Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. М. Сладь, К теории бесконечнокомпонентных полей с двойной симметрией.
Свободные поля, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 68–86

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 18:04:53

© 2001 г.

Л. М. Сладь *

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ С ДВОЙНОЙ СИММЕТРИЕЙ. СВОБОДНЫЕ ПОЛЯ

Сделан первый шаг на пути исследования возможности описания адронов с помощью монолокальных полей, которые преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений. В качестве эффективного механизма отбора представлений названного класса и устранения бесконечного произвола в константах лагранжианов свободных полей, допускаемого релятивистской инвариантностью, служит принимаемое требование инвариантности лагранжианов также относительно преобразований вторичной симметрии, порождаемой полярным или аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

1. ВВЕДЕНИЕ

Первая попытка релятивистски-инвариантного описания частиц с внутренними степенями свободы, предпринятая Гинзбургом и Таммом [1], основывалась на бислокальных уравнениях. Оказалось, что каждое из рассматривавшихся уравнений дает плохой спектр масс, а именно было показано, что с ростом некоторого квантового числа, характеризующего состояния, массы стремятся к нулю. Чтобы выяснить степень общности этого результата, Гельфанд и Яглом [2] дали полное описание всех линейных релятивистски-инвариантных уравнений вида

$$(\Gamma^\mu \partial_\mu + iR)\Psi(x) = 0, \quad (1)$$

где Γ^μ и R – матричные операторы, и соответствующих им лагранжианов. Ограничившись уравнениями вида (1), в которых поля $\Psi(x)$ преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца, разложимым в конечную прямую сумму бесконечномерных неприводимых представлений (в дальнейшем будем говорить, что такие поля принадлежат классу FSIR), а оператор R невырожден, Гельфанд и Яглом пришли к заключению, что при неограниченном росте спина массы стремятся к нулю. Позднее было показано [3], что это заключение в ряде случаев неверно: существуют такие представления собственной группы Лоренца класса FSIR и такие ограничения на произвольные

* Научно-исследовательский институт ядерной физики им. Д. В. Скобельцына, Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: slad@theory.sinp.msu.ru

константы уравнения (1), при которых одни ветви спектра масс с ростом спина стремятся к нулю, а другие – к бесконечности. Показано также, что в опущенном в работе [2] случае, когда матричный оператор R является вырожденным, существуют такие уравнения типа (1) с полями класса FSIIR, для которых спектр ненулевых масс стремится к бесконечности с ростом спина, но при этом для всех спинов начиная с некоторого минимального s_0 существуют безмассовые состояния. Отмеченное устранение неполноты заключения Гельфанда и Яглома не меняет его первоначальную физическую сущность: получаемый в рамках лагранжева подхода спектр масс любого из полей класса FSIIR обладает такими особенностями, которые абсолютно неприемлемы в физике частиц.

Достаточно общим свойством полей класса FSIIR является их локальная некоммутативность: $[\Psi(x), \Psi(y)]_{\pm} \neq 0$, если $(x-y)^2 < 0$, доказанная в работе [4] в предположении полноты системы состояний полей и отсутствия в спектре масс бесконечного вырождения уровней. По мнению авторов монографии [5] эта трудность, по-видимому, требует ослабления постулата строгой локальности.

Для бесконечнокомпонентных полей, описываемых уравнением (1), может иметь место связь спина и статистики или нарушение такой связи в зависимости от того, на какие неприводимые представления раскладывается представление собственной группы Лоренца (не обязательно класса FSIIR), по которому преобразуется поле [6].

Некоторые из выявленных “болезней” полей класса FSIIR – существование пространственноподобных решений уравнений Гельфанда–Яглома [7], отсутствие CPT -инвариантности [8] – не являются общими для них (контрпримеры можно найти соответственно в работах [9], [10]).

Итог всех прежних исследований бесконечнокомпонентных полей можно отразить следующими суждениями.

Во-первых, бесперспективность такого описания частиц установлена только для одного класса бесконечнокомпонентных полей – класса FSIIR. До сих пор не были исследованы поля, которые преобразуются по представлениям собственной группы Лоренца, разложимым в бесконечную прямую сумму конечномерных или бесконечномерных неприводимых представлений (в дальнейшем будем говорить, что такие поля принадлежат классу ISFIR или ISIIR, соответственно). Причиной тому является бесконечное количество произвольных констант в релятивистски-инвариантных лагранжианах полей таких классов.

Во-вторых, убедившись, что общие свойства конечнокомпонентных полей и полей класса FSIIR во многих отношениях не совпадают, мы вправе ожидать, что и общие свойства полей классов FSIIR и ISFIR будут различными.

Эти суждения служат нам почвой для обращения к исходному интуитивному предположению о том, что существуют такие бесконечнокомпонентные поля, с помощью которых можно получить эффективное описание всех состояний частиц с внутренними степенями свободы (адронов).

В отношении теории полей класса ISFIR, с которыми мы будем иметь дело в настоящей работе, сразу можно заключить следующее. Во-первых, она является CPT -инвариантной (для доказательства этого в духе Паули [11] несущественно, какой являет-

ся сумма конечномерных неприводимых представлений собственной группы Лоренца – конечной или бесконечной). Во-вторых, (анти)коммутатор любых двух компонент полей класса ISFIR выражается в виде конечной суммы производных от функции Паули–Йордана $D(x - y)$, но на множестве всех таких (анти)коммутаторов максимальная степень производных не ограничена.

Чтобы пояснить принципиальное отличие теории конечномерных полей от теории полей класса ISFIR, воспользуемся простой аналогией, достаточно хорошо передающей сущность дела. Если физическим величинам, в первую очередь сечениям, в первой теории можно поставить в соответствие конечные полиномы от некоторой переменной x , то во второй – бесконечные сходящиеся ряды. Если коэффициенты в этих рядах знакопеременны, то при $x \rightarrow +\infty$ величины, отвечающие таким рядам, могут иметь, в частности, быстрое стремление к нулю. Роль переменной x в двух указанных теориях играют матричные элементы конечных преобразований неприводимых представлений собственной группы Лоренца, которые даются конечными рядами Лорана от лоренцова фактора $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. В той теории, к которой мы придем в результате осуществляемого построения, мы действительно будем иметь подобный знакопеременный ряд, в частности, для дифференциального сечения рассеяния заряженного лептона на протоне, если поставим в соответствие протону низшее энергетическое состояние со спином $1/2$ одного из наших бесконечнокомпонентных полей (подробное описание этого будет дано в последующих работах).

Отметим еще, что одной из самых серьезных трудностей для теорий частиц с высшими спинами в рамках конечномерных представлений собственной группы Лоренца является проблема перенормируемости теории. Знания об этой трудности никак не приближают нас к ответу на вопрос о перенормируемости какой-то конкретной теории полей класса ISFIR, решение которого несомненно будет иметь крайне высокую степень сложности.

Две наши статьи – настоящая и готовящаяся к изданию – посвящаются детальному описанию подкласса теорий полей класса ISFIR, выделяемому на основании требования, чтобы лагранжианы свободных и взаимодействующих полей обладали двойной симметрией, общее определение которой дано в работе [12], – релятивистской инвариантностью¹⁾ (первичной симметрией) и инвариантностью относительно преобразований глобальной вторичной симметрии, порождаемой полярным или аксиальным 4-векторным представлением группы $L^\uparrow$. Эти преобразования можно записать в следующем виде:

$$\Psi(x) \rightarrow \Psi'(x) = e^{-iD^\mu \theta_\mu} \Psi(x), \quad (2)$$

где параметры θ_μ являются компонентами полярного или аксиального 4-вектора ортохронной группы Лоренца, а D^μ – матричные операторы.

¹⁾Релятивистская инвариантность в современной терминологии и обозначениях [5] представляет собой инвариантность относительно ортохронной группы Лоренца $L^\uparrow$, порождаемой собственной группой Лоренца $L^\uparrow_+$ и пространственным отражением P . В статье [2] и монографии [13] группу $L^\uparrow$ называют полной группой Лоренца.

Если элементу g группы $L^\dagger$ отвечают преобразования поля $\Psi(x)$ и полярного или аксиального 4-вектора θ_μ , имеющие вид

$$\Psi'(x) = S(g)\Psi(x), \quad (3)$$

$$\theta'_\mu = [l_\pm(g)]_\mu{}^\nu \theta_\nu, \quad (4)$$

где знаки “+” и “−” отвечают соответственно преобразованиям полярного и аксиального 4-вектора θ_μ , то операторы D^μ должны удовлетворять соотношениям

$$S^{-1}(g)D^\nu S(g)[l_\pm(g)]_\nu{}^\mu = D^\mu. \quad (5)$$

Каковы наши физические и математические мотивы обращения к вторичной симметрии вообще и к данной конкретной в частности? Во-первых, помимо первичной симметрии, задаваемой свойствами пространства-времени, материя может обладать своей собственной симметрией, которая связана с первичной симметрией, согласуется с ней и не нарушает ее. Во-вторых, используя современные представления о внутренней структуре адронов, преобразование (2) с полярным 4-вектором θ_μ можно интерпретировать как добавление к адрону (поле $\Psi(x)$) некоторого когерентного состояния (экспонента) глюонов и кварк-антикварковых пар. Кроме того, мы на равных основаниях будем рассматривать преобразования (2) с аксиальным 4-вектором θ_μ и к тому же будем ограничиваться глобальными преобразованиями. В-третьих, поскольку все конечномерные неприводимые представления собственной группы Лоренца с целыми спинами можно получить из прямых произведений 4-векторного представления, то ограничения на теорию, накладываемые рассматриваемой вторичной симметрией, уступают по жесткости только ограничениям, которые давала бы вторичная симметрия, порождаемая биспинорным представлением собственной группы Лоренца. Последние ограничения подробно нами рассмотрены, но здесь не приводятся.

Как будет показано в настоящей работе, требование инвариантности лагранжиана свободного поля относительно преобразований вторичной симметрии (2) в дополнение к его релятивистской инвариантности служит эффективным инструментом отбора представлений собственной группы Лоренца и устранения бесконечного произвола в константах лагранжиана. При этом уровень симметрии каждого из получаемых уравнений (1) столь высок, что спектр масс частиц бесконечно вырожден по спину, непрерывен и простирается от некоторого положительного значения m_0 до $+\infty$, если $R \neq 0$. Чтобы снять это вырождение, мы будем предполагать, что вторичная симметрия спонтанно нарушена, т.е. что одна или несколько лоренцевых скалярных компонент рассматриваемых бесконечнокомпонентных полей имеют ненулевое вакуумное среднее. Аналогом этого в квантовой хромодинамике является предположение о кварк-антикварковом конденсате. Итак, прежде чем приступить к исследованию свойств выделяемого класса свободных полей, необходимо вначале найти структуру лагранжианов взаимодействия таких полей, обладающих требуемой двойной симметрией. Эта задача будет предметом нашей готовящейся к изданию работы.

2. НЕОБХОДИМЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ ГРУППЫ ЛОРЕНЦА И О РЕЛЯТИВИСТСКИ-ИНВАРИАНТНЫХ ЛАГРАНЖИАНАХ

Представляется целесообразным дать вначале являющиеся основой для выкладок настоящей работы сведения о неприводимых представлениях группы Лоренца и о релятивистски-инвариантных лагранжианах, почерпнутые из статьи [2] и монографии [13]. Это к тому же устранил возможные неудобства, связанные с давностью издания названных работ, установит однозначность понятий и обозначений, тем более что до сих пор в литературе при описании представлений превалирует замена группы Лоренца на группу $SO(4) = SO(3) \otimes SO(3)$.

Бесконечно малому собственному преобразованию Лоренца контравариантных координат пространства-времени

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + g^{\mu\nu} \epsilon_{\nu\rho} x^\rho,$$

где $g^{00} = -g^{11} = -g^{22} = -g^{33} = 1$, $g^{\mu\nu} = 0$ ($\mu \neq \nu$), $\epsilon_{\nu\rho} = -\epsilon_{\rho\nu}$, ставится в соответствие преобразование в пространстве представления

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \Psi + \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu} I^{\mu\nu} \Psi,$$

причем $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$.

Коммутационные соотношения для инфинитезимальных операторов собственной группы Лоренца имеют вид

$$[I^{\mu\nu}, I^{\rho\sigma}] = -g^{\mu\rho} I^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} I^{\nu\rho} + g^{\nu\rho} I^{\mu\sigma} - g^{\nu\sigma} I^{\mu\rho}. \quad (6)$$

Неприводимое представление τ собственной группы Лоренца определяется парой чисел (l_0, l_1) , где $2l_0$ – целое, а l_1 – произвольное комплексное число. Канонические базисные векторы пространства этого представления связываются с подгруппой $SO(3)$ и обозначаются через $\xi_{\tau lm}$, где l – спин, m – его проекция на третью ось, причем $m = -l, -l+1, \dots, l$; $l = |l_0|, |l_0|+1, \dots$. Представление $\tau = (l_0, l_1)$ конечномерно, если $2l_1$ – целое число одинаковой четности с $2l_0$ и $|l_1| > |l_0|$, тогда $l = |l_0|, |l_0|+1, \dots, |l_1|-1$. Пары (l_0, l_1) и $(-l_0, -l_1)$ определяют одно и то же представление: $(l_0, l_1) \sim (-l_0, -l_1)$. Если ввести операторы

$$F^3 = iI^{30}, \quad F^- = iI^{10} + I^{20}, \quad F^+ = iI^{10} - I^{20}, \quad (7)$$

то для неприводимого представления $\tau = (l_0, l_1)$ справедливы формулы

$$F^3 \xi_{\tau lm} = B_{\tau l} \sqrt{l^2 - m^2} \xi_{\tau l-1 m} - A_{\tau l} m \xi_{\tau lm} - B_{\tau l+1} \sqrt{(l+1)^2 - m^2} \xi_{\tau l+1 m}, \quad (8)$$

$$F^- \xi_{\tau lm} = -B_{\tau l} \sqrt{(l+m)(l+m-1)} \xi_{\tau l-1 m-1} - A_{\tau l} \sqrt{(l+m)(l-m+1)} \xi_{\tau l m-1} - \\ - B_{\tau l+1} \sqrt{(l-m+1)(l-m+2)} \xi_{\tau l+1 m-1}, \quad (9)$$

$$F^+ \xi_{\tau lm} = B_{\tau l} \sqrt{(l-m)(l-m-1)} \xi_{\tau l-1 m+1} - A_{\tau l} \sqrt{(l-m)(l+m+1)} \xi_{\tau l m+1} + \\ + B_{\tau l+1} \sqrt{(l+m+1)(l+m+2)} \xi_{\tau l+1 m+1}, \quad (10)$$

где

$$A_{\tau l} = \frac{il_0 l_1}{l(l+1)}, \quad B_{\tau l} = \frac{i}{l} \sqrt{\frac{(l^2 - l_0^2)(l^2 - l_1^2)}{4l^2 - 1}}.$$

При переходе от собственной к ортохронной группе Лоренца требуется ввести оператор пространственного отражения P , действие которого на векторы канонического базиса дается формулой

$$P \xi_{\tau l m} = (-1)^{[l]} p_{\dot{\tau} \tau} \xi_{\dot{\tau} l m},$$

где $\dot{\tau} = (-l_0, l_1) \sim (l_0, -l_1)$, когда $\tau = (l_0, l_1)$, причем $p_{\dot{\tau} \tau} p_{\tau \dot{\tau}} = 1$.

Обычно, независимо от того, рассматривается ли собственная или ортохронная группа Лоренца, указывается представление собственной группы Лоренца.

Если представление собственной группы Лоренца разложимо в конечную или бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений, то для векторов $\Psi_1 = \{(\psi_1)_{\tau l m}\}$ и $\Psi_2 = \{(\psi_2)_{\tau l m}\}$ из пространства этого представления эрмитова билинейная форма

$$\overline{\Psi_2} \Psi_1 \equiv (\Psi_2, \Psi_1) = \sum_{\tau, l, m, \tau', l', m'} (\psi_2)_{\tau' l' m'}^* a_{\tau' l' m', \tau l m} (\psi_1)_{\tau l m}$$

будет инвариантной относительно собственной группы Лоренца, если

$$a_{\tau' l' m', \tau l m} = (-1)^{[l]} a_{\dot{\tau} \tau} \delta_{\tau' \dot{\tau}} \delta_{l' l} \delta_{m' m}.$$

Эрмитовость билинейной формы означает, что $a_{\dot{\tau} \tau} = a_{\tau \dot{\tau}}^*$. Эта форма будет инвариантной относительно пространственного отражения P , если $a_{\dot{\tau} \tau} = p_{\dot{\tau} \tau}^* a_{\tau \dot{\tau}} p_{\dot{\tau} \tau}$.

Если элементу g ортохронной группы Лоренца соответствуют преобразование ковариантных координат пространства-времени вида

$$x'_\mu = [l_+(g)]_\mu{}^\nu x_\nu \quad (11)$$

и преобразование поля вида (3), то свободный лагранжиан

$$\mathcal{L}_0 = \frac{i}{2} [(\Psi, \Gamma^\mu \partial_\mu \Psi) - (\partial_\mu \Psi, \Gamma^\mu \Psi)] - \kappa(\Psi, \Psi) \quad (12)$$

будет релятивистски-инвариантным, если матричные операторы Γ^μ удовлетворяют условиям

$$S^{-1}(g) \Gamma^\nu S(g) [l_+(g)]_\nu{}^\mu = \Gamma^\mu. \quad (13)$$

Кроме того, оператор Γ^0 должен подчиняться соотношению

$$(\Gamma^0 \Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, \Gamma^0 \Psi_2), \quad (14)$$

чтобы лагранжиан был вещественным.

Из (13) следует

$$[I^{\mu\nu}, \Gamma^\rho] = -g^{\mu\rho}\Gamma^\nu + g^{\nu\rho}\Gamma^\mu, \quad (15)$$

$$[P, \Gamma^0] = 0, \quad (16)$$

в частности

$$[I^{i0}, \Gamma^0] = \Gamma^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (17)$$

Пусть

$$\Gamma^0 \xi_{\tau l m} = \sum_{\tau' l' m'} c_{\tau' l' m', \tau l m} \xi_{\tau' l' m'}. \quad (18)$$

Тогда условия (15) дают

$$c_{\tau' l' m', \tau l m} = c_{\tau' \tau}(l) \delta_{l l'} \delta_{m m'}, \quad (19)$$

причем величина $c_{\tau' \tau}(l) \equiv c(l | l'_0, l'_1; l_0, l_1)$ может быть отличной от нуля для данного $\tau = (l_0, l_1)$, если $\tau' = (l_0 \pm 1, l_1)$ или $\tau' = (l_0, l_1 \pm 1)$. Из условия (15) также находятся соотношения

$$c(l | l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) \sqrt{(l + l_0 + 1)(l - l_0)}, \quad (20)$$

$$c(l | l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) \sqrt{(l + l_0 + 1)(l - l_0)}, \quad (21)$$

$$c(l | l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) \sqrt{(l + l_1 + 1)(l - l_1)}, \quad (22)$$

$$c(l | l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) \sqrt{(l + l_1 + 1)(l - l_1)}, \quad (23)$$

где $c(l'_0, l'_1; l_0, l_1) \equiv c_{\tau' \tau}$ — произвольные величины.

Условие (16) сводится к виду

$$c_{\tau' \dot{\tau}} p_{\dot{\tau} \tau} = p_{\tau' \dot{\tau}} c_{\dot{\tau} \tau}, \quad (24)$$

а соотношение (14) дает

$$c_{\dot{\tau} \tau'}^*(l) a_{\dot{\tau} \tau} = a_{\tau' \dot{\tau}} c_{\dot{\tau} \tau}(l). \quad (25)$$

Из формул (20)–(23) вытекает, что в релятивистски-инвариантном лагранжиане невозможно зацепление конечномерных и бесконечномерных представлений группы Лоренца, так как $c_{\tau' \tau}(l) = c_{\tau \tau'}(l) = 0$ для пар τ и τ' такого типа: если $\tau = (\pm |l_0|, |l_0| + 1)$, то $\tau' = (\pm (|l_0| + 1), |l_0| + 1)$ или $\tau' = (\pm |l_0|, |l_0|)$.

Зная оператор Γ^0 , с помощью соотношения (17) находим операторы Γ^i , $i = 1, 2, 3$.

3. УСЛОВИЯ, НАКЛАДЫВАЕМЫЕ НА ТЕОРИЮ СВОБОДНЫХ БЕСКОНЕЧНОКОМПОНЕНТНЫХ ПОЛЕЙ ВТОРИЧНОЙ СИММЕТРИЕЙ

В настоящей работе находятся все варианты теории свободных полей, которая удовлетворяет следующим условиям.

УСЛОВИЕ 1. Представление S собственной группы Лоренца, по которому преобразуется любое из рассматриваемых полей, разложимо в бесконечную прямую сумму конечномерных неприводимых представлений, причем кратность каждого из неприводимых представлений не превышает единицу. Бозонные поля принадлежат одному из двух типов, определяемых трансформационными свойствами относительно пространственного отражения: для любого неприводимого представления τ , принадлежащего S , либо $p_{\dot{\tau}\tau} = 1$, либо $p_{\dot{\tau}\tau} = -1$.

УСЛОВИЕ 2. Лагранжиан (12) каждого поля релятивистски-инвариантен и нерасщепляем, т.е. его нельзя представить в виде суммы двух лагранжианов, не содержащих никаких одинаковых компонент поля.

УСЛОВИЕ 3. Лагранжиан (12) каждого поля инвариантен относительно нетривиальных ($D^\mu \neq 0$) глобальных преобразований вторичной симметрии (2), порождаемых или полярным, или аксиальным 4-векторным представлением ортохронной группы Лоренца.

УСЛОВИЕ 4. Матричный оператор Γ^0 из лагранжиана (12) является эрмитовым: $c_{\tau'\tau}^* = c_{\tau\tau'}$.

В качестве основного варианта на первом этапе исследований мы полагаем (условие 2), что свободные бесконечнокомпонентные бозонные поля описываются дифференциальными уравнениями первой степени. Вполне возможно, что на каком-то этапе от этого описания нужно будет отказаться в пользу уравнений второй степени, но, зная структуру уравнений первой степени, мы без труда получим и некоторый класс уравнений второй степени.

Очевидно, что лагранжиан слабого взаимодействия с участием рассматриваемых бесконечнокомпонентных полей не может быть инвариантным относительно преобразований вторичной симметрии, порождаемой полярным или аксиальным 4-векторным представлением группы $L^\uparrow$. Однако и этот, и полный лагранжианы будут обладать вполне определенной вторичной симметрией, порождаемой тензором второго ранга $(0,3)$ или $(-1,2) \oplus (1,2)$ группы $L_+^\uparrow$. Можно было бы с самого начала находить все варианты теории, обладающей именно этой вторичной симметрией, но это была бы концептуально несколько иная и, возможно, более сложная задача.

Поскольку для элементов g собственной группы Лоренца соотношения (5) для операторов D^μ и (13) для операторов Γ^μ одинаковы, то матричные операторы D^μ описываются формулами, аналогичными (15) и (18)–(23), произвольные величины в которых будем обозначать через $d_{\tau'\tau} \equiv d(l'_0, l'_1; l_0, l_1)$. Что касается свойств оператора D^0 относительно пространственного отражения, то они описываются соотношением, аналогичным (16), если параметр θ_μ в преобразовании (2) – полярный 4-вектор, или формулой $\{P, D^0\} = 0$, если θ_μ – аксиальный 4-вектор.

Лагранжиан (12) будет инвариантен относительно преобразований вторичной сим-

метрии (2), если выполнены следующие условия:

$$[\Gamma^\mu, D^\nu] = 0, \quad (26)$$

$$(D^0 \Psi_1, \Psi_2) = (\Psi_1, D^0 \Psi_2). \quad (27)$$

Если в лагранжиане (12) константа κ равна нулю, то его инвариантность относительно преобразований вторичной симметрии (2) будет обеспечена либо при выполнении условий (26), (27), либо при выполнении условий

$$\{\Gamma^\mu, D^\nu\} = 0, \quad (28)$$

$$(D^0 \Psi_1, \Psi_2) = -(\Psi_1, D^0 \Psi_2). \quad (29)$$

Введем матричный оператор Γ^5 , задаваемый формулой

$$\Gamma^5 \xi_{(l_0, l_1)lm} = (-1)^{l_0 + l_1} \xi_{(l_0, l_1)lm}.$$

Легко убедиться, что любой 4-векторный оператор V^μ (подчиняющийся условию типа (5)) антикоммутирует с оператором Γ^5 . Следовательно, если операторы V^μ и W^ν коммутируют друг с другом, то операторы V^μ и $\Gamma^5 W^\nu$ антикоммутируют, т.е. решив уравнения (26), мы будем знать и решения уравнений (28) и наоборот. Поэтому в дальнейшем речь будет идти только об уравнениях (26).

Из условий (26) выделим два независимых соотношения:

$$[\Gamma^0, D^0] = 0, \quad (30)$$

$$[\Gamma^0, D^3] = 0. \quad (31)$$

Остальные уравнения (26) являются следствием формул (30), (31) и коммутационных соотношений типа (15) и (6).

Учтем, что $D^3 = [I^{30}, D^0]$, и воспользуемся формулами (7), (8) и (18)–(23). Тогда соотношения (30), (31) сведутся к алгебраической системе уравнений относительно величин $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$. Заметим, что приводимые ниже уравнения (32)–(41) справедливы для любого вполне приводимого представления S собственной группы Лоренца, которое согласуется с условием 2 и лишь частично с условием 1 – никакие два неприводимых представления группы $L_+^\uparrow$, принадлежащих S , не являются эквивалентными; а “краевые” уравнения (42)–(44) имеют место для тех представлений S , которые к тому же удовлетворяют еще одной части условия 1 – неприводимые представления, принадлежащие S , конечномерны.

Для случая, когда представление (l_0, l_1) содержит не менее двух значений спина ($|l_1| \geq |l_0| + 2$), имеем

$$c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) d(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) - d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) c(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) = 0, \quad (32)$$

$$c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) d(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) - d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) c(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} & l_1 c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - \\ & - (l_0 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + \\ & + l_0 c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - \\ & - (l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = 0, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}
 & c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + \\
 & + c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - \\
 & - d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = 0,
 \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 & l_1 c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) + l_0 d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) - \\
 & - (l_0 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) - \\
 & - (l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) = 0,
 \end{aligned} \tag{36}$$

$$\begin{aligned}
 & c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) - d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) + \\
 & + c(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) - \\
 & - d(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) c(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) = 0,
 \end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
 & c(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) d(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) c(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) + \\
 & + c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + \\
 & + c(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) d(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) c(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) + \\
 & + c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = 0,
 \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned}
 & (l_0 - 1) [c(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) d(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) + d(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) c(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1)] - \\
 & - (l_0 + 1) [c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + \\
 & + d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)] + \\
 & + (l_1 - 1) [c(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) d(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) + \\
 & + d(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) c(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1)] - \\
 & - (l_1 + 1) [c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) + \\
 & + d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] = 0,
 \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
 & l_1 [c(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) d(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) + d(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) c(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) - \\
 & - c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)] + \\
 & + l_0 [c(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) d(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) + d(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) c(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) - \\
 & - c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] = 0,
 \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}
 & l_0(l_0 - 1) [c(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) d(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1) - d(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) c(l_0 - 1, l_1; l_0, l_1)] + \\
 & + l_0(l_0 + 1) [c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - \\
 & - d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1)] + \\
 & + l_1(l_1 - 1) [c(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) d(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1) - \\
 & - d(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) c(l_0, l_1 - 1; l_0, l_1)] + \\
 & + l_1(l_1 + 1) [c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) - \\
 & - d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] = 0,
 \end{aligned} \tag{41}$$

причем величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$, которые могли бы описывать зацепление конечномерных и бесконечномерных неприводимых представлений группы $L_+^\dagger$, должны быть опущены в

соответствии с ранее сделанным замечанием. Кроме соотношений (32)–(41) имеется еще шесть уравнений, которые получаются из (32)–(37) заменой $c_{\tau'\tau} \rightarrow c_{\tau\tau'}$, $d_{\tau'\tau} \rightarrow d_{\tau\tau'}$ ²⁾.

Если $l_1 = |l_0| + 1$, то величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ должны удовлетворять следующим “краевым” уравнениям:

$$\begin{aligned} & c(l_0 \pm 1, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 2)d(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1) + \\ & + d(l_0 \pm 1, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 2)c(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1) = 0, \end{aligned} \quad (42)$$

$$\begin{aligned} & c(l_0, |l_0| + 1; l_0 \mp 1, |l_0| + 1)d(l_0 \mp 1, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 1) + \\ & + d(l_0, |l_0| + 1; l_0 \mp 1, |l_0| + 1)c(l_0 \mp 1, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 1) + \\ & + c(l_0, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 2)d(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1) + \\ & + d(l_0, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 2)c(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1) = 0, \end{aligned} \quad (43)$$

$$\begin{aligned} & l_0 [c(l_0, |l_0| + 1; l_0 \mp 1, |l_0| + 1)d(l_0 \mp 1, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 1) - \\ & - d(l_0, |l_0| + 1; l_0 \mp 1, |l_0| + 1)c(l_0 \mp 1, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 1)] - \\ & - (l_0 + 1)[c(l_0, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 2)d(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1) - \\ & - d(l_0, |l_0| + 1; l_0, |l_0| + 2)c(l_0, |l_0| + 2; l_0, |l_0| + 1)] = 0, \end{aligned} \quad (44)$$

где верхний знак отвечает случаю $l_0 \geq 0$, а нижний – случаю $l_0 \leq 0$. К ним нужно прибавить еще одно уравнение, получающееся из (42) заменой $c_{\tau'\tau} \rightarrow c_{\tau\tau'}$, $d_{\tau'\tau} \rightarrow d_{\tau\tau'}$.

Нетрудно проверить, что величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$, которые в дальнейшем будут выписаны в следствиях 1–4, удовлетворяют всем уравнениям (32)–(44), а также обеспечивают необходимые трансформационные свойства операторов Γ^μ и D^μ относительно пространственного отражения и выполнение соотношений (14) и (27). Доказательство же того, что следствия 1–4 исчерпывают все варианты теории, удовлетворяющей условиям 1–4, слишком громоздко, поэтому мы ограничимся лишь его канвой, изложив в конце этого раздела некоторые общие выводы, а в начале следующего – конкретные, что позволит воспроизвести доказательство в полном объеме.

Простой анализ системы (32)–(37) и (42) показывает, что равенство нулю всех величин $c_{\tau\tau'}$, $d_{\tau\tau'}$ возможно только тогда, когда или лагранжиан поля (12) расщепляем, или преобразование вторичной симметрии тривиально, что противоречит или условию 2, или условию 3.

Из-за эквивалентности неприводимых представлений (l_0, l_1) и $(-l_0, -l_1)$ мы вправе ограничиться лишь такими парами чисел (l_0, l_1) , что $l_1 > 0$.

Пусть для некоторого представления S собственной группы Лоренца, удовлетворяющего условию 1, существует решение системы (32)–(44), согласующееся с условиями 2, 3. Тогда среди представлений $(l_0, l_1) \in S$ имеется такое (k_0, k_1) , что или $c(k_0, k_1 + 1; k_0, k_1)d(k_0, k_1; k_0, k_1 + 1) \neq 0$, или $d(k_0, k_1 + 1; k_0, k_1)c(k_0, k_1; k_0, k_1 + 1) \neq 0$, а величины $c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)$ и $d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)$ равны

²⁾ При ссылках на них мы будем давать им те же номера, но со штрихами.

нулю, если $|l_0| \leq l_1 - 1$, $l_1 \leq k_1 - 1$. Если $k_0 \neq 0$, то из уравнений (38)–(41) и (43), (44) получаем

$$d(l_0 + 1, k_1; l_0, k_1)c(l_0, k_1; l_0 + 1, k_1) = \frac{(k_1 + k_0)a - (k_1 - k_0)b}{2k_1(k_1 - l_0)(k_1 + l_0 + 1)}, \quad (45)$$

$$c(l_0 + 1, k_1; l_0, k_1)d(l_0, k_1; l_0 + 1, k_1) = \frac{-(k_1 - k_0)a + (k_1 + k_0)b}{2k_1(k_1 - l_0)(k_1 + l_0 + 1)}, \quad (46)$$

$$d(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1)c(l_0, k_1; l_0, k_1 + 1) = \frac{-(l_0 + k_0)a + (l_0 - k_0)b}{(k_1 - l_0)(k_1 - l_0 + 1)(k_1 + l_0)(k_1 + l_0 + 1)}, \quad (47)$$

$$c(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1)d(l_0, k_1; l_0, k_1 + 1) = \frac{(l_0 - k_0)a - (l_0 + k_0)b}{(k_1 - l_0)(k_1 - l_0 + 1)(k_1 + l_0)(k_1 + l_0 + 1)}, \quad (48)$$

где по крайней мере одна из констант a или b не равна нулю, причем в (45), (46) $-k_1 + 1 \leq l_0 \leq k_1 - 2$, а в (47), (48) $|l_0| \leq k_1 - 1$. Если же $k_0 = 0$, то числители в правых частях равенств (45)–(48) нужно заменить соответственно на $k_1(A - B)$, $k_1(A + B)$, $-k_1A + l_0B$ и $-k_1A - l_0B$, где по крайней мере одна из констант A или B не равна нулю.

Чтобы продвигаться дальше в анализе системы уравнений (32)–(44), введем величины $g_{\tau'\tau}$:

$$d_{\tau'\tau} = g_{\tau'\tau}c_{\tau'\tau}, \quad (49)$$

если $c_{\tau'\tau} \neq 0$. Убедившись, что последнее неравенство выполнено, мы можем пользоваться следующими уравнениями, получаемыми соответственно из уравнений (42), (32), (33), (34) и (35), (36) и (37), (34) и (34'), (36) и (36')³⁾:

$$g(l_0, l_0 + 2; l_0, l_0 + 1) = -g(l_0 + 1, l_0 + 2; l_0, l_0 + 2), \quad (50)$$

$$g(l_0, l_1; l_0 - 1, l_1) = g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (51)$$

$$g(l_0, l_1; l_0, l_1 - 1) = g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (52)$$

$$\begin{aligned} & [g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) - g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] \times \\ & \times [l_1 g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - (l_0 + 1)g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)] = \\ & = [g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)] \times \\ & \times [(l_1 + 1)g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) - l_0 g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)], \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} & [g(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) - g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)] \times \\ & \times [l_1 g(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) + l_0 g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] = \\ & = [g(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) - g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] \times \\ & \times [(l_1 + 1)g(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) + (l_0 + 1)g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)], \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} & g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1)g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) \times \\ & \times [l_1 g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) - (l_0 + 1)g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)] \times \\ & \times [l_1 g(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) - (l_0 + 1)g(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1)]c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) \times \end{aligned}$$

³⁾См. сноску 2.

$$\begin{aligned}
& \times d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) c(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) = \\
& = g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) \times \\
& \times [(l_1 + 1) g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) - l_0 g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] \times \\
& \times [(l_1 + 1) g(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) - l_0 g(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)] c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) \times \\
& \times d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) c(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1), \quad (55) \\
& g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) \times \\
& \times [l_1 g(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) + l_0 g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1)] \times \\
& \times [l_1 g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) + l_0 g(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)] \times \\
& \times c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = \\
& = g(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) g(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) \times \\
& \times [(l_1 + 1) g(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) + (l_0 + 1) g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1)] \times \\
& \times [(l_1 + 1) g(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1) + (l_0 + 1) g(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1)] \times \\
& \times c(l_0 + 1, l_1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1) \times \\
& \times c(l_0, l_1 + 1; l_0 + 1, l_1 + 1) d(l_0 + 1, l_1 + 1; l_0, l_1 + 1), \quad (56)
\end{aligned}$$

а также уравнениями, получаемыми из (50)–(54) заменой $g_{\tau'\tau} \rightarrow g_{\tau\tau'}$.

4. СЛЕДСТВИЯ ДВОЙНОЙ СИММЕТРИИ ЛАГРАНЖИАНА СВОБОДНОГО ФЕРМИОННОГО ПОЛЯ

Каковы бы ни были величины $p_{\dot{\tau}\tau}$ и $a_{\dot{\tau}\tau}$ в некотором каноническом базисе, можно указать такой новый канонический базис, в котором остаются неизменными формулы (8)–(10) и справедливы равенства

$$p_{\dot{\tau}\tau} = p_{\tau\dot{\tau}} = 1, \quad (57)$$

$$a_{\dot{\tau}\tau} = a_{\tau\dot{\tau}} = \pm 1, \quad (58)$$

причем для разных представлений τ знаки в правой части (58) могут быть как одинаковыми, так и разными.

Из соотношений (24), (25) и условия 4 с учетом формул (20)–(23) получаем, что

$$c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = c(-l_0 - 1, l_1; -l_0, l_1), \quad (59)$$

$$c(l_0, l_1 \pm 1; l_0, l_1) = c(-l_0, l_1 \pm 1; -l_0, l_1), \quad (60)$$

$$c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = c^*(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1), \quad (61)$$

$$c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = -c^*(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1), \quad (62)$$

а также что величины $a_{\dot{\tau}\tau}$ для всех представлений τ одинаковы и без ограничения общности их можно положить равными единице. Заметим, что последнее утверждение и соотношения (61), (62) потеряют силу, если опустить условие 4.

Рассмотрим случай, когда в преобразованиях (2) параметр θ_μ – полярный 4-вектор.

Тогда величины $d_{\tau'\tau}$ должны подчиняться условиям типа (59), (60). Из формул (59) для $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ и из (45), (46) при $l_0 = -1/2$ получаем, что $a = b$, после чего из (45)–(48) и (60) имеем для всех допустимых значений l_0

$$g(l_0 + 1, k_1; l_0, k_1) = g(l_0, k_1; l_0 + 1, k_1), \quad (63)$$

$$g(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1) = g(l_0, k_1; l_0, k_1 + 1), \quad (64)$$

$$g(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1) = g(-l_0, k_1 + 1; -l_0, k_1). \quad (65)$$

Мы должны по отдельности проанализировать две возможные ситуации:

$$c(k_1, k_1 + 1; k_1 - 1, k_1 + 1)d(k_1 - 1, k_1 + 1; k_1, k_1 + 1) \neq 0 \quad (66)$$

или

$$c(k_1, k_1 + 1; k_1 - 1, k_1 + 1)d(k_1 - 1, k_1 + 1; k_1, k_1 + 1) = 0. \quad (67)$$

Остановимся на первой из них. Из уравнений (42) и (32) следует, что мы вправе ввести величины $g(l_0 \pm 1, k_1 + 1; l_0, k_1 + 1)$ для всех допустимых значений l_0 . Воспользовавшись вначале равенством (50) при $l_0 = k_1 - 1$ и равенством (51) при $l_1 = k_1 + 1$ и всех допустимых значениях l_0 , находим, что система уравнений (53), (54) при $l_0 = k_1 - 2$, $l_1 = k_1$ дает два решения, устанавливаем, какова должна быть зависимость от l_0 величин $g(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1)$ для каждого из решений, и проверяем эту зависимость методом математической индукции. Получаем, что одно из решений системы уравнений (53), (54) имеет вид

$$g(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1) = (-1)^{l_0 + k_1 - 1} g_0, \quad (68)$$

где g_0 — некоторая константа. Оно находится в противоречии с соотношением (65) и должно быть отброшено. Тогда остается только решение

$$\begin{aligned} g(l_0 \pm 1, k_1; l_0, k_1) &= g(l_0 \pm 1, k_1 + 1; l_0, k_1 + 1) = -g(l_0, k_1 + 1; l_0, k_1) = \\ &= -g(l_0, k_1; l_0, k_1 + 1) = g_0. \end{aligned} \quad (69)$$

Используя соотношения (45)–(48) (при $a = b$) и (69), обращаемся к системе уравнений (55), (56) при $l_0 = k_1 - 2$, $l_1 = k_1$. Так как $a \neq 0$ и $g_0 \neq 0$, то эта система непротиворечива тогда и только тогда, когда $k_1 = 3/2$. При таком значении k_1 имеем

$$c\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)d\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = d\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)c\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}; \frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) = \frac{ak_0}{6}.$$

Далее мы можем вновь воспользоваться системой уравнений (38)–(41) и (43), (44) при $l_1 = k_1 + 1 = 5/2$ и т.д. Наконец, используя метод математической индукции, можно убедиться в том, что представление S включает в себя все конечномерные представления группы $L_+^\uparrow$ и для всех допустимых значений l_0 и l_1 справедливы равенства

$$g(l_0 \pm 1, l_1; l_0, l_1) = -g(l_0, l_1 \pm 1; l_0, l_1) = g_0, \quad (70)$$

$$c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1)c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1)c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = f_0, \quad (71)$$

где f_0 – некоторая константа. Очевидно, что решение (71) находится в противоречии с соотношениями (61), (62), связанными с условием 4, т.е. в рассматриваемой ситуации условия 1–4 не выполнимы. Если бы мы отказались от условия 4, то с учетом формул (58), (25), (20)–(23) и (71) мы нашли бы, что условия 1–3 выполняются тогда и только тогда, когда

$$a_{\dot{\tau}\tau} = (-1)^{l_1 - \frac{3}{2}} e_0, \quad \text{если } \tau = (l_0, l_1),$$

$$c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = c_0,$$

где константа e_0 равна либо 1, либо -1 , а константа c_0 вещественна. Здесь и везде в дальнейшем значения величин $c_{\tau'\tau}$ даются с точностью до несущественных фазовых множителей, которые можно ввести или устранить, изменив относительные фазы базисных векторов пространства представления S .

На анализе ситуации, которая описывается равенством (67), как и на анализе всех других вариантов, мы останавливаться больше не будем.

Чтобы не загромождать формулировки следствий 1–4, отметим предварительно, что каждому представлению S группы $L_+^\uparrow$, фигурирующему в этих следствиях, соответствует однозначная (с точностью до общего нормировочного множителя) совокупность величин $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$, выписываемая для всех подходящих пар τ и τ' , принадлежащих S , и однозначная (с точностью до общего знака, фиксируемого как положительный) совокупность величин $a_{\dot{\tau}\tau}$: $a_{\dot{\tau}\tau} = 1$ для всех $\tau \in S$.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Требование, чтобы теория свободного фермионного поля удовлетворяла условиям 1–4, если параметр θ_μ в преобразованиях (2) – полярный 4-вектор, выполнимо только для следующего счетного множества представлений S собственной группы Лоренца, нумеруемых полуцелыми числами k_1 ($k_1 \geq 3/2$):*

$$S^{k_1} = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_0=-k_1+\frac{1}{2}}^{k_1-\frac{3}{2}} \oplus \left(\frac{1}{2} + n_0, k_1 + n_1 \right), \quad (72)$$

причем для представления S^{k_1} соответствующие величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ даются равенствами

$$\begin{aligned} c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = \\ &= c_0 \sqrt{\frac{(k_1 - l_0 - 1)(k_1 + l_0)}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_0 - 1)(l_1 + l_0)(l_1 + l_0 + 1)}}, \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = \\ &= c_0 \sqrt{\frac{(k_1 - l_1 - 1)(k_1 + l_1)}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_0 + 1)(l_1 + l_0)(l_1 + l_0 + 1)}}, \end{aligned} \quad (74)$$

$$d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = g_0 c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (75)$$

$$d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = g_0 c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (76)$$

где c_0 и g_0 – действительные константы.

СЛЕДСТВИЕ 2. *Требование, чтобы теория свободного фермионного поля удовлетворяла условиям 1–4, если параметр θ_μ в преобразованиях (2) – аксиальный 4-вектор, выполнимо только в следующих трех ситуациях:*

1) для счетного множества представлений собственной группы Лоренца, элемент которого дается формулой (72), где $k_1 \geq 3/2$, причем для представления S^{k_1} величины $c_{\tau'\tau}$ даются формулами (73), (74) с действительной константой c_0 , а величины $d_{\tau'\tau}$ равны

$$d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = g_0 l_1 c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (77)$$

$$d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = g_0 l_0 c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (78)$$

где g_0 – действительная константа;

2) для счетного множества представлений собственной группы Лоренца, элемент которого дается формулой (72), где $k_1 \geq 3/2$, причем для представления S^{k_1} соответствующие величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ даются равенствами

$$\begin{aligned} c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = \\ &= (-1)^{l_1 - \frac{1}{2}} c_0 l_1 \sqrt{\frac{(k_1 - l_0 - 1)(k_1 + l_0)}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_0 - 1)(l_1 + l_0)(l_1 + l_0 + 1)}}, \end{aligned} \quad (79)$$

$$\begin{aligned} c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = \\ &= (-1)^{l_0 - \frac{1}{2}} c_0 l_0 \sqrt{\frac{(k_1 - l_1 - 1)(k_1 + l_1)}{(l_1 - l_0)(l_1 - l_0 + 1)(l_1 + l_0)(l_1 + l_0 + 1)}}, \end{aligned} \quad (80)$$

$$d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = g_0 l_1^{-1} c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (81)$$

$$d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = g_0 l_0^{-1} c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (82)$$

где c_0 и g_0 – действительные константы;

3) для представления S собственной группы Лоренца, содержащего все конечномерные неприводимые представления группы $L_+^\uparrow$ с полуцелыми спинами, которое будем обозначать через S^F :

$$S^F = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_0=-n_1-1}^{n_1} \oplus \left(\frac{1}{2} + n_0, \frac{3}{2} + n_1 \right), \quad (83)$$

причем

$$\begin{aligned} c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = \\ &= (-1)^{l_1 + \frac{1}{2}} c_0 \sqrt{\frac{1 - (-1)^{l_1 + l_0}}{2(l_1 - l_0 - 1)(l_1 + l_0)} + \frac{1 + (-1)^{l_1 + l_0}}{2(l_1 + l_0 + 1)(l_1 - l_0)}}, \end{aligned} \quad (84)$$

$$\begin{aligned} c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = \\ &= c_0 \sqrt{\frac{1 - (-1)^{l_1 + l_0}}{2(l_0 - l_1 - 1)(l_1 + l_0)} + \frac{1 + (-1)^{l_1 + l_0}}{2(l_1 + l_0 + 1)(l_0 - l_1)}}, \end{aligned} \quad (85)$$

$$d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = (-1)^{l_1 + \frac{1}{2}} g_0 c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (86)$$

$$d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = -d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = (-1)^{l_0 - \frac{1}{2}} g_0 c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (87)$$

где c_0 и g_0 – действительные константы.

5. СЛЕДСТВИЯ ДВОЙНОЙ СИММЕТРИИ ЛАГРАНЖИАНА СВОБОДНОГО БОЗОННОГО ПОЛЯ

Приводимые ниже следствия 3, 4 справедливы для каждого из двух типов бозонных полей, описанных в условии 1.

СЛЕДСТВИЕ 3. *Требование, чтобы теория свободного бозонного поля удовлетворяла условиям 1–4, если параметр θ_μ в преобразованиях (2) – полярный 4-вектор, выполнимо только в следующих двух ситуациях:*

1) для счетного множества представлений собственной группы Лоренца, нумеруемых целыми числами k_1 ($k_1 \geq 1$):

$$S^{k_1} = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_0=-k_1+1}^{k_1-1} \oplus (n_0, k_1 + n_1), \quad (88)$$

причем величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ описываются соответственно формулами (73), (74) и (75), (76) с действительными константами c_0 и g_0 ;

2) для представления собственной группы Лоренца, содержащего все конечномерные неприводимые представления группы $L_+^\uparrow$ с целыми спинами, которое будем обозначать через S^B :

$$S^B = \sum_{n_1=0}^{+\infty} \sum_{n_0=-n_1}^{n_1} \oplus (n_0, 1 + n_1), \quad (89)$$

причем

$$\begin{aligned} c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = \\ &= (-1)^{l_1+1} c_0 \sqrt{\frac{1 + (-1)^{l_1+l_0}}{2(l_1 + l_0 + 1)(l_1 - l_0 - 1)} + \frac{1 - (-1)^{l_1+l_0}}{2(l_1 + l_0)(l_1 - l_0)}}, \end{aligned} \quad (90)$$

$$\begin{aligned} c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) &= c(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = \\ &= c_0 \sqrt{\frac{1 + (-1)^{l_1+l_0}}{2(l_1 + l_0 + 1)(l_0 - l_1 - 1)} + \frac{1 - (-1)^{l_1+l_0}}{2(l_1 + l_0)(l_0 - l_1)}}, \end{aligned} \quad (91)$$

$$d(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1) = d(l_0, l_1; l_0 + 1, l_1) = (-1)^{l_1+1} g_0 c(l_0 + 1, l_1; l_0, l_1), \quad (92)$$

$$d(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1) = d(l_0, l_1; l_0, l_1 + 1) = (-1)^{l_0} g_0 c(l_0, l_1 + 1; l_0, l_1), \quad (93)$$

где c_0 и g_0 – действительные константы.

СЛЕДСТВИЕ 4. *Требование, чтобы теория свободного бозонного поля удовлетворяла условиям 1–4, если параметр θ_μ в преобразованиях (2) – аксиальный 4-вектор, выполнимо только для счетного множества представлений собственной группы Лоренца, элемент которого дается формулой (88), где $k_1 \geq 2$, причем для представления S^{k_1} величины $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$ описываются соответственно формулами (73), (74) и (77), (78) с действительными константами c_0 и g_0 .*

Представляется целесообразным включить в рассмотрение также варианты теории бозонного поля, когда или наряду с условием 3, или взамен условия 3 выполняется следующее

УСЛОВИЕ 3А. Оба типа свободных бозонных полей, обозначаемых через φ_+ и φ_- , описываются до спонтанного нарушения вторичной симметрии идентичными лагранжианами. Сумма этих лагранжианов инвариантна относительно преобразований вторичной симметрии, имеющих вид

$$\begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \varphi'_+ \\ \varphi'_- \end{pmatrix} = \exp \left[-i \begin{pmatrix} 0 & D^\mu \\ D^\mu & 0 \end{pmatrix} \theta_\mu \right] \begin{pmatrix} \varphi_+ \\ \varphi_- \end{pmatrix}, \quad (94)$$

где параметры θ_μ являются компонентами полярного или аксиального 4-вектора ортохронной группы Лоренца, а D^μ – матричные операторы.

Очевидно, что если в преобразовании (94) параметр θ_μ – полярный (аксиальный) 4-вектор, то теория свободных бозонных полей удовлетворяет условиям 1, 2, 3А и 4 для тех представлений S и соответствующих им величин $c_{\tau'\tau}$ и $d_{\tau'\tau}$, которые описаны в следствии 4 (следствии 3).

6. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В каждом из вариантов теории, описанных в следствиях 1–4, операторы D^μ из преобразований вторичной симметрии (2) определены однозначно с точностью до общей нормировочной константы, а значит, группа вторичной симметрии, задаваемая преобразованиями (2) и их произведениями, тоже определена однозначно. В настоящей работе не было нужды выяснять характеристики алгебры Ли какой-либо из этих групп. Заметим лишь, что отвечающая следствиям 1, 2 (п. 2), 3 (п. 1) алгебра Ли группы двойной симметрии совпадает с алгеброй Ли группы Пуанкаре, однако операторы D^μ нельзя отождествить с генераторами сдвигов P^μ , так как D^μ действуют только на спинные переменные поля, а P^μ на них не действуют.

Лагранжиану (12) отвечает уравнение типа Гельфанда–Яглома (1), в котором $R = \kappa E$, где E – единичный оператор. Пусть λ – собственное значение оператора Γ^0 :

$$\Gamma^0 \Psi(\lambda) = \lambda \Psi(\lambda).$$

Тогда спектр масс M , получаемый из уравнения (1), связан со спектром собственных значений оператора Γ^0 соотношением $M = \kappa/\lambda$. Так как из-за вторичной симметрии теории оператор Γ^0 коммутирует с оператором D^3 , который согласно равенству, аналогичному (17), и соотношениям (7), (8) переводит состояние с определенным спином l

в состояние со спинами $l - 1$, l и $l + 1$, то собственными векторами оператора Γ^0 с собственным значением λ будут также векторы $(D^3)^n \Psi(\lambda)$, $n \geq 1$. Таким образом, спектр масс, отвечающий каждому из бесконечнокомпонентных полей изучаемой теории, будет бесконечно вырожден по спину. Детальный анализ показывает, что спектр масс к тому же непрерывен, дискретные точки в нем отсутствуют. Но уже бесконечной вырожденности по спину достаточно, чтобы поставить вопрос о спонтанном нарушении вторичной симметрии.

Благодарности. Я очень признателен А. У. Климыку, А. А. Комару и В. И. Фушичу за полезные обсуждения затронутых в настоящей работе вопросов.

Список литературы

- [1] В. Л. Гинзбург, И. Е. Тамм. ЖЭТФ. 1947. Т. 17. С. 227.
- [2] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 703.
- [3] А. А. Комар, Л. М. Сладь. ТМФ. 1969. Т. 1. С. 50.
- [4] I. T. Grodsky, R. F. Streater. Phys. Rev. Lett. 1968. V. 20. P. 695.
- [5] Н. Н. Боголюбов, А. А. Лозунов, А. И. Оксак, И. Т. Тодоров. Общие принципы квантовой теории поля. М.: Наука, 1987.
- [6] И. М. Гельфанд, А. М. Яглом. ЖЭТФ. 1948. Т. 18. С. 1094.
- [7] V. Bargmann. Math. Rev. 1949. V. 10. P. 583; P. 584.
- [8] E. Abers, I. T. Grodsky, R. E. Norton. Phys. Rev. 1967. V. 159. P. 1222.
- [9] P. A. M. Dirac. Proc. Roy. Soc. A. 1971. V. 322. P. 435.
- [10] Л. М. Сладь. ТМФ. 1970. Т. 2. С. 67.
- [11] В. Паули. Принцип запрета, группа Лоренца, отражение пространства, времени и заряда. В сб.: Нильс Бор и развитие физики. Ред. В. Паули при участии Л. Розенфельда и В. Вайскопфа. М.: ИЛ, 1958. С. 46.
- [12] L. M. Slad. Mod. Phys. Lett. A. 2000. V. 15. P. 379.
- [13] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения. М.: Физматгиз, 1958.

Поступила в редакцию 14.XI.2000 г.