{k + i\chi_l} S_{22}(k) \right],$$

тогда при $\text{Im } k > 0$ по теореме Коши

$$W(k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{\text{Im } W(k')}{k' - k}, \quad (2.18)$$

где

$$\text{Im } W(k') = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k'^2 - c^2}} \ln |S_{22}(k')|, & |k'| > c, \\ \frac{1}{\sqrt{c^2 - k'^2}} \left[\arg S_{22}(k') + \sum_{l=1}^N 2 \arg(k' - i\chi_l) \right], & |k'| \leq c. \end{cases}$$

Окончательно получаем

$$W(k)|_{\text{Im } k=0} = \lim_{\text{Im } k \rightarrow 0} W(k)|_{\text{Im } k > 0}, \quad S_{22}(k) = \prod_{l=1}^N \frac{k + i\chi_l}{k - i\chi_l} e^{-i\sqrt{k^2 - c^2} W(k)}. \quad (2.19)$$

С помощью метода контурного интегрирования [13] можно получить теорему разложения, а именно, для любой функции $h(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned} h(x) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (S_{12}(k)H(-k)f^+(x, k) + H(k)f^+(x, k)) dl + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c |S_{22}(k)|^2 H(k)f^+(x, k) dk + \\ & + \sum_{n=1}^N m_n^+ f^+(x, i\chi_n) \int_{-\infty}^{\infty} f^+(y, i\chi_n) h(y) dy, \end{aligned} \quad (2.20)$$

где

$$m_n^+ = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f^{+2}(x, i\chi_n) dx \right)^{-1}, \quad H(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f^+(y, k) h(y) dy. \quad (2.21)$$

Таким образом, для любых $h(x), g(x) \in L_2(-\infty, \infty)$ равенство Парсеваля имеет вид

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \overline{g(x)} dx = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(k) \overline{G(k)} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(k) H(-k) \overline{G(k)} dl + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c |S_{22}(k)|^2 H(k) \overline{G(k)} dk + \\ & + \sum_{n=1}^N m_n^+ \int_{-\infty}^{\infty} f^+(x, k_n) h(x) dx \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f^+(x, k_n) g(x)} dx, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где

$$G(k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{f^+(x, k)} dx.$$

Используя получающееся из (2.22) “символическое” равенство

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f^+(y, k)} f^+(x, k) dl + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(k) f^+(y, k) f^+(x, k) dl + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^c |S_{22}(k)|^2 f^+(x, k) f^+(y, k) dk + \\ & + \sum_{n=1}^N m_n^+ f^+(x, k_n) f^+(y, k_n) = \delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.23)$$

и соотношение (2.5), при $y > x$ получим

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^N m_n^+ e^{-\sqrt{\chi_n^2 + c^2}(x+y)} + \sum_{n=1}^N m_n^+ \int_x^{\infty} A_1(x, z) e^{-\sqrt{\chi_n^2 + c^2}(z+y)} dz + \delta(x - y) + \\ & + A_1(x, y) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(k) \left[e^{il(x+y)} + \int_x^{\infty} A_1(x, z) e^{il(z+y)} dz \right] dl + \\ & + \int_0^c |S_{22}(k)|^2 \left(e^{il(x+y)} + \int_x^{\infty} A_1(x, z) e^{il(z+y)} dz \right) dk = 0. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Если ввести обозначение

$$\Omega_1(x) = \sum_{n=1}^N m_n^+ e^{-\sqrt{\chi_n^2 + c^2} x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{12}(k) e^{ikx} dk + \frac{1}{2\pi} \int_0^c |S_{22}(k)|^2 e^{-\sqrt{c^2 - k^2} x} dk, \quad (2.25)$$

то равенство (2.24) можно переписать в виде

$$\Omega_1(x+y) + A_1(x, y) + \int_x^{\infty} A_1(x, z) \Omega_1(z+y) dz = 0, \quad y > x. \quad (2.26)$$

Совершенно аналогично при $x > y$ получим интегральное уравнение

$$\Omega_2(x+y) + A_2(x, y) + \int_{-\infty}^x A_2(x, z) \Omega_2(z+y) dz = 0, \quad (2.27)$$

где

$$\Omega_2(x) = \sum_{n=1}^N m_n^- e^{\chi_n x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{21}(k) e^{ikx} dk, \quad m_n^- = \left(\int_{-\infty}^{\infty} (f^-(x, \chi_n))^2 dx \right)^{-1}. \quad (2.28)$$

Способ доказательства последних утверждений можно найти в книге [14].

3. ЭВОЛЮЦИЯ ДАННЫХ РАССЕЯНИЯ

Пусть функции $u(x, t)$, $\varphi_n(x, t)$, $\psi_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, являются решениями задачи (1.1)–(1.5). Положим

$$A = \frac{\partial^3}{\partial x^3} - 6u \frac{\partial}{\partial x} - 3u', \quad L = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x, t). \quad (3.1)$$

Легко заметить, что

$$[L, A] \equiv LA - AL = -u''' + 6uu'. \quad (3.2)$$

Оператор L зависит от времени t как от параметра, так что

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}. \quad (3.3)$$

Сравнивая формулы (3.2) и (3.3) с уравнениями (1.1), убеждаемся, что первое из уравнений (1.1) тождественно операторному соотношению

$$\frac{\partial L}{\partial t} = [L, A] + 2 \sum_{m=1}^N (\varphi_m \psi_m)_x. \quad (3.4)$$

Пусть $\Phi_n = \Phi_n(x, t)$ – нормированная собственная функция оператора L , соответствующая собственному значению $\lambda_n(t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, т.е.

$$L\Phi_n = \lambda_n \Phi_n.$$

Продифференцируем это равенство по времени,

$$\frac{\partial L}{\partial t} \Phi_n + L \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} \Phi_n + \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \lambda_n, \quad (3.5)$$

и подставим в (3.5) $\partial L / \partial t$ из (3.4). Тогда будем иметь

$$L A \Phi_n - \lambda_n A \Phi_n + L \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \lambda_n + 2 \sum_{m=1}^N (\varphi_m \psi_m)_x \Phi_n = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} \Phi_n.$$

Таким образом,

$$(L - \lambda_n) \left(A \Phi_n + \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right) + 2 \sum_{m=1}^N (\varphi_m \psi_m)_x \Phi_n = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} \Phi_n. \quad (3.6)$$

Умножая равенство (3.6) на Φ_n и интегрируя по x вдоль всей оси, в силу нормированности Φ_n имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n (L - \lambda_n) \left(A \Phi_n + \frac{\partial \Phi_n}{\partial t} \right) dx + 2 \sum_{m=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_m \psi_m)_x \Phi_n^2 dx = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t}. \quad (3.7)$$

Так как L – самосопряженный оператор, первый интеграл в (3.7) равен нулю, поэтому

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 2 \sum_{m=1}^N \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_m \psi_m)_x \Phi_n^2 dx. \quad (3.8)$$

ЛЕММА 3.1. При $m \neq n$ выполняется соотношение

$$2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_m \psi_m) \Phi_n^2 dx = 0. \quad (3.9)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу формул (1.1) и (1.6) имеем

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_m \psi_m) \Phi_n^2 dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [\psi_m \Phi_n (\Phi_n \varphi'_m - \Phi'_n \varphi_m) + \varphi_m \Phi_n (\Phi_n \psi'_m - \Phi'_n \psi_m)] dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_m - \lambda_n} \int_{-\infty}^{\infty} \left[W\{\Phi_n, \varphi_m\} \frac{\partial}{\partial x} W\{\Phi_n, \psi_m\} + W\{\Phi_n, \psi_m\} \frac{\partial}{\partial x} W\{\Phi_n, \varphi_m\} \right] dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_m - \lambda_n} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (W\{\Phi_n, \varphi_m\} W\{\Phi_n, \psi_m\}) dx = 0, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В силу леммы 3.1 и равенства (3.8)

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (\varphi_n \psi_n)_x \Phi_n^2 dx, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.10)$$

Так как φ_n – собственная функция оператора L , то она пропорциональна Φ_n . Поэтому

$$\begin{aligned} 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_n \psi_n) \Phi_n^2 dx &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} (\varphi_n \psi_n \Phi_n^2) dx + \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_n^2 \left(\varphi_n \frac{\partial \psi_n}{\partial x} - \psi_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} \right) dx = \omega_n(t), \end{aligned}$$

следовательно, равенство (3.10) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = \omega_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.11)$$

Рассмотрим систему уравнений

$$L f_0 = -f_0'' + u(x, t) f_0 = k^2 f_0, \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial f_n}{\partial x} = \varphi_n f_0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.13)$$

относительно неизвестных функций $f_i = f_i(x, k; t)$, $i = 0, 1, \dots, N$. С помощью произвольного решения этой системы определим функции

$$g_0 = \frac{\partial f_0}{\partial t} + A f_0 - \sum_{m=1}^N \psi_m f_m, \quad (3.14)$$

$$g_n = \varphi_n \frac{\partial f_0}{\partial x} - \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} f_0 + (k^2 - \lambda_n) f_n, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.15)$$

Непосредственной проверкой можно показать, что

$$\frac{\partial g_n}{\partial x} = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.16)$$

т.е. величины g_n , $n = 1, 2, \dots, N$, не зависят от x . Кроме того, из равенств (1.1), (3.12) и (3.14) следует, что

$$(L - k^2) g_0 = \sum_{m=1}^N \psi_m g_m. \quad (3.17)$$

Пусть $f_0^+(x, k; t)$, $f_0^-(x, k; t)$ – решения Йоста уравнения (3.12) с асимптотиками (2.4). Тогда на основании (3.13) можно записать, что

$$\begin{aligned} f_n^-(x, k; t) &= \int_{-\infty}^x \varphi_n(z, t) f_0^-(z, k; t) dz, \\ f_n^+(x, k; t) &= - \int_x^{\infty} \varphi_n(z, t) f_0^+(z, k; t) dz. \end{aligned} \quad (3.18)$$

С помощью функций $f_0^+, f_0^-, f_1^+, f_1^-, \dots, f_N^+, f_N^-$ можно по формулам (3.14) и (3.15) определить функции g_i^+, g_i^- , $i = 0, 1, \dots, N$. На основании (3.15) и (3.18) имеем $g_n^+ \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$, $g_n^- \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0$, $n = 1, 2, \dots, N$. Поэтому из равенств (3.16) следует, что

$$g_n^+ = g_n^- = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.19)$$

Следовательно, согласно (3.17)

$$(L - k^2)g_0^+ = (L - k^2)g_0^- = 0. \quad (3.20)$$

Так как φ_n – собственная функция оператора L , соответствующая собственному значению $\lambda_n = k_n^2$, то

$$\varphi_n(x, t) = c_n^-(t)f_0^-(x, k_n; t) = c_n^+(t)f_0^+(x, k_n; t), \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (3.21)$$

т.е.

$$c_n^-(t) = B_n(t)c_n^+(t). \quad (3.22)$$

На основании (1.6) и (3.21) имеем

$$\psi_n \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{i\omega_n}{2k_n}e^{ik_n x}, \quad \psi_n \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\omega_n}{2\sqrt{\chi_n^2 + c^2}c_n^+}e^{\sqrt{\chi_n^2 + c^2}x}. \quad (3.23)$$

Аналогично, используя равенства (3.18) и (3.21), получим

$$\begin{aligned} f_n^- &\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\frac{c_n^-}{i(k + k_n)}e^{-i(k + k_n)x}, \\ f_n^+ &\xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{c_n^+}{il - \sqrt{\chi_n^2 + c^2}}e^{(il - \sqrt{\chi_n^2 + c^2})x}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Заметим, что из (3.12) следует соотношение

$$Af_0^\pm(x, k; t) = u'f_0^\pm(x, k; t) - (2u + 4k^2)\frac{\partial f_0^\pm(x, k; t)}{\partial x},$$

поэтому равенство (3.14) можно переписать в виде

$$g_0^\pm(x, k; t) = \frac{\partial f_0^\pm}{\partial t} + u'f_0^\pm - (2u + 4k^2)\frac{\partial f_0^\pm}{\partial x} - \sum_{m=1}^N \psi_m f_m^\pm. \quad (3.25)$$

Рассмотрим теперь вытекающее из (3.20) и (3.25) равенство

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_0^+(x, k; t)}{\partial t} + u'f_0^+(x, k; t) - (2u + 4k^2)f_0^+(x, k; t) - \sum_{m=1}^N \psi_m f_m^+(x, k; t) = \\ = Df_0^-(x, k; t) + Bf_0^-(x, -k; t), \end{aligned} \quad (3.26)$$

где функции f_0^+ и f_0^- связаны соотношениями (2.7) и (2.8). На основании (1.6), (2.7), (3.23) и (3.24), переходя в равенстве (3.26) к пределу $x \rightarrow -\infty$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{11}(k)}{\partial t} + \left(4ik^3 - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2k_m(k+k_m)} \right) C_{11}(k) &= D, \\ \frac{\partial C_{12}(k)}{\partial t} + \left(-4ik^3 + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2k_m(k-k_m)} \right) C_{12}(k) &= B. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Аналогично на основании (1.6), (2.8), (3.23) и (3.24), переходя в равенстве (3.26) к пределу $x \rightarrow \infty$, для $|k| > c$ получим

$$\begin{aligned} C_{22}(k)D + C_{21}(-k)B &= -(2c^2 + 4k^2)il - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})}, \\ C_{21}(k)D + C_{22}(-k)B &= 0. \end{aligned}$$

Вследствие леммы 2.2, решая последнюю систему уравнений при $|k| > c$, найдем

$$\begin{aligned} D &= - \left((2c^2 + 4k^2)il + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) C_{11}(k), \\ B &= - \left((2c^2 + 4k^2)il + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) C_{12}(k). \end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (3.27), получаем дифференциальные уравнения для $C_{11}(k)$, $C_{12}(k)$ при $|k| > c$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{11}}{\partial t} &= \left[-4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)il + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k+k_m)} - \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) \right] C_{11}, \\ \frac{\partial C_{12}}{\partial t} &= \left[4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)il - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k-k_m)} - \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) \right] C_{12}. \end{aligned}$$

Из этих уравнений вытекает следующий закон преобразования коэффициентов $C_{ij}(k)$ во времени:

$$\begin{aligned} C_{11}(k, t) &= C_{11}(k, 0) \exp \left\{ - (4ik^3 + (2c^2 + 4k^2)il)t + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k+k_m)} - \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) d\tau \right\}, \\ C_{12}(k, t) &= C_{12}(k, 0) \exp \left\{ (4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)il)t - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k-k_m)} + \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) d\tau \right\}, \end{aligned}$$

а в силу леммы 2.2

$$\begin{aligned} C_{21}(k, t) &= \frac{k}{l} C_{12}(k, t) = C_{21}(k, 0) \exp \left\{ (4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)il)t - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k - k_m)} + \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il - \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) d\tau \right\}, \\ C_{22}(k, t) &= \frac{k}{l} C_{11}(-k, t) = C_{22}(k, 0) \exp \left\{ (4ik^3 + (2c^2 + 4k^2)il)t - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{\omega_m}{2} \left(\frac{1}{k_m(k - k_m)} - \frac{1}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (il + \sqrt{\chi_m^2 + c^2})} \right) d\tau \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, согласно (2.13) при $|k| > c$ имеем

$$\begin{aligned} S_{12}(k, t) &= S_{12}(k, 0) \exp \left\{ 2(2c^2 + 4k^2)il t - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{i\omega_m l}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (k^2 + \chi_m^2)} d\tau \right\}, \\ S_{21}(k, t) &= S_{21}(k, 0) \exp \left\{ -8ik^3 t - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{i\omega_m k}{\chi_m (k^2 + \chi_m^2)} d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Рассмотрим теперь случай $|k| \leq c$. Равенства (3.27) при этом сохраняются. При $x \rightarrow \infty$ и $|k| \leq c$ решение $f_0^+(x, k)$ экспоненциально убывает, а так как решения $f_0^-(x, k)$ и $f_0^-(x, -k)$ линейно независимы, то по крайней мере одно из них экспоненциально растет. Но в силу соотношения (2.7) и леммы 2.2 $C_{12}(k) = \overline{C_{11}(k)} \neq 0$ при $|k| \leq c$ ($\text{Im } k = 0$), и, следовательно, оба эти решения растут,

$$f_0^-(x, k) \sim de^{\sqrt{c^2 - k^2}x}, \quad f_0^-(x, -k) \sim be^{\sqrt{c^2 - k^2}x}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Поэтому согласно (2.7) и (3.26) имеем

$$Dd + Bb = 0, \quad C_{11}(k)d + C_{12}(k)b = 0,$$

и, значит, $C_{11}(k)B - C_{12}(k)D = 0$. Учитывая это равенство, из (3.27) получаем при $|k| \leq c$, что

$$\frac{\partial C_{11}}{\partial t} C_{12} - \frac{\partial C_{12}}{\partial t} C_{11} + \left(8ik^3 + \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m k}{\chi_m (k^2 + \chi_m^2)} \right) C_{11} C_{12} = 0,$$

откуда на основании (2.13) имеем

$$\frac{\partial S_{21}(k, t)}{\partial t} = - \left(8ik^3 + \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m k}{\chi_m (k^2 + \chi_m^2)} \right) S_{21}(k, t). \quad (3.29)$$

Таким образом, при всех k ($\text{Im } k = 0$) справедливо выражение (3.28) для $S_{21}(k, t)$.

Закон преобразования $S_{22}(k, t)$ установим с помощью формул (2.17)–(2.19). На основании (3.28) при $|k| > c$ имеем

$$|S_{22}(k, t)| = \sqrt{(1 - |S_{21}(k, t)|^2) \frac{k}{t}} = |S_{22}(k, 0)|,$$

а при $|k| \leq c$

$$\arg S_{22}(k, t) = \frac{1}{2} \arg S_{21}(k, t) = \arg S_{22}(k, 0) - 4ik^3 t - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{i\omega_m k}{2\chi_m(k^2 + \chi_m^2)} d\tau.$$

Следовательно, согласно (2.18), (2.19) ($\text{Im } k = 0$)

$$\begin{aligned} W(k, t) = & \frac{1}{\pi} \left(\int_{-\infty}^c + \int_c^{\infty} \right) \frac{\ln |S_{22}(k', 0)|}{\sqrt{k'^2 - c^2} (k' - k)} dk' + \\ & + \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{\pi} \int_{-c}^c \frac{\arg S_{22}(k', 0)}{\sqrt{c^2 - k'^2} (k' - k - i\varepsilon)} dk' - \\ & - \frac{1}{\sqrt{c^2 - k^2}} \left(4ik^3 t - \sum_{m=1}^N \int_0^t \frac{i\omega_m k}{2\chi_m(k^2 + \chi_m^2)} d\tau \right) - \\ & - \frac{1}{\pi} \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{1}{\sqrt{c^2 - k'^2} (k' - k)} \times \\ & \times \left[4ik'^3 t + \sum_{m=1}^N \left(\int_0^t \frac{i\omega_m k}{2\chi_m(k^2 + \chi_m^2)} d\tau + 2 \arg \text{tg} \frac{\chi_m}{k'} \right) \right] dk'. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Два первых интеграла в этом равенстве от t не зависят. Кроме этого, на основании равенства (3.11) имеем

$$\frac{\partial \chi_n}{\partial t} = -\frac{\omega_n}{2\chi_n}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.31)$$

Поэтому вследствие формул (2.19) и (3.30)

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_{22}}{\partial t} = & \left(-4ik^3 - \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m k}{2\chi_m(k^2 + \chi_m^2)} - \right. \\ & - \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\pi} \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{4k'^3 t}{\sqrt{c^2 - k'^2} (k - k')} dk' \left. \right) S_{22} + \\ & + \frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\pi} \sum_{m=1}^N \left(\text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{\omega_m k'}{2\chi_m(k'^2 + \chi_m^2) \sqrt{c^2 - k'^2} (k - k')} dk' \right) S_{22}. \end{aligned}$$

Интегралы, входящие в последнее равенство, несложно вычислить,

$$\begin{aligned} \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{4k'^3 t}{\sqrt{c^2 - k'^2} (k - k')} dk' &= \left(k^2 + \frac{c^2}{2} \right) \pi, \\ \text{V.p.} \int_{-c}^c \frac{\omega_m k'}{2\chi_m(k'^2 + \chi_m^2) \sqrt{c^2 - k'^2} (k - k')} dk' &= \frac{\pi \chi_m}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2} (k^2 + \chi_m^2)}, \end{aligned}$$

поэтому при $|k| \leq c$ имеем

$$\frac{\partial S_{22}}{\partial t} = \left\{ -4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)\sqrt{c^2 - k^2} + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2(k^2 + \chi_m^2)} \left(\frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2}} - \frac{ik}{\chi_m} \right) \right\} S_{22}. \quad (3.32)$$

Положим

$$G_n = g_0^+(x, k_n) - B_n(t)g_0^-(x, k_n), \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.33)$$

Вследствие формул (3.23) и (3.24)

$$g_0^+(x, k_n) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \left((2c^2 - 4\chi_n^2)\sqrt{\chi_n^2 + c^2} - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{4(\chi_m^2 + c^2)} \right) e^{-\sqrt{\chi_n^2 + c^2}x},$$

поэтому

$$g_0^+(x, k_n) = \left((2c^2 - 4\chi_n^2)\sqrt{\chi_n^2 + c^2} - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{4(\chi_m^2 + c^2)} \right) f_0^+(x, k_n).$$

Точно так же

$$g_0^-(x, k_n) = \left(4\chi_n^3 - \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{4(\chi_m^2 + c^2)} \right) f_0^-(x, k_n),$$

поэтому на основании равенства

$$f_0^+(x, k_n; t) = B_n(t)f_0^-(x, k_n; t)$$

функцию (3.33) можно записать в виде

$$G_n = \left((2c^2 - 4\chi_n^2)\sqrt{\chi_n^2 + c^2} - 4\chi_n^3 \right) B_n f_0^-(x, k_n). \quad (3.34)$$

Очевидно, что

$$\frac{\partial f_0^+(x, k_n; t)}{\partial t} = \frac{\partial B_n(t)}{\partial t} f_0^-(x, k_n; t) + B_n(t) \frac{\partial f_0^-(x, k_n; t)}{\partial t} - \frac{\omega_n}{2k_n} \zeta_n(x, t), \quad (3.35)$$

где

$$\zeta_n(x, t) = \frac{\partial}{\partial k} (f_0^+(x, k; t) - B_n(t)f_0^-(x, k; t)) \Big|_{k=k_n}. \quad (3.36)$$

На основании равенств (3.14) и (3.35) найдем

$$\begin{aligned} g_0^+(x, k_n) &= \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x, k_n) + B_n g_0^-(x, k_n) - \frac{\omega_n}{2k_n} \zeta_n - \\ &\quad - \sum_{m=1}^N \psi_m (f_m^+(x, k_n) - B_n f_m^-(x, k_n)). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Так как собственные функции оператора Штурма–Лиувилля [14], соответствующие различным собственным значениям, ортогональны, то в силу равенства (3.18) получим

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^N \psi_m (f_m^+(x, k_n) - B_n f_m^-(x, k_n)) &= - \sum_{m=1}^N \psi_m \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_m(z) f_0^+(z, k_n) dz = \\ &= -\psi_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) f_0^+(z, k_n) dz. \end{aligned}$$

Следовательно, равенство (3.37) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} g_0^+(x, k_n) &= \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x, k_n) + B_n g_0^-(x, k_n) - \frac{\omega_n}{2k_n} \zeta_n + \\ &+ \psi_n \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(z) f_0^+(z, k_n) dz. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Легко заметить, что $\zeta_n(x, t)$ также является решением уравнения (3.12) при $k = k_n$, поэтому

$$\zeta_n(x, t) = \alpha_n(t) \psi_n(x, t) + \beta_n(t) f_0^+(x, k_n; t). \quad (3.39)$$

В равенстве

$$f_0^-(x, -k) = \frac{f_0^+(x, k) - C_{11}(k) f_0^-(x, k)}{C_{12}(k)},$$

устремляя k к k_n и применяя правило Лопиталя, получим

$$\zeta_n(x, t) = f_0^-(x, -k_n) \dot{C}_{12}(k_n),$$

где точка над C_{12} означает производную по k . Таким образом,

$$W\{\zeta_n, \varphi_n\} = -2ik_n \dot{C}_{12}(k_n) c_n^-.$$

С другой стороны, на основании (3.39) заключаем, что $W\{\zeta_n, \varphi_n\} = -\alpha_n \omega_n$, поэтому

$$\alpha_n(t) = \frac{2ik_n c_n^- \dot{C}_{12}(k_n)}{\omega_n}.$$

Используя равенство [11]

$$\dot{C}_{12}(k_n) = -i \int_{-\infty}^{\infty} f_0^+(x, k_n; t) f_0^-(x, k_n; t) dx, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$\alpha_n(t) = \frac{2k_n c_n^-}{\omega_n} \int_{-\infty}^{\infty} f_0^+(x, k_n; t) f_0^-(x, k_n; t) dx, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

откуда, используя (3.38), получим

$$g_0^+(x, k_n) = \frac{\partial B_n}{\partial t} f_0^-(x, k_n) + B_n g_0^-(x, k_n) - \frac{\beta_n \omega_n}{2k_n} B_n f_0^-(x, k_n).$$

Следовательно, по формуле (3.33) имеем

$$G_n = \left(\frac{\partial B_n}{\partial t} - \frac{\beta_n \omega_n}{2k_n} B_n \right) f_0^-(x, k_n).$$

Сравнивая это равенство с (3.34), получим

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = - \left(4\chi_n^3 - (2c^2 - 4\chi_n^2) \sqrt{\chi_n^2 + c^2} + \frac{\beta_n(t) \omega_n}{2\chi_n} i \right) B_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Итак, нами доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Если функции $u(x, t)$, $\varphi_n(x, t)$, $\psi_n(x, t)$, $n = 1, 2, \dots, N$, являются решением задачи (1.1)–(1.5), то функции $k_n = k_n(t)$, $B_n(t)$, $S_{ij}(k, t)$ зависят от t следующим образом ($\text{Im } k = 0$):

$$\begin{aligned} \frac{dk_n}{dt} &= \frac{\omega_n(t)}{2k_n}, & \frac{\partial S_{21}(k, t)}{\partial t} &= -\left(8ik^3 + \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m(t)k}{\chi_m(t)(k^2 + \chi_m^2(t))}\right) S_{21}(k, t), \\ \frac{\partial S_{22}}{\partial t} &= \left\{-4ik^3 + (2c^2 + 4k^2)il - \sum_{m=1}^N \frac{i\omega_m}{2(k^2 + \chi_m^2)} \left(\frac{\sqrt{k^2 - c^2}}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2}} + \frac{k}{\chi_m}\right)\right\} S_{22} \end{aligned}$$

при $|k| > c$,

$$\frac{\partial S_{22}}{\partial t} = \left\{-4ik^3 - (2c^2 + 4k^2)\sqrt{c^2 - k^2} + \sum_{m=1}^N \frac{\omega_m}{2(k^2 + \chi_m^2)} \left(\frac{\sqrt{c^2 - k^2}}{\sqrt{\chi_m^2 + c^2}} - \frac{ik}{\chi_m}\right)\right\} S_{22}$$

при $|k| \leq c$,

$$\frac{dB_n(t)}{dt} = -\left(4\chi_n^3 - (2c^2 - 4\chi_n^2)\sqrt{\chi_n^2 + c^2} + \frac{\beta_n(t)\omega_n}{2\chi_n}i\right) B_n(t), \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

СЛЕДСТВИЕ. Нормировочные константы, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} m_n^-(t) &= -iB_n(t) \operatorname{res}_{k=i\chi_n(t)} S_{22}(k, t), \\ m_n^+(t) &= -\frac{i}{B_n(t)} \operatorname{res}_{k=i\chi_n(t)} S_{22}(k, t), \end{aligned}$$

меняются во времени следующим образом:

$$\begin{aligned} m_n^-(t) &= m_n^-(0)P_n(t) \exp\left(-\int_0^t \left(8\chi_n^3(\tau) + i\frac{\beta_n(\tau)\omega_n(\tau)}{2\chi_n(\tau)}\right) d\tau\right), \\ m_n^+(t) &= m_n^+(0)P_n(t) \exp\left(-2\int_0^t \left((2c^2 - 4\chi_n^2(\tau))\sqrt{\chi_n^2(\tau) + c^2} - i\frac{\beta_n(\tau)\omega_n(\tau)}{4\chi_n(\tau)}\right) d\tau\right), \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} P_n(t) &= \left[\frac{2iS_{22}(i\chi_n(t), 0)(\chi_n(t) - \chi_n(0))\sqrt{\chi_n^2(t) + c^2}}{\operatorname{res}_{k=i\chi_n(0)} S_{22}(k, 0)(\sqrt{\chi_n^2(t) + c^2} + \sqrt{\chi_n^2(0) + c^2})} \right] \times \\ &\times \prod_{j \neq n}^N \frac{(\sqrt{\chi_j^2(t) + c^2} + \sqrt{\chi_n^2(t) + c^2})(\chi_n(t) - \chi_j(0))}{(\sqrt{\chi_j^2(0) + c^2} + \sqrt{\chi_n^2(t) + c^2})(\chi_n(t) - \chi_j(t))}. \end{aligned}$$

Полученные равенства полностью определяют эволюцию данных рассеяния для оператора Штурма–Лиувилля L , что позволяет применить метод обратной задачи рассеяния для нахождения решений задачи (1.1)–(1.5).

В заключение рассмотрим следующий пример. Пусть

$$u_0(x) = 2(1 + \operatorname{th} x - 3 \sec h^2 x),$$

в этом случае

$$c = 2, \quad \chi(0) = \frac{3}{2}, \quad m^-(0) = \frac{32}{\pi}, \quad l = \sqrt{k^2 - 4}, \quad \varphi(x, 0) = \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} \sec h^2 x,$$

$$\psi(x, 0) = \frac{\omega(0)}{480} e^{-\frac{7x}{2}} (3e^{8x} + 20e^{6x} + 90e^{4x} - 60e^{2x} - 5) \sec h^2 x,$$

$$S_{21}(k, 0) = \frac{\Gamma(ik)\Gamma(3 - \frac{ik+il}{2})\Gamma(-2 - \frac{ik+il}{2})}{\Gamma(-ik)\Gamma(3 + \frac{ik-il}{2})\Gamma(-2 + \frac{ik-il}{2})}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \chi^2(t) &= \frac{9}{4} - \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \\ m^-(t) &= \frac{2}{\Gamma(\chi(t))} B\left(3 + \frac{\chi(t) + \sqrt{\chi^2(t) + 4}}{2}, -2 + \frac{\chi(t) + \sqrt{\chi^2(t) + 4}}{2}\right) \times \\ &\quad \times \frac{(2\chi(t) - 3)\sqrt{\chi^2(t) + 4}}{2\sqrt{\chi^2(t) + 4} + 5} \exp\left(-\int_0^t \left(8\chi^3(\tau) + i\frac{\beta(\tau)\omega(\tau)}{2\chi(\tau)}\right) d\tau\right), \\ S_{21}(k, t) &= S(k, 0) \exp\left(-8ik^3t - ik \int_0^t \frac{\omega(\tau)}{\chi(\tau)(k^2 + \chi^2(\tau))} d\tau\right). \end{aligned}$$

Последние три равенства вместе с интегральным уравнением Гельфанда–Левитана–Марченко (2.27) образуют замкнутую систему для определения ядра $A_2(x, y)$ и, следовательно, функций $u(x, t)$, $\varphi(x, t)$, $\psi(x, t)$.

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, I. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [2] *П. Д. Лакс.* Математика. 1969. Т. 13. С. 128.
- [3] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат.* ЖЭТФ. 1971. Т. 61. С. 118.
- [4] *M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell, H. Segur.* Stud. Appl. Math. 1974. V. 53. P. 249.
- [5] *А. Ньюэлл.* Обратное преобразование рассеяния. В сб.: Солитоны. Ред. Р. Буллаф, Ф. Кодри. М.: Мир, 1983. С. 193.
- [6] *Ф. Калоджеро, А. Дегасперис.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985.
- [7] *Е. Я. Хрусов.* Матем. сб. 1976. Т. 99(141). № 2. С. 261.
- [8] *А. В. Гуревич, А. П. Питаевский.* Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. № 5. С. 268.
- [9] *А. В. Гуревич, А. П. Питаевский.* ЖЭТФ. 1973. Т. 65. № 2(8). С. 590.
- [10] *V. K. Melnikov.* Inverse Problems. 1990. V. 6. P. 809.
- [11] *В. Буслаев, В. Фомин.* Вестн. ЛГУ. Сер. Матем. Мех. Астрон. 1962. Т. 17. № 1. С. 56.
- [12] *Amy Cohen.* Commun. Part. Diff. Equat. 1982. V. 7. P. 883.
- [13] *Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1959. Т. 14. Вып. 4(88). С. 57.
- [14] *Б. М. Левитан.* Обратные задачи Штурма–Лиувилля. М.: Наука, 1984.
- [15] *А. Б. Хасанов.* ДАН РУЗ. 1995. № 5–6. С. 8.

Поступила в редакцию 16.XII.2000 г.