Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. И. Денисов, И. П. Денисова, Эффект взаимодействия плоских электромагнитных волн в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 1, 131–139

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf525>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:31:34

© 2001 г.

В. И. Денисов*, И. П. Денисова†

ЭФФЕКТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ БОРНА–ИНФЕЛЬДА

Проведен расчет взаимодействия плоских электромагнитных волн по законам нелинейной электродинамики Борна–Инфельда на вакуумном участке кольцевого лазера. Показано, что при современном уровне развития лазерной физики имеется возможность не только измерить результат прямого воздействия квантового эффекта поляризации вакуума на частоты генерации слабых электромагнитных волн, распространяющихся в кольцевом лазере навстречу друг другу, но и оценить величину вклада нелинейной электродинамики Борна–Инфельда в рассматриваемый эффект.

1. ВВЕДЕНИЕ

Изучение различных суперсимметричных моделей показало [1], [2], что эффективный лагранжиан электромагнитного поля во многих случаях совпадает с лагранжианом нелинейной электродинамики Борна–Инфельда [3], [4]

$$L = -\frac{1}{4\pi a^2} \left[\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)} - a^4(\mathbf{B}\mathbf{E})^2 - 1 \right],$$

где a – некоторая неизвестная постоянная, для которой в работе [4] получена оценка $a \geq 10^{-16} \text{ Гс}^{-1}$.

Уравнения электромагнитного поля, получаемые из этого лагранжиана, имеют вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{D} &= 0, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= 4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{E}} = \frac{\mathbf{E} + a^2(\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{B}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)} - a^4(\mathbf{B}\mathbf{E})^2}, \\ \mathbf{H} &= -4\pi \frac{\partial L}{\partial \mathbf{B}} = \frac{\mathbf{B} - a^2(\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{E}}{\sqrt{1 + a^2(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)} - a^4(\mathbf{B}\mathbf{E})^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: denisov@srd.sinp.msu.ru

†Российский государственный технологический университет, Москва, Россия

Электродинамика Борна–Инфельда обладает рядом свойств, которые выделяют ее среди других моделей нелинейной электродинамики вакуума, поэтому она постоянно находилась в центре внимания различных авторов (см., например, [5]–[9]). Однако ее предсказания по широкому кругу вопросов достаточно долго были далеки от возможностей эксперимента.

Современный уровень развития лазерной физики [10], [11] позволяет начать постановку ряда оптических экспериментов, в которых можно проверить предсказываемые электродинамикой Борна–Инфельда закономерности нелинейного взаимодействия электромагнитных полей в вакууме.

Основная идея таких экспериментов состоит в следующем. Если в кольцевом лазере некоторую часть контура отделить от остальной части газонепроницаемыми прозрачными перегородками и создать на этой части в вакууме внешние электромагнитные поля, то частоты генерации электромагнитных волн, распространяющихся навстречу друг другу в этом лазере, будут разными.

Поэтому, измеряя разность частот генерации при различных типах внешних электромагнитных полей, можно детально проверить предсказываемые теорией Борна–Инфельда нелинейные свойства электродинамики вакуума. Как показано в работе [9], использование на вакуумном участке кольцевого лазера постоянных полей E_0 и B_0 , величина которых $E_0 \sim B_0 \sim 10^5$ Гс находится на пределе технических возможностей, позволяет измерить в таком эксперименте константу a , если ее величина превышает значение 10^{-16} Гс $^{-1}$.

Существенным недостатком подобного эксперимента является необходимость использовать чрезвычайно большое статическое электрическое поле. Поэтому возникает необходимость рассмотреть альтернативный вариант этого эксперимента, когда в качестве внешнего электромагнитного поля используется интенсивное лазерное излучение, у которого $E^2 = B^2$.

Целью данной статьи является расчет эффекта, предсказываемого нелинейной электродинамикой Борна–Инфельда в таком эксперименте.

2. УРАВНЕНИЕ ЭЙКОНАЛА ДЛЯ СЛАБОЙ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В ПОЛЕ ИНТЕНСИВНОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Из-за нелинейности уравнений (1), (2) принцип суперпозиции полей в электродинамике Борна–Инфельда нарушается. Поэтому распространение электромагнитных волн во внешних электромагнитных полях в вакууме в силу уравнений (1) происходит аналогично распространению волн в нелинейных анизотропных средах. Исходя из этой аналогии найдем закон распространения слабой электромагнитной волны частоты ω в поле интенсивного лазерного излучения частоты Ω . Векторы магнитного и электрического полей первой из этих волн обозначим через $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$, а второй – через $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$.

В нулевом приближении по векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ система нелинейных дифференциальных

уравнений (1) имеет решение в виде плоской эллиптически поляризованной волны

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 \cos(\Omega t - \mathbf{K}\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2 \sin(\Omega t - \mathbf{K}\mathbf{r}), \\ (\mathbf{E}_1 \mathbf{E}_2) &= 0, \quad \mathbf{B} = \frac{c}{\Omega} [\mathbf{K}\mathbf{E}], \quad \frac{\Omega^2}{c^2} = \mathbf{K}^2, \quad (\mathbf{K}\mathbf{E}_1) = (\mathbf{K}\mathbf{E}_2) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Инварианты этой волны равны нулю. Поэтому в первом приближении по $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ система уравнений (1), (2) принимает вид

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{e} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{b} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + a^2 \left\{ [\mathbf{B} \times \nabla((\mathbf{B}\mathbf{b}) - (\mathbf{E}\mathbf{e}))] + \frac{\mathbf{E}}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{B}\mathbf{b}) - (\mathbf{E}\mathbf{e})] + \right. \\ &\quad \left. + [\mathbf{E} \times \nabla((\mathbf{B}\mathbf{e}) + (\mathbf{b}\mathbf{E}))] - \frac{\mathbf{B}}{c} \frac{\partial}{\partial t} [(\mathbf{B}\mathbf{e}) + (\mathbf{b}\mathbf{E})] \right\} = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Представим векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_0 e^{iS}, \quad \mathbf{e} = \mathbf{e}_0 e^{iS}, \quad (5)$$

где $S = S(t, \mathbf{r})$ – эйконал. Векторы $\mathbf{b}_0$ и $\mathbf{e}_0$ будем считать слабо изменяющимися функциями t и $\mathbf{r}$ по сравнению с функцией $\exp[iS(t, \mathbf{r})]$.

Найдем уравнение, которому должен удовлетворять эйконал S для слабой электромагнитной волны в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда.

Подставляя выражения (5) в уравнения (4) и исключая вектор $\mathbf{b}$, получим однородную систему из трех линейных алгебраических уравнений $\Pi^{\alpha\beta} e_\beta = 0$ относительно трех компонент вектора $e_\beta = (\mathbf{e})_\beta$, где трехмерный тензор $\Pi^{\alpha\beta}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_{\alpha\beta} &= \left[(\nabla S)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - a^2 \left\{ \left[M_\alpha - \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} E_\alpha \right] \left[M_\beta - \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} E_\beta \right] + \right. \\ &\quad \left. + \left[N_\alpha + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} B_\alpha \right] \left[N_\beta + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} B_\beta \right] \right\} \end{aligned} \quad (6)$$

и введены обозначения $\mathbf{N} = [\nabla S \mathbf{E}]$, $\mathbf{M} = [\nabla S \mathbf{B}]$.

Условие существования нетривиальных решений этой системы уравнений, $\det \|\Pi^{\alpha\beta}\| = 0$, как известно, дает уравнение эйконала. Чтобы представить это уравнение в явно тензорной форме, используем формулы тензорного анализа [12], [13]. Следуя этим работам, определим S -ю степень $\Phi_{\alpha\beta}^{(S)}(x)$ произвольного тензора второго ранга $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ в трехмерном евклидовом пространстве соотношениями

$$\Phi_{\alpha\beta}^{(0)} = \delta_{\alpha\beta} \quad \text{для } S = 0, \quad \Phi_{\alpha\beta}^{(S)} = \Phi_{\alpha\mu} \delta^{\mu\nu} \Phi_{\nu\beta}^{(S-1)} \quad \text{для } S \geq 1,$$

где символ Кронекера $\delta_{\alpha\beta}$ является метрическим тензором в декартовых координатах инерциальной системы отсчета.

Свертка индексов в этих выражениях дает инвариант S -й степени этого тензора $\Phi_{(S)} = \Phi_{\alpha\beta}^{(S)}(x)\delta^{\alpha\beta}$. Определитель тензора $\Phi_{\alpha\beta}(x)$ в трехмерном евклидовом пространстве выражается через инварианты $\Phi_{(1)}$, $\Phi_{(2)}$ и $\Phi_{(3)}$ следующим образом:

$$\det \|\Phi^{\alpha\beta}\| = \frac{1}{6}(2\Phi_{(3)} - 3\Phi_{(1)}\Phi_{(2)} + \Phi_{(1)}^3).$$

Поэтому условие $\det \|\Pi^{\alpha\beta}\| = 0$ можно записать в виде

$$2\Pi_{(3)} - 3\Pi_{(1)}\Pi_{(2)} + \Pi_{(1)}^3 = 0.$$

Подставляя в это соотношение выражение (6) и сокращая полученное равенство на $(\partial S/\partial t)^2$, приходим к уравнению, которому должен удовлетворять эйконал $S(t, \mathbf{r})$ в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда,

$$\left\{ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 + a^2 \mathbf{E}^2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K} \nabla S)}{K} \right]^2 \right\}^2 = 0. \quad (7)$$

Решение этого уравнения в общем случае не единственно и зависит от того, в виде какой волны оно ищется: плоской, цилиндрической, сферической или имеющей более сложную форму поверхности постоянной фазы. Воспользуемся тем обстоятельством, что при “выключении” нелинейного взаимодействия ($a^2 \rightarrow 0$) слабая электромагнитная волна в рассматриваемом случае должна переходить в плоскую волну. При этом условии решение уравнения (7) принимает вид

$$S = -\omega t + (\mathbf{k}\mathbf{r}) + \frac{a^2}{8K} \left[\frac{\omega}{c} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{K})}{K} \right] (\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2) \sin 2(\Omega t - \mathbf{K}\mathbf{r}), \quad (8)$$

где “волновой” вектор $\mathbf{k}$ слабой электромагнитной волны и “частота” ω связаны соотношением

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 + \frac{a^2}{2} \left[\frac{\omega}{c} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{K})}{K} \right]^2 (\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2) = 0. \quad (9)$$

Если векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$ коллинеарны и имеют одинаковое направление, то из уравнения (9) следует, что $k = \omega/c$. В этом случае фаза слабой электромагнитной волны принимает вид $S = -\omega t + \mathbf{k}\mathbf{r}$. Это означает, что в нелинейной электродинамике Борна–Инфельда любые две плоские электромагнитные волны, распространяющиеся в одном и том же направлении, не взаимодействуют.

При распространении интенсивной электромагнитной волны навстречу слабой волне из выражений (8) и (9) следует, что

$$\begin{aligned} \omega &= ck \frac{2 - a^2(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)}{2 + a^2(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)}, \\ S &= -\omega t + (\mathbf{k}\mathbf{r}) + \frac{a^2(\mathbf{E}_1^2 - \mathbf{E}_2^2)k}{2[2 + a^2(\mathbf{E}_1^2 + \mathbf{E}_2^2)]K} \sin 2(\Omega t - \mathbf{K}\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (10)$$

В этом случае нелинейное воздействие интенсивного лазерного излучения на фазу слабой электромагнитной волны максимально.

3. РАСЧЕТ РАЗНОСТИ ЧАСТОТ ГЕНЕРАЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В КОЛЬЦЕВОМ ЛАЗЕРЕ

Предположим, что в кольцевом лазере с периметром P вдоль его вакуумного участка распространяется интенсивное излучение импульсного лазера. Будем считать, что общая длина импульсов, находящихся на вакуумном участке кольцевого лазера, равна L . Найдем частоты генерации электромагнитных волн, распространяющихся в этом кольцевом лазере навстречу друг другу. Так как последнее слагаемое во втором из выражений (10) является быстро осциллирующим, то для простоты расчета будем полагать, что интенсивное лазерное излучение является циркулярно поляризованным: $\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2 = E_0^2$.

Как известно [10], в кольцевом лазере активной средой усиливаются только те электромагнитные волны, фаза которых после обхода по контуру изменяется на $\delta\Psi = 2\pi N$, где N – целое число. Поэтому частота ν_1 электромагнитной волны, распространяющейся навстречу мощному лазерному импульсу, может быть найдена из соотношения

$$\left(P - L + \frac{1 + a^2 E_0^2}{1 - a^2 E_0^2} L\right) \nu_1 = cN_1,$$

где N_1 – целое число, равное числу длин волн λ_1 , укладывающихся на оптической длине контура кольцевого лазера.

Так как электромагнитные волны, распространяющиеся в одном направлении, не взаимодействуют, то для встречной волны частота генерации ν_0 останется неизменной и равной cN_0/P .

Учитывая, что ожидаемая разность $\nu_0 - \nu_1$ в предлагаемом эксперименте очень мала, положим $N_0 = N_1$. Тогда разность частот генерации электромагнитных волн, распространяющихся в кольцевом лазере навстречу друг другу, в рассматриваемом эксперименте будет иметь вид

$$\Delta\nu = \nu_0 - \nu_1 \approx \frac{2a^2 E_0^2 cL}{\lambda P}. \quad (11)$$

Сделаем некоторые оценки. Современный кольцевой лазер [10], предназначенный для фундаментальных исследований, имеет почти квадратную форму с периметром $P = 348$ см и при длине волны $\lambda = 6.33 \cdot 10^{-5}$ см позволяет регистрировать разность частот $\Delta\nu = 1.4 \cdot 10^{-7}$ Гц.

Если в качестве вакуумного участка использовать одну из сторон этого лазера, то для того чтобы на этом участке постоянно находился хотя бы один импульс интенсивного лазерного излучения, необходим лазер с частотой повторения импульсов около $4 \cdot 10^9$ Гц. Такие частоты можно обеспечить, используя твердотельные лазеры на хром-форстерите. Если сфокусировать излучение такого лазера до поперечных размеров $\sim 5 \cdot 10^{-2}$ см, то при длине импульса $L \sim 5 \cdot 10^{-2}$ см величина E_0 в гауссовой системе единиц будет достигать значения $E_0 \sim 1.3 \cdot 10^7$ Гс.

Полагая, что $a = 10^{-16}$ Гс $^{-1}$, из выражения (11) получаем, что в предлагаемом нами эксперименте разность частот генерации электромагнитных волн, распространяющихся в кольцевом лазере навстречу друг другу, $\Delta\nu = 2.3 \cdot 10^{-7}$ Гц, что превышает минимально измеримую величину $\Delta\nu = 1.4 \cdot 10^{-7}$ Гц.

4. УЧЕТ КВАНТОВОГО ЭФФЕКТА ПОЛЯРИЗАЦИИ ВАКУУМА

Как известно [14], эффект поляризации вакуума, предсказываемый квантовой электродинамикой, также приводит к нелинейности электродинамики. В условиях лабораторного эксперимента, когда величина полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ значительно меньше характерного квантово-электродинамического значения $B_q = m^2 c^3 / e \hbar = 4.41 \cdot 10^{13}$ Гс, нелинейные поправки к лагранжиану в первом порядке теории возмущений имеют вид

$$L_{\text{QED}}^{(1)} = \frac{\alpha}{360\pi^2 B_q^2} \{(\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2)^2 + 7(\mathbf{BE})^2\}, \quad (12)$$

где $\alpha = e^2 / (\hbar c)$ – постоянная тонкой структуры.

Поэтому нелинейные эффекты теории Борна–Инфельда в рассматриваемом эксперименте будут добавляться к нелинейным эффектам квантовой электродинамики. Проведем исследование этих эффектов совместно и оценим возможности различить их в эксперименте.

Для этого разложим лагранжиан нелинейной электродинамики Борна–Инфельда по малым параметрам $a^2 \mathbf{B}^2$ и $a^2 \mathbf{E}^2$ с первой постмаксвелловской точностью и сложим с выражением (12). В результате получим

$$L = \frac{1}{8\pi} \{[\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2] + \xi [\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\eta_2 (\mathbf{BE})^2]\}, \quad (13)$$

где $\xi = 1/B_q^2$, а безразмерные постмаксвелловские [15] параметры η_1 и η_2 имеют вид

$$\eta_1 = \frac{\alpha}{45\pi} + \frac{a^2 B_q^2}{4}, \quad \eta_2 = \frac{7\alpha}{180\pi} + \frac{a^2 B_q^2}{4}. \quad (14)$$

Подставляя в выражения (14) значения α , B_q^2 и полагая $a \sim 10^{-16}$ Гс $^{-1}$, можно убедиться, что вклад эффекта квантовой поляризации вакуума в постмаксвелловские параметры η_1 и η_2 составляет $5.17 \cdot 10^{-5}$ и $9.04 \cdot 10^{-5}$, соответственно, в то время как электродинамика Борна–Инфельда предсказывает наличие поправок к этим значениям на уровне $4.9 \cdot 10^{-6}$.

Из выражения (13) несложно найти разложение материальных уравнений по степеням B/B_q и E/B_q с постмаксвелловской точностью первого порядка,

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \mathbf{E} + 2\xi [\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{E} + 2\eta_2 (\mathbf{BE}) \mathbf{B}], \\ \mathbf{H} &= \mathbf{B} + 2\xi [\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \mathbf{B} - 2\eta_2 (\mathbf{BE}) \mathbf{E}]. \end{aligned}$$

Используя эти разложения, можно построить уравнение эйконала для слабой электромагнитной волны, распространяющейся в поле интенсивного циркулярно поляризованного ($\mathbf{E}_1^2 = \mathbf{E}_2^2 = E_0^2$) лазерного излучения. Это можно осуществить, непосредственно используя лагранжиан (13). Хотя полученный результат и будет правильным, однако

при проведении расчета возникнут вполне законные вопросы о его корректности. Поэтому для обеспечения необходимой строгости расчета дополним лагранжиан (13) членами высших приближений и запишем его в виде, имеющем избыточную точность,

$$L = \frac{1}{8\pi} \left\{ [\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2] + \xi [\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2 + 4\eta_2 (\mathbf{B}\mathbf{E})^2] + \right. \\ \left. + \xi^2 [\eta_3 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^3 + \eta_4 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)(\mathbf{B}\mathbf{E})^2] \right\},$$

где η_3 и η_4 – постмаксвелловские параметры высшего порядка.

Используя это выражение, несложно получить разложения векторов $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ по степеням ξ с точностью до ξ^2 включительно,

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + \xi [2\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{E} + 4\eta_2 (\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{B}] + \\ + \xi^2 [3\eta_3 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2\mathbf{E} + \eta_4 (\mathbf{B}\mathbf{E})^2\mathbf{E} + \eta_4 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)(\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{B}], \\ \mathbf{H} = \mathbf{B} + \xi [2\eta_1 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)\mathbf{B} - 4\eta_2 (\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{E}] + \\ + \xi^2 [3\eta_3 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)^2\mathbf{B} + \eta_4 (\mathbf{B}\mathbf{E})^2\mathbf{B} - \eta_4 (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2)(\mathbf{B}\mathbf{E})\mathbf{E}].$$

Подставим эти выражения в уравнения (1). В нулевом приближении по малым векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{e}$ система уравнений (1) имеет решение в виде плоской эллиптически поляризованной волны (3). В первом приближении по векторам (5) система уравнений (1) принимает вид $\Pi^{\alpha\beta} e_\beta = 0$, где

$$\Pi^{\alpha\beta} = \left[(\nabla S)^2 - \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 \right] \delta_{\alpha\beta} - \frac{\partial S}{\partial x^\alpha} \frac{\partial S}{\partial x^\beta} - \\ - 4\xi \left\{ \eta_1 \left[M_\alpha - \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} E_\alpha \right] \left[M_\beta - \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} E_\beta \right] + \right. \\ \left. + \eta_2 \left[N_\alpha + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} B_\alpha \right] \left[N_\beta + \frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} B_\beta \right] \right\}.$$

Приравнявая определитель этого тензора нулю, приходим к уравнению

$$\left\{ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 + 4\eta_1 \xi E_0^2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\nabla S)}{K} \right]^2 + O(\xi^3 E_0^6 K^2) \right\} \times \\ \times \left\{ \left(\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - (\nabla S)^2 + 4\eta_2 \xi E_0^2 \left[\frac{1}{c} \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{(\mathbf{K}\nabla S)}{K} \right]^2 + O(\xi^3 E_0^6 K^2) \right\} = 0.$$

Два решения этого уравнения имеют одинаковый вид

$$S = -\omega t + (\mathbf{k}\mathbf{r}),$$

однако входящие в них частота ω и волновой вектор $\mathbf{k}$ связаны различающимися дисперсионными соотношениями

$$\frac{\omega^2}{c^2} - \mathbf{k}^2 + 4\eta_{1,2} \xi E_0^2 \left[\frac{\omega}{c} - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{K})}{K} \right]^2 = 0. \quad (15)$$

Это означает, что при $\eta_1 \neq \eta_2$ в поле интенсивного циркулярно поляризованного лазерного излучения могут распространяться два типа слабых электромагнитных волн, отличающиеся фазовыми и групповыми скоростями, существенно зависящими от взаимной ориентации векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$. В силу соотношения (15) наибольшее воздействие интенсивное лазерное излучение оказывает на фазу слабой электромагнитной волны тогда, когда она распространяется ему навстречу, т.е. $(\mathbf{kK}) = -kK$. В этом случае из соотношения (15) следует, что

$$\omega = ck(1 - 8\eta_{1,2}\xi E_0^2).$$

Если векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{K}$ коллинеарны и имеют одинаковое направление, то интенсивное лазерное излучение не оказывает влияния на распространение слабых электромагнитных волн и из выражения (15) имеем $\omega = ck$.

Используя полученные соотношения, рассчитаем разности частот генерации слабых электромагнитных волн в кольцевом лазере, на части контура которого в вакууме распространяется интенсивное излучение импульсного лазера. Навстречу интенсивному излучению будут распространяться две волны, имеющие различающиеся частоты генерации ν_1 и ν_2 ,

$$\nu_1 = \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{8\eta_1 \xi E_0^2 L}{P} \right), \quad \nu_2 = \frac{c}{\lambda} \left(1 - \frac{8\eta_2 \xi E_0^2 L}{P} \right).$$

Частота генерации электромагнитной волны, распространяющейся в том же направлении, что и интенсивное лазерное излучение, останется неизменной, $\nu_0 = cN_0/P$.

Выводя эти три волны из кольцевого лазера и направляя их попарно на фотоприемник, можно измерить целый спектр разностей частот генерации,

$$\begin{aligned} \Delta\nu_1 &= \nu_0 - \nu_1 = \frac{8\eta_1 \xi E_0^2 cL}{\lambda P}, \\ \Delta\nu_2 &= \nu_0 - \nu_2 = \frac{8\eta_2 \xi E_0^2 cL}{\lambda P}, \\ \Delta\nu_3 &= \nu_1 - \nu_2 = \frac{8(\eta_1 - \eta_2) \xi E_0^2 cL}{\lambda P}. \end{aligned} \tag{16}$$

Учитывая выражения (14) и подставляя в эти равенства использованные в разделе 3 численные значения величин L , P , E_0 , λ и ξ , получим $\Delta\nu_1 = 26.8 \cdot 10^{-7}$ Гц, $\Delta\nu_2 = 45.1 \cdot 10^{-7}$ Гц, $\Delta\nu_3 = 18.3 \cdot 10^{-7}$ Гц.

Таким образом, все три разности частот генерации (16) превышают минимально измеримую в современных кольцевых лазерах разность $\Delta\nu = 1.4 \cdot 10^{-7}$ Гц. Поэтому в предлагаемом эксперименте можно не только измерить результат прямого проявления квантового эффекта поляризации вакуума, но и оценить величину вклада нелинейной электродинамики Борна–Инфельда в рассматриваемый эффект.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали, что при современном уровне развития лазерной физики имеются реальные возможности для измерения предсказываемых нелинейной электродинамикой Борна–Инфельда эффектов. И хотя проведение таких экспериментов сопряжено со значительными техническими сложностями, полученные результаты позволят выяснить экспериментальный статус этой нелинейной теории.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 00-02-16039.

Список литературы

- [1] *E. S. Fradkin, A. A. Tseitlin.* Phys. Lett. B. 1985. V. 163. P. 123.
- [2] *S. Cecotti, S. Ferrara.* Phys. Lett. B. 1987. V. 187. P. 335.
- [3] *M. Born.* Proc. Roy. Soc. A. 1934. V. 143. P. 410.
- [4] *M. Born, L. Infeld.* Proc. Roy. Soc. A. 1934. V. 144. P. 425.
- [5] *Д. И. Блохинцев, В. В. Орлов.* ЖЭТФ. 1953. Т. 25. С. 513.
- [6] *Б. М. Барбашов, Н. А. Черников.* ЖЭТФ. 1966. Т. 51. № 2. С. 658.
- [7] *G. Boillat.* J. Math. Phys. 1970. V. 11. P. 941.
- [8] *N. Shkolnik, R. L. Mallett.* Phys. Rev. 1986. V. 34. № 12. P. 3650.
- [9] *V. I. Denisov.* Phys. Rev. D. 2000. V. 61. № 3. P. 036004.
- [10] *G. E. Stedman et al.* Phys. Rev. A. 1995. V. 51. P. 4944.
- [11] *А. А. Андреев, А. А. Мак, В. Е. Яшин.* Квантовая электроника. 1997. Т. 24. № 2. С. 99.
- [12] *I. P. Denisova, B. V. Mehta.* Gen. Relat. Gravit. 1997. V. 29. P. 583.
- [13] *I. P. Denisova, M. Dalal.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. № 11. P. 5820.
- [14] *И. М. Тернов, В. Р. Халилов, В. Н. Родионов.* Взаимодействие заряженных частиц с сильным электромагнитным полем. М.: МГУ, 1982.
- [15] *В. И. Денисов, И. П. Денисова.* Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 90. № 2. С. 329.

Поступила в редакцию 1.III.2001 г.,
после доработки 10.IV.2001 г.