Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Найденов, В. В. Яновский, Геометро-динамический подход к бильярдным системам. II. Геометрические особенности инволюций, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 116–130

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf524>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:52:01

ГЕОМЕТРО-ДИНАМИЧЕСКИЙ ПОДХОД К БИЛЛИАРДНЫМ СИСТЕМАМ. II. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ ИНВОЛЮЦИЙ

Установлены и исследованы следующие геометрические особенности билиардных инволюций: ковариантность, преобразования, связанные с отражениями билиардных лучей, типы симметрий, характер монотонности и дифференцируемости.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] с билиардами произвольного вида связан специальный класс динамических систем – обратимых отображений с проективными инволюциями в симметричном фазовом пространстве. В данной работе будет продолжено развитие геометро-динамического подхода к системам с упругими отражениями. Основная ее цель состоит в выделении и исследовании общих (геометрических) свойств билиардных инволюций, кроме установленной в [1] локальной проективности. Наибольший интерес представляют следующие свойства: геометрическая ковариантность (замены переменных) и преобразования инволюции, связанные с отражениями лучей билиарда (раздел 2); свойства симметрии (раздел 3); (кусочная) монотонность, дифференцируемость и особенности билиардной инволюции (раздел 4). Специфика билиардных инволюций, соответствующая этим геометро-динамическим свойствам, будет определять тот или иной тип динамического поведения траекторий билиарда. Многие из установленных свойств прямо сказываются на структуре и особенностях фазового портрета билиарда.

Используемые в данной работе сведения из дифференциальной, проективной геометрии и функционального анализа изложены, например, в книгах [2], [3] и [4], соответственно.

2. КОВАРИАНТНОСТЬ БИЛЛИАРДА

Выбор геометрической реализации билиарда по сути носит вспомогательный характер. С физической точки зрения динамика его лучей зависит лишь от формы грани-

* Харьковский институт монокристаллов, Харьков, Украина.
E-mail: naydenov@isc.kharkov.com

цы $\partial\Omega$. Например, динамически эквивалентными друг другу будут билиарды с гометичными границами. Эти факты удобно объединить в общий принцип ковариантности, т.е. геометрической инвариантности билиарда. Математически ковариантность билиарда определяется характерным законом преобразования его инволюции f при (геометрических) заменах переменных в симметричном фазовом пространстве. При таких допустимых заменах остается инвариантным вид соответствующего билиардного отображения. В стандартном подходе к билиардам (поток геодезических) такой принцип если и проявляется, то не столь явно из-за неравноправности переменных фазового пространства (координаты и скорости).

2.1. Геометрические замены переменных. Явный вид инволюции f билиарда B зависит не только от формы границы $\partial\Omega$, но и от способа ее параметризации $\vec{r}|_{\partial\Omega} = \vec{r}(\varphi)$, $\varphi \in S^1 \sim \partial\Omega$ (далее знак $\sim$ обозначает гомеоморфизм), а также от выбора координат для области Ω в выделенной (“лабораторной”) системе отсчета $L = \{O_L, \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ (O_L – начало координат, $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ – векторы базисного репера).

Рассмотрим геометрические преобразования билиарда, т.е. такие, при которых не изменяется форма его границы. Некоторые из них, например, замены систем отсчета, относятся к глобальным преобразованиям, другие, такие как внутренняя репараметризация $\partial\Omega$, связаны с локальными заменами. Заметим, что при удачном выборе координатного представления вид инволюции упрощается. Например, если граница $\partial\Omega$ имеет центр симметрии, то с ним удобно совместить начало координат.

Исследуем геометрические замены переменных для инволюции f . Отметим, что конформные преобразования, сохраняющие форму $\partial\Omega$, и репараметризация границы входят в более широкий класс гомеоморфных или диффеоморфных замен переменных симметричного фазового пространства билиарда (здесь и далее характер гладкости не уточняется, а предполагается, что он соответствует необходимому классу C^r в каждом конкретном случае). Как обычно, функцию $f(\varphi_1, \varphi_2)$ удобно считать однопараметрическим (относительно переменной φ_2) семейством одномерных (относительно φ_1) инволюций, $f(\varphi_1, \varphi_2) \equiv f_{\varphi_2}(\varphi_1)$. Такое представление позволяет выделить замены, относящиеся собственно к первому аргументу инволюции. Укажем, что, несмотря на симметричный характер переменных φ_1 и φ_2 симметричного фазового пространства $T^2 = S^1 \otimes S^1$ (об этой симметрии, связанной с обратимостью системы, см. ниже п. 2.5), свойства инволюции по каждой из них будут существенно различными (см. также раздел 4).

Начнем с преобразований, затрагивающих только первый аргумент функции f , переменная φ_2 при этом не изменяется. С ними связан переход от обычных (евклидовых) координат к проективному представлению. Это значит, что координаты последовательных пар точек отражения на границе $\partial\Omega$ заменяются на (угловые) координаты проходящих через них лучей билиарда. Следовательно, геометрически эта замена соответствует переходу к проективно-двойственным образам – от точек к лучам.

Формальный смысл такой замены состоит в следующем. Всякая одномерная инволюция f при (локально) взаимно-однозначных заменах z вида $f \rightarrow g = z^{-1} \circ f \circ z$ сохраняет основное свойство $f \circ f = \text{id}$ (здесь $\circ$ – знак композиции отображений; id – тождественное преобразование), т.е. $g \circ g = \text{id}$. Для билиарда подобная замена приводит инволюцию

f к дробно-рациональному (проективному) преобразованию R [1]

$$\begin{aligned} f_{\varphi_2}(\varphi_1) &= p_{\varphi_2}^{-1} \circ R_{\varphi_2} \circ p_{\varphi_2}(\varphi_1), \\ p_{\varphi_2}(\varphi_1) &= \frac{x(\varphi_1) - x(\varphi_2)}{y(\varphi_1) - y(\varphi_2)}, \\ R_{\varphi}(p) &= \frac{\alpha(\varphi)p + \beta(\varphi)}{\beta(\varphi)p - \alpha(\varphi)}, \end{aligned} \quad (1)$$

причем $p_{\varphi_2}(\varphi_1) \equiv p_{\varphi_1}(\varphi_2)$, $\alpha(\varphi) = n_x^2(\varphi) - n_y^2(\varphi)$, $\beta(\varphi) = 2n_x(\varphi)n_y(\varphi)$, а $\vec{r}|_{\partial\Omega} = (x(\varphi), y(\varphi))$ и $\vec{n}|_{\partial\Omega} = (n_x(\varphi), n_y(\varphi))$ – уравнения границы и единичного ($\vec{n}^2 = 1$) поля внешних нормалей к ней на декартовой плоскости, $\vec{r} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Обратное преобразование $p_{\varphi_2}^{-1}$ для достаточно гладкой границы $\partial\Omega$ всегда существует и локально-диффеоморфно (как и прямое p_{φ_2}). Если p^{-1} имеет несколько ветвей, то выбирается та из них, которая соответствует билиардному движению и принципу наименьшего действия. Напомним, этот принцип состоит в том, что расстояние между последовательными точками отражения должно быть минимальным, т.е. $|\vec{r}(p_j^{-1}(p)) - \vec{r}(\varphi_2)| = \min$, равно как и $|\vec{r}(\varphi_1) - \vec{r}(\varphi_2)| = \min$, где $p = p_{\varphi_2}(\varphi_1)$, j – номер ветви.

Выделенная роль проективных замен по переменной φ_1 связана с тем, что именно эта зависимость определяет основное свойство инволюции $f \circ f = \text{id}$. Несмотря на то что эти замены изменяют сам вид билиардного отображения, динамика траекторий отдельного билиарда при этом остается неизменной, а фазовый портрет – топологически эквивалентным.

Аналогичные замены, относящиеся уже только ко второму аргументу инволюции (переменная φ_1 при этом фиксирована), уже не имеют столь глубокого смысла и, вообще говоря, нарушают ковариантность билиарда. Только при вполне определенных преобразованиях обеих переменных фазового пространства ковариантность сохраняется.

Разберем замены, при которых не изменяется вид билиардного отображения B , введенного в статье [1]. Именно они составляют класс ковариантных (допустимых) замен билиарда в геометро-динамическом подходе. Их геометрический смысл, очевидно, связан с заменами систем отсчета. Задание системы отсчета предполагает указание системы координат, начальной точки на границе $\partial\Omega$ и параметризацию последней. Репараметризация границы сама может рассматриваться как замена системы координат. Поэтому ограничимся только последними преобразованиями.

Заменам систем координат $L \rightarrow \tilde{L}$ соответствуют координатные преобразования вида $\vec{r}^{(L)} \rightarrow \tilde{\vec{r}}^{(\tilde{L})}$. Сужение таких преобразований на $\partial\Omega$ приводит к замене $\varphi \rightarrow \tilde{\varphi} = q(\varphi)$. При этом хотя бы локально можно считать, что существует обратное преобразование q^{-1} той же гладкости, что и исходное, т.е. $\varphi = q^{-1}(\tilde{\varphi})$ и $q^{-1} \circ q = q \circ q^{-1} = \text{id}$. Если имеется несколько ветвей локального преобразования q^{-1} , то выбираются те из них, для которых $|\vec{r}(q_j^{-1}(\tilde{\varphi}_1)) - \vec{r}(q_k^{-1}(\tilde{\varphi}_2))| = \min$ (j и k – “номера” ветвей), так же как и $|\vec{r}(q(\varphi_1)) - \vec{r}(q(\varphi_2))| = \min$ для точек на границе $\partial\Omega$. Это, как и в предыдущем случае с проективной заменой p_{φ_2} , соответствует принципу наименьшего действия для билиарда. Такого усложнения не избежать из-за того, что уравнения замкнутых кри-

вых нелинейные. В дальнейшем под q^{-1} понимается совокупность (локально сшитых по типу расслоения) “правильных” ветвей для каждого конкретного билиарда.

В результате замены системы координат изменяются сама инволюция и оба ее аргумента, $\varphi_{1,2} \rightarrow \tilde{\varphi}_{1,2} = q(\varphi_{1,2})$, $f \rightarrow \tilde{f} = q(f)$, где все величины $\{\varphi_{1,2}; \tilde{\varphi}_{1,2}; f; \tilde{f}\} \in S^1 \sim \partial\Omega$. Отсюда вытекает соотношение

$$f_{\varphi_2} = (q^{-1} \circ \tilde{f}_{q(\varphi_2)} \circ q) \iff \tilde{f}_{\tilde{\varphi}_2} = (q \circ f_{q^{-1}(\tilde{\varphi}_2)} \circ q^{-1}). \quad (2)$$

Оно справедливо в любом координатном представлении, в том числе и в проективном для дробно-рациональной инволюции билиарда вида $(R_{\varphi_2} \circ p_{\varphi_2})(\varphi_1)$.

Преобразование (2) соответствует евклидовым движениям, при которых изменяется расположение билиарда на плоскости, но форма его границы, следовательно, и динамика траекторий не изменяются. Эта замена Q относится к обеим переменным симметричного фазового пространства и, как легко проверить, оставляет инвариантным вид билиардного отображения B ,

$$Q \circ B = B \circ Q, \quad B := \{\bar{\varphi}_1 = \varphi_2 \pmod{2\pi}; \quad \bar{\varphi}_2 = f(\varphi_1, \varphi_2) \pmod{2\pi}\}, \quad (3)$$

где преобразование $Q := \{\bar{\varphi}_1 = q(\varphi_1); \bar{\varphi}_2 = q(\varphi_2)\}$ рассматривается как отображение в фазовом пространстве. Важную роль при этом играет первое уравнение для отображения B . Оно определяет стандартный вид билиардного отображения (при произвольных заменах в фазовом пространстве вид этого уравнения, вообще говоря, изменяется). Уравнение $\bar{\varphi}_1 = \varphi_2$ соответствует “причинности” билиарда, указывая, что точка отражения переходит в точку вылета для последующего отражения и т.д. Ковариантность билиарда должна сохранять этот принцип.

Соотношения (1)–(3) по сути выражают ковариантность билиарда и его инволюции. Неизометричные друг другу билиарды имеют заведомо различные инволюции (в одной и той же системе отсчета), а вследствие этого и различные динамические свойства. Ковариантность билиарда будет неоднократно использоваться в дальнейшем, так как некоторые свойства инволюции удобно установить в одном координатном представлении, а использовать уже в другом.

С геометрическими заменами тесно связан еще один тип ковариантных преобразований. Эти преобразования определяют изменение инволюции, происходящее при перемещении точки отражения в билиардном каскаде $T^2 \xrightarrow{B} T^2$. Такому преобразованию $f_{\varphi_2}(\varphi_1) \rightarrow f_{\varphi_2'}(\varphi_1)$ соответствуют переходы в семействе инволюций f_{φ_2} , т.е. замены, относящиеся к ее второму аргументу (переменная φ_1 фиксирована). Подчеркнем, что при этом рассматриваются специальные замены только инволюции f , а не билиардного отображения в целом.

Отражение билиардных лучей только локально относится к проективным преобразованиям [1]. Известно, что проективные преобразования эквивалентны заменам проективных (однородных) координат. В билиардах подобная эквивалентность отсутствует. В целом при билиардном движении сохраняются углы и прямолинейность (при отражениях), но не сохраняются расстояния (между отражениями). Поэтому ни к евклидовым, ни к конформным, ни к сугубо проективным преобразованиям билиардное

движение не относится. Однако перенос инволюции после каждого из отражений можно связать с заменами систем координат (см. п. 2.3). Характер этих преобразований еще раз подтвердит геометрическую ковариантность билиарда. При этом фактически речь пойдет уже не о свободе в выборе системы координат, а о независимости динамики от выбора начальных точек для фазовых траекторий билиарда. В гамильтоновом подходе этот факт согласуется с единственностью решения уравнений для геодезических.

Предварительно удобно рассмотреть полярную параметризацию и замены инволюции при переходе от одной полярной системы координат $L = \{O; (r, \varphi)\}$ к другой $L' = \{O'; (r', \varphi')\}$. При этом не исключается случай, когда одно или оба начала O и O' лежат на границе $\partial\Omega$.

2.2. Полярные координаты. “Геометризация” инволюции. Полярные координаты (r, ϕ) на евклидовой плоскости E^2 и связанная с ними угловая параметризация $r|_{\partial\Omega} = r(\phi)$ границы $\partial\Omega$ удобны во многих отношениях. Формальное усложнение возникает только при их использовании в случае выпукло-вогнутых границ, угловая параметризация которых требует введения нескольких карт, по одной на каждую из компонент с одним и тем же типом выпуклости. С полярными координатами связан выбор одной специальной (“нормальной”) системы отсчета $N = \{O_N; (r, \phi)\}$, начало которой находится на линии (продолжении) нормали $\vec{n}$ к $\partial\Omega$ в некоторой точке отражения билиарда. По построению это мгновенная система отсчета, так как ее начало O_N переносится всякий раз после очередного отражения билиардного луча.

Фиксируем начало O_N системы N и выберем направление ее полярной оси так, чтобы оно совпадало с направлением нормали $\vec{n}$ в точке отражения, т.е. $r_2 = r_0$, $\phi_2 = \phi_0 \equiv 0$, $\phi_1 \equiv \phi$, $f(\phi_1, \phi_2) \equiv f(\phi)$. В системе N выполняется соотношение

$$\frac{r_0 - r(f(\phi)) \cos f(\phi)}{r(f(\phi)) \sin f(\phi)} = - \frac{r_0 - r(\phi) \cos \phi}{r(\phi) \sin \phi}. \quad (4)$$

К этому уравнению для инволюции f можно прийти геометрически или (при заданной специализации системы отсчета) непосредственно из общего выражения (формула (5) из работы [1]).

Укажем два предельных случая: нормальное падение ($\phi \rightarrow 0$ или $\theta = \pi/2$, θ – угол отражения) и переход ($r_0 \rightarrow 0$) в “собственную” систему отсчета S , в которой начало координат O_S совпадает с точкой отражения $\vec{r}(\phi_0)|_{\partial\Omega}$. В обоих случаях можно непосредственно проверить, что инволюция f становится универсальной,

$$f^{(S)}(\phi, \phi_0) = 2\phi_0 - \phi, \quad (5)$$

где выбор ϕ_0 зависит лишь от направления полярной оси системы N , но не от формы $\partial\Omega$. Система S неоднократно встретится в дальнейшем. Для нее, как и прежде, будем считать $\phi_0 \equiv 0$, т.е. $S = \{O_S \in \partial\Omega; \{\vec{e}_1 \equiv \vec{n}|_{\partial\Omega}, \vec{e}_2 \equiv \vec{\tau}|_{\partial\Omega}\}\}$.

Явные формулы, определяющие изменение инволюции при переходе из произвольной системы L в другую L' , получим на примере полярных координат. Используем декартовы координаты $\{x = r \cos \phi, y = r \sin \phi; x_O = y_O = 0\}$ и $\{x' = r' \cos \phi', y =$

$r \sin \phi$; $x_{O'} = \rho \cos \chi$, $y_{O'} = \rho \sin \chi$ (здесь в качестве неподвижной выбрана система L ; координаты ρ и χ определяют положение начала отсчета O' системы L'). Из условия $\vec{r}(L) = \vec{r}'(L') + \vec{r}_{O'}$ находим

$$\begin{cases} r' = q_r(r, \phi) = \sqrt{r^2 - 2\rho r \cos(\phi - \chi) + \rho^2}, \\ r = q_{r'}^{-1}(r', \phi') = \sqrt{r'^2 - 2\rho r' \cos(\phi' - \chi - \xi) + \rho^2}, \\ \phi' = q_\phi(r, \phi) = \arctg \frac{r \sin \phi - \rho \sin \chi}{r \cos \phi - \rho \cos \chi}, \\ \phi = q_{\phi'}^{-1}(r', \phi') = \arctg \frac{r' \sin(\phi' - \xi) + \rho \sin \chi}{r' \cos(\phi' - \xi) + \rho \cos \chi}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\xi = \widehat{\vec{e}_1 \vec{e}'_1}$ – ориентированный угол поворота между ортогональными базисами в L' и L . Замена $L \rightarrow L'$ сопровождается репараметризацией $\partial\Omega$, $\vec{r}(\phi) \rightarrow \vec{r}'(\phi')$. Полагая в выражениях (6) $r = r(\phi)$ или $r' = r'(\phi')$ (уравнения $\partial\Omega$ в старых и новых координатах), приходим к искомым соотношениям $\phi' = q(\phi)$ и $\phi = q^{-1}(\phi')$. С их помощью инволюция $f'(\phi'_1, \phi'_2)$ в системе L' по формуле (2) выражается в новых координатах.

Подчеркнем, что система уравнений (2) и (6) позволяет вычислить инволюцию и в произвольной системе отсчета, если эти выражения дополнить формулами перехода от полярных к соответствующим для выбираемой системы отсчета координатам.

Если известно уравнение $\partial\Omega$ лишь в одной из систем координат (по построению предполагается, что такой всегда будет система L), то для вычисления инволюции в другой системе необходимо обратить соотношение $\phi' = q(\phi)$. Алгебраическое (как правило, многозначное) решение этой задачи $q \rightarrow q^{-1}$ зависит от вида кривой $\partial\Omega$, т.е. от уравнения $r = r(\phi)$.

В качестве примера рассмотрим эллиптический бильярд. В системе L , начало которой совмещено с центром эллипса ($x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$), в угловой параметризации $\partial\Omega$ имеем

$$x(\varphi) = a \cos \varphi, \quad y(\varphi) = b \sin \varphi, \quad r(\varphi) = \sqrt{a^2 \cos^2 \varphi + b^2 \sin^2 \varphi}.$$

При переходе в полярную систему L' с центром в фокусе эллипса уравнение границы изменится и примет вид

$$r(\varphi') = \frac{p}{1 - e \cos \varphi'}, \quad p \equiv \frac{b^2}{a}, \quad e \equiv \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}.$$

В данном случае $\chi = \xi = 0$ и $\rho = c \equiv \sqrt{a^2 - b^2}$ ($a > b$), отсюда, в соответствии с выражением (6) получим

$$\begin{aligned} q(\varphi) &= \arctg \frac{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi} - c(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)}, \\ q^{-1}(\varphi') &= \arccos \frac{a^3 c \operatorname{tg}^2 \varphi' + b^3 \sqrt{a^2 + b^2 \operatorname{tg}^2 \varphi'}}{a^4 \operatorname{tg}^2 \varphi' + b^4}, \end{aligned} \quad (7)$$

где при обращении $q \rightarrow q^{-1}$ выбиралась одна из двух ветвей, обеспечивающая выполнение предельного перехода $a \rightarrow b \Rightarrow q = q^{-1} = \text{id}$. В новых координатах инволюция примет вид $f'(\varphi'_1, \varphi'_2) = q(f(q^{-1}(\varphi'_1), q^{-1}(\varphi'_2)))$, где $f(\varphi_1, \varphi_2)$ – вычисленная (формула (18) в [1]) эллиптическая инволюция в системе L .

В системе N с полярной осью вдоль направления $\vec{n}$ ($\chi = 0$, $\xi = \pi/2$) соотношение (6) сводится к виду $[r^{(S)} \sin \phi^{(S)}]^2 = [r^{(N)} \sin \phi^{(N)}]^2$. Последнее справедливо для произвольных точек границы $\partial\Omega$, в том числе и для точек, связанных инволюцией $f(\phi) = f^{(N)}(\varphi^{(N)} \equiv \phi, \varphi_0^{(N)} = 0)$ (в системе N) и $f^{(S)}(\varphi^{(S)} \equiv \psi, \varphi_0^{(S)} = 0) = -\psi$ (в системе S). Учитывая правильный знак при предельном переходе $r_0 \rightarrow 0$ в собственную систему S , получим

$$\frac{\sin f(\phi) r^{(N)}(f(\phi))}{\sin \phi r^{(N)}(\phi)} = -\frac{r^{(S)}(-\psi)}{r^{(S)}(\psi)}, \quad \psi = q(\phi), \quad (8)$$

где $r^{(N)}(\phi)$ и $r^{(S)}(\psi)$ – уравнения $\partial\Omega$ в системах N и S , соответственно. Соотношением (8) определяется частное преобразование инволюции – при переходе $N \xrightarrow{q} S$ между связанными (по построению) системами N и S . Координаты ϕ и ψ в системах N и S , входящие в (8), связаны, как и уравнения границы $\partial\Omega$, невырожденным преобразованием вида (6), которое мы опускаем.

Отметим геометрический характер выражения (8). С этим связана конструкция, которую можно рассматривать как “геометризацию” инволюции и самого билиарда (уместно напомнить, что инволюция, хотя и зависит однозначным образом от границы $\partial\Omega$, но все-таки является динамическим объектом, так как связывает между собой падающий и отраженный лучи именно при условии упругого отражения). А именно, с помощью выражения (8) можно локально (при фиксированной точке отражения) восстановить инволюцию билиарда, если известно уравнение его границы в двух системах отсчета, связанных с точкой отражения, нормальной $(N, r^{(N)}(\phi))$ и собственной $(S, r^{(S)}(\psi))$. Тем самым решается прямая задача для инволюции, причем инволюция становится сугубо геометрической, ибо для каждого билиарда она связана исключительно с уравнением его границы.

Выражение (8) можно также рассматривать и как функциональное уравнение для сечения $f_{\phi_0}(\phi)$. Это уравнение имеет самостоятельное значение, так как оно не может быть непосредственно получено из упомянутого при выводе (4) общего выражения для инволюции билиарда. Кроме того, соотношение (8) наглядно демонстрирует инвариантность инволюции билиарда относительно масштабных преобразований (гомотетий) вида $\vec{r} \rightarrow \Lambda \vec{r}$ ($\Lambda = \text{const}$).

2.3. Преобразование инволюции при отражениях. Рассмотрим собственную систему S , сопутствующую точке отражения на границе билиарда. В ней инволюция становится универсальной (см. уравнение (5)). Рассмотрим наряду с двумя собственными системами $S = S(2)$ и $S' = S(2')$, относящимися к двум произвольным точкам $\vec{r}(\varphi_2)$ и $\vec{r}(\varphi'_2)$, лабораторную систему L (координата φ связана именно с ней). Тогда указанная универсальность $f^{(S)} \equiv f^{(S')}$ позволяет описать переход $L(2) \xrightarrow{\Xi} L(2')$ в се-

мействе заданных в L инволюций f_{φ_2} . Соответствующее этому ковариантное преобразование от $f_{\varphi_{2'}}(\varphi_1)$ к $f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ описывается коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} L(2) & \xleftarrow{\Xi^{-1}} & L(2') \\ q \downarrow & & \uparrow q'^{-1} \\ S(2) & \longrightarrow & S(2') \end{array} \quad (9)$$

где φ_1 фиксировано и $\phi_2 = \phi_{2'} \equiv 0$, а переходы $L \xrightarrow{q} S$ и $S \xrightarrow{q'^{-1}} L$ считаются известными. Для последнего необходимо задать уравнение $\vec{r}|_{\partial\Omega} = \vec{r}(\varphi)$ в неподвижной системе L . В аналитическом виде преобразование (9) представляется заменой $f(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow f(\varphi_1, \varphi_{2'})$, где

$$f(\varphi_1, \varphi_{2'}) = q'^{-1}(f^S(\phi_1, \phi_2)) = q'^{-1}(-q(f(q^{-1}(\varphi_1), q^{-1}(\varphi_2)))) \quad (10)$$

и $\varphi_{2'} = \Xi(\varphi_2)$ соответствует некоторой точке $\vec{r}_{2'} \in \partial\Omega$.

Выражение (10) определяет преобразование инволюций в результате отражений лучей бильярда, так как в частном случае точки 2 и 2' можно считать точками двух последовательных отражений произвольного луча от границы $\partial\Omega$. Пусть в качестве “начального условия” задано сечение ($\varphi_2 = \varphi_{20} = \text{const}$) инволюции $f_{\varphi_{20}}$ в некоторой системе отсчета L с выделенной точкой $\vec{r}(\varphi_{20}) \in \partial\Omega$. Тогда полная инволюция $f(\varphi_1, \varphi_2)$ может быть восстановлена геометрическим образом с помощью выражения (10), если граница бильярда задана в той же самой системе отсчета.

Таким образом, уравнения (6) и (10) дают независимый способ решения прямой задачи для инволюции бильярда с заданной границей $\partial\Omega$. Преобразования инволюции при отражениях относятся к заменам переменных и также укладываются в рамки геометрического принципа ковариантности бильярда. Важно отметить, что эти преобразования, как и замены систем координат (2), охватывают обе фазовые переменные, которые должны изменяться одинаковым образом, $\varphi_{1,2} \rightarrow q^{-1}(\varphi_{1,2})$ (появление обратного преобразования q^{-1} соответствует переносу форм (или функций) при отображении). В противном случае нарушилась бы инвариантность бильярдного отображения. Указанные преобразования входят в класс допустимых замен. В целом “факторизация” допустимых замен, когда независимые переменные $\varphi_{1,2} \in S^1 \sim \partial\Omega$ не должны перепутываться, является прямым следствием симметричности фазового пространства $T^2 = S^1 \otimes S^1$ и равноправия его переменных.

3. СИММЕТРИЯ ИНВОЛЮЦИЙ БИЛЛИАРДА

3.1. Геометрические симметрии. К заменам координат относятся точечные симметрии σ фигуры $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, сохраняющие форму ее границы, $\sigma(\partial\Omega) = \partial\Omega$. Геометрическая симметрия соответствует преобразованию Σ в фазовом пространстве T^2 ,

$$\Sigma(\varphi_1, \varphi_2) = (\sigma\varphi_1, \sigma\varphi_2).$$

Преобразование Σ коммутирует с билиардным каскадом, $\Sigma \circ B = B \circ \Sigma$, так как

$$\begin{aligned} (\Sigma \circ B)(\varphi_1, \varphi_2) &= (\sigma \varphi_2, (\sigma \circ f)(\varphi_1, \varphi_2)) = (\sigma \varphi_2, f(\sigma \varphi_1, \sigma \varphi_2)) = \\ &= B(\sigma \varphi_1, \sigma \varphi_2) = (B \circ \Sigma)(\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

вследствие инвариантности инволюции билиарда относительно соответствующего преобразования симметрии. Строго говоря, если считать σ преобразованием координат q , то из выражения (2) следует

$$\tilde{f}_{\tilde{\varphi}_2} = (\sigma \circ f)_{\sigma \varphi_2} = \sigma \circ f_{\varphi_2} \circ \sigma^{-1}.$$

Однако выполняется условие

$$f(\sigma \varphi_1, \sigma \varphi_2) = \sigma(f(\varphi_1, \varphi_2)) \iff \sigma(\partial\Omega) = \partial\Omega. \quad (11)$$

Оно отражает тот факт, что при симметрии $\partial\Omega \xrightarrow{\sigma} \partial\Omega$ ни форма, ни расположение, ни параметризация границы в действительности не изменяются, а следовательно, неизменной должна остаться и функциональная зависимость инволюции билиарда.

Симметрия $\partial\Omega$ приводит к тому, что в симметричном фазовом пространстве билиарда появляются инвариантные относительно преобразования Σ кривые

$$J_\sigma = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2 \mid \{\sigma \varphi_1 = \varphi_2\} \cup \{\sigma \varphi_2 = \varphi_1\}\}, \quad \Sigma(J_\sigma) = J_\sigma.$$

Кривая J_σ замкнута на торе T^2 и пересекается (ортогонально) с диагональю ($\varphi_1 = \varphi_2$) в одной или нескольких точках (в зависимости от порядка симметрии). Линия J_σ является линией симметрии фазового портрета билиардного отображения. При проецировании с фазового пространства на геометрическое $T^2 \xrightarrow{\pi} \Omega$ этой линии соответствует пучок билиардных траекторий, начальные отрезки лучей которых симметричны относительно оси симметрии исходного преобразования σ . При их билиардном распространении внутри области Ω эта симметрия сохраняется как для отдельно взятых лучей (между отражениями), так и для траекторий в целом.

Итак, конгруэнции $\partial\Omega$ переносятся на инволюцию f и фазовый портрет билиарда. Например, билиард с линией симметрии не ниже второго порядка (к таким относятся все алгебраические кривые четного порядка, в том числе эллипс, овалы – обычный и Кассини и др.) обладает фазовым портретом, симметричным относительно побочной диагонали фазового пространства,

$$\Delta_2 = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2; |\varphi_1 - \varphi_2| = 2\pi\}$$

(уравнения записаны для канонической развертки тора – квадрата со стороной 2π).

Симметрии $\partial\Omega$ второго порядка соответствует преобразование

$$\sigma \equiv \sigma_2(\varphi) = 2\pi - \varphi, \quad \sigma_2^2 = \text{id}$$

и одна инвариантная кривая

$$J_{\sigma_2} = \sigma_2 \varphi_1 + \varphi_2 = \sigma_2 \varphi_2 + \varphi_1 \equiv \Delta_2.$$

Если $\partial\Omega$ имеет ось симметрии p -го порядка ($\sigma_p \varphi = 2\pi/p - \varphi$, $\sigma_p^p = \text{id}$), то фазовое пространство и инволюция билиарда обладают сетью линий симметрии $\{J_{\sigma_p}\}_{n=1}^{p-1}$ с уравнениями $|\varphi_1 - \varphi_2| = 2\pi n/p$ ($n = 1, 2, \dots, p-1$).

3.2. Динамическая симметрия. Диагональное условие для инволюции.

Произвольный билиард обладает важной динамической симметрией, которая прямо связана с его обратимостью. При изучении этой симметрии снова будут использованы некоторые понятия качественной теории динамических систем.

Рассмотрим диагональ $\Delta = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2 \mid \varphi_1 = \varphi_2\}$ фазового пространства T^2 , которую будем так же называть диагональю отображения или просто диагональю. Последующие рассуждения справедливы и для многомерных билиардов, в которых тор T^2 заменяется на многообразие $M^{2N} = S^N \otimes S^N$, где $\partial\Omega \sim S^N \ni \varphi$.

Введем преобразование $\Sigma_\Delta := \{\varphi_1 \rightarrow \varphi_2; \varphi_2 \rightarrow \varphi_1\}$ симметрии относительно диагонали Δ . Оно переводит произвольную фазовую траекторию, начальный луч которой определяется парой последовательных точек отражения $\vec{r}(\varphi_{10})$ и $\vec{r}(\varphi_{20})$ (в фазовом пространстве лучу соответствует точка с координатами $(\varphi_{10}, \varphi_{20})$), в траекторию с противоположным направлением движения и переставленными координатами для начального луча, т.е. $(\varphi_{10}, \varphi_{20}) \rightarrow (\varphi_{20}, \varphi_{10})$. С физической (и геометрической) точки зрения это одна и та же траектория, но проходимая в разных направлениях. Вместе с тем по построению к фазовому пространству всевозможных состояний билиарда относятся обе симметричные относительно Δ точки: (φ_1, φ_2) и (φ_2, φ_1) . Так как эти точки были взяты произвольно, то такой же симметрией обладает и билиард в целом,

$$\Sigma_\Delta \circ B = B \circ \Sigma_\Delta, \quad \Sigma_\Delta(\varphi_1, \varphi_2) = (\varphi_2, \varphi_1). \quad (12)$$

Очевидно, что эта симметрия является прямым следствием обратимости билиарда как динамической системы. Ее последствия многочисленны и будут использоваться в дальнейшем. В частности, инвариантная мера в симметричном фазовом пространстве билиарда (как измеримого отображения в рамках эргодической теории) будет функцией, симметричной относительно Δ . Здесь по-прежнему речь идет об отображениях B вида (3).

Условие (12) не означает выполнения равенства $f(\varphi_1, \varphi_2) = f(\varphi_2, \varphi_1)$, но симметрия относительно диагонали Δ проявляется в особом “диагональном” свойстве

$$f(\varphi, \varphi) = \varphi \Theta[\widehat{K}(\varphi)], \quad (13)$$

где $\widehat{K}(\varphi)$ – ориентированная кривизна в точке $\partial\Omega$ с координатой φ ; Θ – единичная функция Хевисайда. С учетом ковариантности билиарда условие (13) выполняется в любом координатном представлении.

В принципе условие (13) является чисто геометрическим. При касательном распространении билиардного луча вдоль выпуклого участка границы (в используемых обозначениях $\widehat{K}(\varphi) > 0$) предельные направления падающего $\text{in} = (\varphi_1, \varphi_2)$ и отраженного $\text{out} = (\varphi_2, \varphi_3 = f(\varphi_1, \varphi_2))$ лучей при $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \equiv \varphi$ совпадают, откуда и следует условие (13). На вогнутом участке отрицательной кривизны асимптотически предельной касательной траектории не существует, так как ее лучи попадают в область геометрической тени. Соответствующие им фазовые точки принадлежат лагунам фазового пространства (множеству запрещенных начальных значений): $L = \{(\varphi_1, \varphi_2) \in T^2 \mid (\vec{r}(\varphi_2) -$

$\vec{r}(\varphi_1)) \overline{\in} \Omega\}$. Инволюция $f(\varphi \pm \varepsilon, \varphi)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) при $\widehat{K}(\varphi) < 0$, строго говоря, не определена. Ее удобно доопределить одним из двух способов:

$$f(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}_1}{=} \varphi_2 \chi_L[(\varphi_1, \varphi_2)], \quad f(\varphi_1, \varphi_2) \stackrel{\text{def}_2}{=} \varphi_1 \chi_L[(\varphi_1, \varphi_2)], \quad (14)$$

где χ_M — характеристическая функция множества M , так что в лакунах динамика становится тривиальной, т.е. $B(L) = L$. Лакуны либо проецируются на диагональ (первый способ), либо целиком заполнены неподвижными точками (второго порядка). Тогда с учетом соотношения (14) диагональное условие $f(\varphi, \varphi) = \varphi$ можно считать выполненным во всем симметричном фазовом пространстве.

Для произвольного семейства инволюций $f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ можно ввести функцию $f(\varphi, \varphi) \equiv d(\varphi)$. Эта “диагональная” функция будет кусочно-монотонной в тех же промежутках монотонности, что и исходная функция f (о монотонности инволюции см. раздел 5). На всей диагонали Δ функция d является непрерывной (что соответствует односвязности тора) и периодической, $d(\varphi) = d(\varphi + 2\pi)$.

Специализация $f(\varphi, \varphi) = \varphi$ сильно выделяет билиарды среди других обратимых систем. Это вырождение, в частности, приводит к тому, что диагональ Δ не только является (инвариантной) линией симметрии, но и целиком состоит из неподвижных точек $\text{Fix}(B)$ билиардного отображения B ,

$$f(\varphi, \varphi) = \varphi \iff B(\Delta) = \Delta = \text{Fix}(B) = (\varphi, \varphi), \quad (15)$$

прерываемых лакунами L фазового пространства. Совместность геометрической и динамической симметрии требует, чтобы простые (отсутствуют склейки и самопересечения) линии симметрии фазового портрета были бы ортогональны диагонали Δ . Подобная трансверсальность приводит к тому, что “размножение” линий симметрии и образование симметричной “паутины”, как это зачастую имеет место в обратимых системах, для билиардов затруднено. На фазовом портрете, изображенном на торе, будет ровно столько линий симметрии, не считая диагонали, сколько существует геометрических преобразований, сохраняющих форму $\partial\Omega$. При этом имеется в виду полное число всех точечных преобразований группы симметрии фигуры Ω .

Диагональное свойство инволюции и инвариантность диагонали билиарда эквивалентны друг другу и означают, что форма границы $\partial\Omega$ сохраняется (при естественном проецировании фазового пространства на область билиардного движения $T^2 \xrightarrow{\pi} \Omega$ диагональ “проецируется” в границу билиарда: $\Delta \xrightarrow{\pi} \partial\Omega$). Отметим, что в популярных “дышащих” билиардах с осциллирующей формой границы (см., например, [5]) какие-то из указанных геометро-динамических свойств симметрии могут нарушаться, хотя диагональное условие и часть симметрий могут сохраняться в среднем (при усреднении по осцилляциям границы). Наконец, сравнивая различные подходы к теории билиардов, укажем, что введенная здесь диагональ по своей геометрической природе аналогична особому многообразию в касательном расслоении к билиардному потоку — краю гладкой поверхности, на которой последний высекает соответствующее (консервативное) отображение. Вблизи диагонали (или этого края) фазовому движению для выпуклого билиарда отвечает распространение траекторий типа “шепчущих галерей”, структура и накопление каустик которых установлены Лазуткиным [6].

4. МОНОТОННОСТЬ И ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ

Геометро-динамический портрет инволюции бильярда будет неполным, если не остановиться на ее функциональных свойствах. В качестве одномерной инволюции сечение $f_{\varphi_2}(\varphi_1)$ ($\varphi_2 = \text{const}$) обладает свойствами кусочной монотонности, непрерывности и непрерывной дифференцируемости. Очевидное доказательство этих фактов использует основное свойство $f \circ f = \text{id}$ инволюции и свойства монотонных функций. Непрерывность и сохранение упорядоченности (монотонность) характерны для проективных преобразований, к которым (локально) относится бильярд. Особую важность играет строго убывающая монотонность бильярдной инволюции f . Дифференцируемая структура инволюции f в целом определяется характером гладкости и типом выпуклости его границы.

Существуют два типа особенностей f для бильярда: разрывы монотонной инволюции, конечные из-за компактности фазового пространства T^2 , и устранимая особенность на диагонали $\Delta \subset T^2$. С геометрической точки зрения оба типа связаны с касанием бильярдных лучей границы $\partial\Omega$ в точке отражения $\vec{r}(\varphi_2)$. Точки фазового пространства, удовлетворяющие этому условию, $([\vec{r}(\varphi_2) - \vec{r}(\varphi_1)], \vec{n}(\varphi_2)) = 0$ (здесь $(\cdot, \cdot)$ обозначает скалярное произведение), образуют множество Γ особых точек инволюции бильярда. На фазовом портрете отображения B оно состоит из диагонали Δ и границ лаун ∂L , т.е. $\Gamma = \Delta \cup \partial L$. Если надстроить над бильярдным отображением соответствующий поток (в касательном расслоении к области Ω), то эти особенности означают нетрансверсальный характер его векторного поля над оснащением Γ в касательном расслоении. Учитывая, что Γ имеет коразмерность 1 в фазовом пространстве, можно переформулировать и получить утверждения (впервые установленные Синаем [7]) о непринципиальном характере (нулевой мере) траекторий, отвечающих особенностям. Вместе с тем само их появление приводит к изменению топологии фазового пространства и, как следствие, типа динамического поведения. Сказанное относится к лагунам фазового пространства, так как особенность на диагонали устранима. Исследование структуры особенностей, “размножающихся” при итерациях $\Gamma \rightarrow B^k(\Gamma)$ ($k \rightarrow \infty$) отображения B в симметричном фазовом пространстве, представляет отдельную задачу.

С выходом на диагональ, $\varphi_1 = \varphi_2$, $\vec{r}(\varphi_1) = \vec{r}(\varphi_2)$, связана сингулярность (проективного) выражения R для инволюции f . Согласно уравнению (1) $R \in C^\infty \setminus \{k = \alpha/\beta\}$. Особенности соответствует уравнение

$$x(\varphi_1) - k(\varphi_2)y(\varphi_1) = x(\varphi_2) - k(\varphi_2)y(\varphi_2).$$

Ввиду произвольности φ_1 и φ_2 оно выполнимо лишь при условии $\varphi_1 = \varphi_2$. Устранимый характер особенности связан с диагональным свойством $f(\varphi, \varphi) = \varphi$, согласно которому не возникает неопределенности в выражении для бильярдной инволюции. Физический смысл перехода через диагональ состоит в замене направления движения на противоположное. Очевидно, что как аналог замены ориентации такой переход не может быть совершен непрерывным образом. На торе обе компоненты бильярдного каскада с противоположным направлением движения (их инволюции отличаются на 2π) “склеены” вдоль диагонали Δ .

С лакунами все обстоит иначе. Они возникают только в билиярдах, кривизна которых отрицательна, т.е. при появлении вогнутых компонент границы (при выбранном здесь определении знака кривизны). На границах лакун ∂L инволюция f терпит скачки, отличные от 2π и поэтому не исчезающие при переходе на тор. Разрывность f сопровождается многосвязностью фазового пространства, из которого “выпадают” лакуны.

В области $T^2 \setminus \Gamma$ инволюция f относится к функциям C^r класса кусочной гладкости, если граница $\partial\Omega$ является C^{r+1} кусочно-гладкой кривой. Это утверждение прямо следует из теоремы о неявной функции, примененной к одному из полученных ранее уравнений для инволюции – (1), (6) или (10). Особый интерес с точки зрения дифференцируемой структуры представляют C^1 -инволюции, которые соответствуют границе с непрерывной кривизной (класса не ниже C^2). Именно такими билиярдами и ограничимся в дальнейшем. После некоторых уточнений многие результаты можно распространить на класс C^1 -кривых. Во всяком случае, предпочтительно исследование билиярдов, граница которых состоит из компонент с гладкостью не ниже C^3 , т.е. с непрерывно дифференцируемой кривизной. Анализ билиярдов, включающих прямолинейные образующие, в том числе многоугольников, требует своих методов (особенно в части аналитического определения инволюций), хотя и не выпадает из рамок общего геометро-динамического описания. В частности, все полученные ранее утверждения (раздел 2) справедливы и для них.

Рассмотрим гладкий билиард и перейдем к проективному представлению, т.е. к уравнениям (1) с новыми переменными $u \equiv z_{\varphi_2}(\varphi_1)$ и $v \equiv \varphi_2$, где $\varphi_{1,2} \equiv l_{1,2}$ выбраны в натуральной параметризации $\partial\Omega$. Как геометрическая данная замена имеет нелокальный характер – в ней участвуют две точки отражения с координатами φ_1 и φ_2 . Вместе с тем на фазовом пространстве локальность восстанавливается: $T^2 \ni \tau = (\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow t = (u, v) \in T^2$. Явный вид этой замены и обратной к ней фактически не требуются, тогда как инволюция в новых переменных упрощается,

$$f(u, v) = -\frac{\alpha(v)u + \beta(v)}{\beta(v)u - \alpha(v)},$$

где $\alpha(v) = n_x^2(v) - n_y^2(v)$ и $\beta(v) = 2n_x(v)n_y(v)$ выражены в натуральном представлении, $u = u(l_1, l_2)$ и $v \equiv l_2$. В силу ковариантности дифференциальные свойства инволюции, вычисленные в таком представлении, сохраняются и в любом другом. Например, из (1) и (2) следует, что $\deg f_{\varphi_2} = \deg \tilde{f}_{\tilde{\varphi}_2} = \deg R_{\varphi_2} = -1$ ($\deg$ – степень отображения).

Производные инволюции $f(u, v)$ примут вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} &= -\frac{\alpha^2 + \beta^2}{(\beta u - \alpha)^2} < 0, \\ \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} &= -\frac{(1 + u^2)W(\alpha, \beta)}{(\beta u - \alpha)^2}, \\ \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial u \partial v} &\equiv \frac{\partial^2 f(u, v)}{\partial v \partial u} = -\frac{2(\alpha u + \beta)W(\alpha, \beta)}{(\beta u - \alpha)^3}, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$W(\alpha, \beta) = \frac{\partial \alpha}{\partial v} \beta - \alpha \frac{\partial \beta}{\partial v}.$$

Вне диагонали Δ выполняется условие $\beta u - \alpha \neq 0$ и сингулярности в (16) отсутствуют. На диагонали $u \equiv v$ и

$$\left. \frac{\partial f(u, v)}{\partial u} \right|_{\Delta} = -1, \quad \left. \frac{\partial f(u, v)}{\partial v} \right|_{\Delta} = 2.$$

Используя определения α и β , вронскиан W представим в виде

$$W(\alpha, \beta) \equiv W(l) = \frac{\partial n_x(l)}{\partial l} n_y(l) - n_x(l) \frac{\partial n_y(l)}{\partial l}.$$

С помощью формул Френе он легко вычисляется через ориентированную кривизну $\hat{K}$ границы $\partial\Omega$,

$$W(l) = \hat{K}(l)[\vec{\tau}, \vec{n}]_z = -\hat{K}(l)(\vec{b})_z \equiv -\hat{K}(l),$$

где z — направление, ортогональное плоскости бильярда, $(\vec{n}, \vec{\tau}, \vec{b})$ — левый пространственный репер в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, за исключением особых точек границы, в которых $\hat{K} = 0$, имеем (с учетом ковариантности) в произвольном представлении

$$\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_1} < 0, \quad \text{sign} \left[\frac{\partial f(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial \varphi_2} \right] = \text{sign} [\hat{K}(\varphi_2)], \quad f''_{\varphi_1 \varphi_2} = f''_{\varphi_2 \varphi_1}. \quad (17)$$

Первые два свойства (17) определяют характер монотонности бильярдной инволюции (существует и их прямое геометрическое доказательство). Последнее свойство означает непрерывную дифференцируемость инволюции бильярда для границы с непрерывным распределением кривизны. Поведение старших производных инволюции будет выродившимся в бильярдах с прямыми участками (неизолированная особенность $\hat{K} = 0$).

Зависимость инволюции f от φ_1 является строго убывающей функцией для любого бильярда. Другого не могло бы и быть, так как у возрастающей инволюции отсутствуют неподвижные точки. Для доказательства этого утверждения удобно опять-таки перейти к проективному представлению в виде дробно-рациональной функции, $f = z^{-1} \circ R \circ z$. В то же время у бильярда достаточно много периодических траекторий. Согласно теореме Биркгофа, для выпуклого бильярда период может быть любым. По второму аргументу тип монотонности определяется знаком кривизны. На выпуклых участках ($\hat{K}(\varphi_2) > 0$) функция $f(\varphi_1, \varphi_2)$ (при $\varphi_1 = \text{const}$) возрастает, а на вогнутых ($\hat{K}(\varphi_2) < 0$), наоборот, убывает. Физический смысл такого поведения связан с фокусирующим и рассеивающим характером отражения лучей от участков границы соответствующего типа выпуклости. Для прямолинейного участка рассеяние будет нейтральным и $f'_{\varphi_2} = 0 \Leftrightarrow \hat{K}(\varphi_2) = 0$ (параллельность близких лучей после отражения сохраняется).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко сформулируем результаты работы. Установлены геометрические особенности инволюций для произвольных бильярдов. Представлена ковариантность инволюции, обуславливающая инвариантность динамики бильярдов с одной и той же формой границы. С учетом принципа ковариантности можно сформулировать и доказать (в удобных переменных) ряд утверждений относительно свойств бильярдных инволюций. Эти свойства не зависят от выбора конкретного координатного представления. В рамках “геометризации” теории получены уравнения для инволюции (8) (в собственной системе отсчета) и (10) (восстановление при отражениях).

Изученные функциональные и дифференциальные особенности инволюции и ее симметрии необходимы при качественном, а в некоторых вопросах и количественном анализе фазовой динамики бильярдов и близких к ним динамических систем. Принципиальное значение отводится диагональному условию для инволюции, выражающему, помимо инволютивности как таковой, свойство обратимости в симметричном фазовом пространстве бильярда. Дифференцируемая структура (в том числе монотонность и особенности) инволюции во многом определяется проективным характером бильярда и типом его границы. Особую роль при этом играет распределение и знак ее кривизны. Для многомерных бильярдов, по-видимому, аналогичную роль будет играть форма кривизны (вторая квадратичная форма поверхности).

Список литературы

- [1] С. В. Найдёнов, В. В. Яновский. Геометро-динамический подход к бильярдным системам. I. Проективная инволюция бильярда. Прямая и обратная задача ТМФ. 2001. Т. 127. № 1. С. 110.
- [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
- [3] Н. В. Ефимов. Высшая геометрия. М.: Физматгиз, 1961.
- [4] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976.
- [5] А. Ю. Лоскутов, А. Б. Рябов, Л. Г. Акиншин. ЖЭТФ. 1999. Т. 116. № 5. С. 1781.
- [6] В. Ф. Лазуткин. Выпуклый бильярд и собственные функции оператора Лапласа. Л.: ЛГУ, 1981.
- [7] И. П. Корнфельд, Я. Г. Синай, С. И. Фомин. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию 14.III.2001 г.