Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Э. Адлер, В. Г. Марихин, А. Б. Шабат, Лагранжевы цепочки и канонические преобразования Беклунда, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 163–183

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf528>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 16:49:07

© 2001 г. В. Э. Адлер*, В. Г. Марихин†, А. Б. Шабат†

ЛАГРАНЖЕВЫ ЦЕПОЧКИ И КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА

Рассматриваются преобразования Дарбу для операторов произвольного порядка, строится общая теория преобразований Беклунда на основе лагранжева формализма. Одевающая цепочка для уравнения Буссинеска и ее редукции являются показательными примерами к развиваемой общей теории. Обсуждаются также известные преобразования Беклунда для классических солитонных уравнений.

1. ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее надежных методов анализа интегрируемости динамических систем является построение преобразований Беклунда (ПБ), т.е. преобразований, позволяющих получать новые решения данной динамической системы. Рассматривая композицию ПБ, можно построить дифференциально-разностные системы – интегрируемые цепочки, алгебраически эквивалентные рассматриваемым динамическим системам. Если данная динамическая система является гамильтоновой, то ПБ есть канонические преобразования, сохраняющие гамильтониан (точнее, разность гамильтонианов до и после преобразования Беклунда является полной производной).

Рассматриваемые нами цепочки имеют лагранжианы общего вида

$$\mathcal{L} = \int dx \sum F(q_n, q_{n+1}, q_{n,x}, q_{n+1,x}).$$

Если лагранжиан $F = F(q, q_1, q_x, q_{1,x})$ нелинеен по производным, то мы получаем одевающие цепочки для уравнений типа Буссинеска при $F_{q_x, q_{1,x}} \neq 0$ и цепочки типа Тоды и релятивистской цепочки Тоды, связанных с уравнениями типа нелинейного уравнения Шредингера (НУШ), при $F_{q_x, q_{1,x}} = 0$. Для линейных по производным лагранжианов

$$F = a(q_n, q_{n+1})q_{n,x} + b(q_n, q_{n+1}) \quad (1)$$

*Институт математики Уфимского научного центра РАН, Уфа, Россия. E-mail: adler@imat.rb.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: mvg@itp.ac.ru; shabat@itp.ac.ru

особый интерес представляет случай, когда уравнения Эйлера–Лагранжа сводятся к цепочкам вида

$$g(q_n, q_{n+1}, q_{n,x}, q_{n+1,x}) = 0.$$

Этот случай охватывает одевающие цепочки для уравнений типа Кортевега – де Фриза (КдФ), синус-Гордон и соответствует гамильтоновым уравнениям

$$Jq_t = \frac{\delta H}{\delta q}$$

с гамильтоновыми операторами $J = D_x$, $J = q_x^{-2} D_x + D_x q_x^{-2}$. В конце статьи рассматриваются одевающие цепочки для гамильтоновых уравнений типа Савады–Котера с гамильтоновыми операторами J третьего порядка. Эти цепочки возникают как хорошо определенные редукции цепочки с лагранжианом

$$F = q_x^2 + 2q_x q_{1,x} + (q_x + q_{1,x})(q_1 - q)^2 + (q_1 - q)^4 + \mu(q_1 - q).$$

Последний и является лагранжианом одевающей цепочки для уравнения Буссинеска.

2. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДАРБУ

2.1. Теорема о приводимости. Рассматривая преобразования Дарбу спектральной задачи $L\psi = \lambda\psi$ для дифференциального оператора L порядка m удобно полагать, что

$$L = D^m + u^{(1)} D^{m-2} + \dots + u^{(m-2)} D + u^{(m-1)}. \quad (2)$$

Для дифференциальных операторов общего вида *элементарные преобразования Дарбу*, переводящие решения $L\psi = \lambda\psi$ в решения $\hat{L}\hat{\psi} = \lambda\hat{\psi}$, задаются формулой $\hat{\psi} = a(x)\psi_x + b(x)\psi$. Замена независимой переменной и простое калибровочное преобразование $L \mapsto g^{-1} L g$, приводящие L к виду (2), приводят к элементарным преобразованиям Дарбу к каноническому виду:

$$\hat{\psi} = \psi_x - f\psi, \quad f = D \ln \varphi, \quad L\varphi = \mu\varphi. \quad (3)$$

Предполагается, естественно, что преобразованный оператор $\hat{L}$ имеет тот же вид (2). Очевидно, что элементарное преобразование Дарбу зависит от выбора частного решения φ исходной спектральной задачи. Ниже мы будем записывать формулу (3) в операторном виде:

$$\hat{L}(D - f) = (D - f)L.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Дифференциальный оператор M называется *оператором преобразования* из L в $\hat{L}$, если

$$ML = \hat{L}M. \quad (4)$$

Приведем известное доказательство приводимости преобразований Дарбу, основанное на этом определении.

ТЕОРЕМА. Любой оператор преобразования M из L в $\hat{L}$ разлагается в произведение операторов преобразования первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для доказательства достаточно установить разрешимость следующей задачи “об общей собственной функции”:

$$M\psi = 0, \quad (L - \lambda)\psi = 0. \quad (5)$$

Действительно, при заданном решении $\psi = \varphi$, $\lambda = \mu$ задачи (5) и $f = D \ln \varphi$ мы имеем

$$M = \widetilde{M}(D - f), \quad L - \mu = \tilde{L}(D - f).$$

Подставив эти разложения в уравнение (4), находим

$$\hat{L}M = \hat{L}\widetilde{M}(D - f) = \widetilde{M}\tilde{L}(D - f) \Rightarrow \hat{L}\widetilde{M} = \widetilde{M}\tilde{L}.$$

Мы можем теперь заменить пару дифференциальных операторов M, L , удовлетворяющих уравнению (4), на пару $\widetilde{M}, \tilde{L}$. При этом $\widetilde{M}$, являясь оператором преобразования, имеет порядок меньший, чем исходный, и можно воспользоваться индукцией относительно порядка оператора преобразования M .

Наконец, так как $M\psi = 0 \Rightarrow ML\psi = \hat{L}M\psi = 0$, то разрешимость задачи (5) становится очевидной, если рассмотреть сужение оператора L на конечномерное инвариантное подпространство $V = \text{Ker } M$. Таким образом, в качестве μ можно выбрать любое собственное значение конечномерного линейного оператора $L|_V$.

В силу теоремы оператор преобразования M порядка n представим в виде суперпозиции операторов преобразования первого порядка $D - f_j$:

$$M = (D - f_n)(D - f_{n-1}) \dots (D - f_1). \quad (6)$$

Это приводит к последовательности операторов (2) $L_1 = L, L_2, \dots, L_{n+1} = \hat{L}$, связанных соотношениями

$$L_{j+1}(D - f_j) = (D - f_j)L_j, \quad f_j = D \ln \varphi_j, \quad L_j \varphi_j = \mu_j \varphi_j, \quad j = 1, \dots, n. \quad (7)$$

При $m = 2$ мы находим, что $L_j = (D + f_j)(D - f_j) + \mu_j$ и что соотношения (7) эквивалентны следующей системе уравнений для $f_1, \dots, f_n$:

$$f_{j,x} + f_{j+1,x} = f_j^2 - f_{j+1}^2 + \alpha_j. \quad (8)$$

Здесь $j = 1, \dots, n - 1$ и некоторые из параметров $\alpha_j = \mu_j - \mu_{j+1}$ могут равняться нулю. Отметим, что из доказательства теоремы вытекает, что случай $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ соответствует нильпотентности оператора $(L - \mu)|_V$. Тем не менее и в этом случае жордановой клетки каждый из операторов $D - f_j$ имеет канонический вид (3) и не требует привлечения присоединенных собственных функций.

В случае $m = 3$ и $L = D^3 + uD + v$ операторные соотношения (7) дают

$$L_j = D^3 + u_j D + v_j \Rightarrow \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j + 3f_{j,x}, & v_{j+1} &= v_j + 3f_{j,xx} + 3f_j f_{j,x} + u_{j,x}, \\ f_{j,xx} + 3f_j f_{j,x} + f_j^3 + u_j f_j + v_j &= \mu_j. \end{aligned} \quad (9)$$

Эти уравнения удается записать в более компактном виде:

$$\begin{aligned} (q_{j-1} + q_j + q_{j+1})_{xx} &= \\ &= 3(q_j - q_{j-1})q_{j-1,x} - 3(q_{j+1} - q_j)q_{j+1,x} + (q_j - q_{j-1})^3 + (q_j - q_{j+1})^3 + \alpha_j, \end{aligned} \quad (10)$$

где

$$\alpha_j = \mu_j - \mu_{j-1}, \quad u_j = 3q_{j,x}, \quad f_j = q_{j+1} - q_j.$$

В общем случае $m \geq 2$ удобно, используя разложение (6), ввести *дискретный аналог* рассматриваемой спектральной задачи. Для этого достаточно (ср. [1]) заменить $D^k \psi$ в уравнении $L\psi = \lambda\psi$ степенями оператора сдвига T :

$$T^k \psi = (D - f_k) \dots (D - f_1) \psi, \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Полученное таким нехитрым способом уравнение имеет следующий вид:

$$L^\mu \psi = \lambda \psi, \quad L^\mu = T^m + a^{(1)} T^{m-1} + a^{(2)} T^{m-2} + \dots + a^{(m-1)} T + \mu,$$

причем коэффициенты $a^{(k)}$ являются дифференциальными полиномами от $f_1, \dots, f_m$ и, в частности,

$$a^{(1)} = f_1 + f_2 + \dots + f_m.$$

Например, при $m = 2$ мы получаем $L^\mu = T^2 + gT + \mu$, $g = f_1 + f_2$.

Окончательную форму полученной “разностной” спектральной задачи мы постулируем в виде

$$L_j^\mu \psi_j = \lambda \psi_j \iff \psi_{j+m} + a_j^{(1)} \psi_{j+m-1} + \dots + a_j^{(m-1)} \psi_{j+1} + \mu_j \psi_j = \lambda \psi_j \quad (11)$$

и рассматриваем (11) как дискретный аналог исходной спектральной задачи $L\psi = \lambda\psi$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Одевающей цепочкой для спектральной задачи $L\psi = \lambda\psi$ называются условия совместности уравнения (11) с уравнением $\psi_{j,x} = \psi_{j+1} + f_j \psi_j$.

Стандартный анализ показывает, что условия совместности элементарного преобразования Дарбу (3) и дискретного аналога $L_j^\mu \psi_j = \lambda \psi_j$ рассматриваемой спектральной задачи сводятся к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} a_{j,x}^{(1)} &= a_j^{(1)}(f_j - f_{j+m-1}) + a_{j+1}^{(2)} - a_j^{(2)}, \\ a_{j,x}^{(2)} &= a_j^{(2)}(f_j - f_{j+m-2}) + a_{j+1}^{(3)} - a_j^{(3)}, \\ &\dots\dots\dots \\ a_{j,x}^{(m-1)} &= a_j^{(m-1)}(f_j - f_{j+1}) + \alpha_j. \end{aligned} \quad (12)$$

В этих уравнениях

$$\alpha_j = \mu_{j+1} - \mu_j, \quad a_j^{(1)} = f_j + f_{j+1} + \dots + f_{j+m}.$$

Возвращаясь к операторам преобразования, мы получаем следующее обобщение результата работы [2]:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Рассмотрим периодическое $\mathbb{Z}_n$ -решение одевающей цепочки дифференциальных уравнений (12). Пусть

$$\gamma = \alpha_1 + \dots + \alpha_n, \quad M = (D - f_n) \dots (D - f_1)$$

и $L = L_1$, $\hat{L} = L_{n+1}$ в соответствующей цепочке операторов (7). Тогда при любом $n > 0$ оператор M является оператором преобразования из L в $\hat{L}$ и $\hat{L} = L + \gamma$.

Опуская доказательство, которое аналогично приведенному в работе [2] для одевающей цепочки (8), отметим, что равенство $\hat{L} = L + \gamma$ следует из соотношений

$$\mu_2 - \mu_1 = \alpha_1, \quad \dots, \quad \mu_{n+1} - \mu_n = \alpha_n \Rightarrow \mu_1 - \mu_{n+1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \gamma \Rightarrow \hat{L} = L + \gamma.$$

Заметим еще, что при доказательстве предполагается однозначная разрешимость линейной системы алгебраических уравнений относительно f_i :

$$f_i + f_{i+1} + \dots + f_{i+m} = a_i^{(1)}, \quad i \in \mathbb{Z}_n. \quad (13)$$

Это условие налагает определенные ограничения на целые числа m и n .

Совпадение одевающей цепочки (12) при $m = 2$ с цепочкой (8) очевидно. В случае $m = 3$ одевающая цепочка (12) сводится к следующим уравнениям для $a_j = a_j^{(1)}$, $b_j = a_j^{(2)}$:

$$\begin{aligned} a_j &= f_j + f_{j+1} + f_{j+2}, \\ a_{j,x} &= a_j(f_j - f_{j+2}) + b_{j+1} - b_j, \\ b_{j,x} &= b_j(f_j - f_{j+1}) + \alpha_j. \end{aligned} \quad (14)$$

Переписав второе из этих уравнений в виде

$$(1 + T + T^2)(f_{j,x}) = (1 - T)(f_j^2 + f_j f_{j+1} + f_{j+1}^2 - b_j),$$

мы приходим к уравнениям (10) в результате замены

$$f_j = q_{j+1} - q_j, \quad b_j = (1 + T + T^2)q_{j,x} + f_j^2 + f_j f_{j+1} + f_{j+1}^2.$$

Заметим, что аналогичное преобразование, т.е. замена переменных $f_j = q_{j+1} - q_j$ в уравнениях одевающей цепочки (8) приводит эти уравнения к виду

$$(q_j + q_{j+1})_x = \beta_j - (q_j - q_{j+1})^2, \quad \alpha_j = \beta_{j+1} - \beta_j.$$

2.2. Уравнение $AB - BA = \alpha A + \beta B$. Непосредственным следствием сформулированного выше предложения 1 является разрешимость задачи о паре дифференциальных операторов A и B . Заметим, что ограничения на порядки этих операторов, связанные с условием разрешимости линейной системы (13), можно было бы ослабить. Впрочем, мы рассмотрим здесь только простейший случай, при котором эти условия выполняются автоматически.

Рассматривая пару операторов A и B порядка 2 и 3, удовлетворяющих уравнению

$$AB - BA = \alpha A + \beta B, \quad (15)$$

нужно иметь в виду, что при $\beta \neq 0$ замена B на $\tilde{B} = \alpha A + \beta B$ приводит нас к случаю $\alpha = 0$. При этом в силу предложения 1 применима цепочка (8) (см. ниже). В случае $\beta = 0$ $\mathbb{Z}_2$ -решения цепочки (10) определяются уравнениями

$$\begin{aligned} (2q_1 + q_2)_{xx} &= 6q_{1,x}(q_2 - q_1) + 2(q_2 - q_1)^3 + \alpha_1, \\ (2q_2 + q_1)_{xx} &= 6q_{2,x}(q_1 - q_2) + 2(q_1 - q_2)^3 + \alpha_2. \end{aligned}$$

Эти уравнения и дают в силу предложения 1 пару операторов, удовлетворяющих уравнению (15):

$$\begin{aligned} A &= (D + f)(D - f), \quad B = D^3 + uD + v, \quad \alpha = \alpha_1 + \alpha_2, \\ f &= q_2 - q_1, \quad u = 3q_{1,x}, \quad v = \frac{1}{2}u_x. \end{aligned}$$

Указанные уравнения для q_1, q_2 допускают первый интеграл

$$(q_1 + q_2)_x + (q_1 - q_2)^2 = a(x), \quad 3a' = \alpha,$$

и сводятся благодаря этому интегралу к уравнению второго порядка для $f = q_2 - q_1$:

$$f_{xx} = 2f^3 - 6a(x)f + \alpha_2 - \alpha_1. \quad (16)$$

Уравнение (16) является, очевидно, вторым из уравнений Пенлеве.

Периодическое $\mathbb{Z}_3$ -замыкание одевающей цепочки для уравнения Шредингера приводит нас к следующей системе уравнений первого порядка для $g_j = f_j + f_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}_3$:

$$g_{1,x} = g_1(g_3 - g_2) + \alpha_1, \quad g_{2,x} = g_2(g_1 - g_3) + \alpha_2, \quad g_{3,x} = g_3(g_2 - g_1) + \alpha_3. \quad (17)$$

В этом случае мы имеем

$$A = (f_1 + D)(f_1 - D), \quad B = (D - f_3)(D - f_2)(D - f_1) \Rightarrow AB = B(A + \gamma), \quad (18)$$

где $\gamma = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$. Как и в предыдущем случае, первый интеграл

$$g_1 + g_2 + g_3 = a(x), \quad a' = \gamma,$$

позволяет понизить порядок системы и свести ее к четвертому уравнению Пенлеве. Точнее, как нетрудно проверить, каждая из трех функций $g_j \equiv g$, $j = 1, 2, 3$, удовлетворяет уравнению второго порядка

$$2gg_{xx} - g_x^2 = g^2(3g^2 - 4\sigma g + \sigma^2 + 2\alpha_{j+2} + 2\alpha_{j+1}) - \alpha_j^2. \quad (19)$$

В частности, при $g_3 = 0$ уравнения (17) сводятся к уравнению Риккати

$$g_x + g^2 = \gamma xg + \alpha,$$

где $g \equiv g_2$, $\alpha \equiv \alpha_2$ и $g_1 = \gamma x - g$. Подстановка $g = y'/y$ переводит это уравнение Риккати в линейное уравнение, определяющее функции Эрмита. Дальнейшее упрощение происходит при $g_2 = g_3 = 0$, когда система (17) сводится к уравнению $g_{1,x} = \gamma$. Порядок оператора B в (18) можно понизить, заметив, что в общем случае (15)

$$B = AB_1 \Leftrightarrow AB_1 - B_1A = \alpha + \beta B_1.$$

В рассматриваемом примере $f_1 = f_2 = -f_3 = g_1/2$, и поэтому $B = (D - f_3)(D - f_2) \times (D - f_1) = A(D - f_1)$. Таким образом, в случае $g_2 = g_3 = 0$ уравнение (18) можно переписать в виде

$$L(f - D) = (f - D)L + \gamma(f - D), \quad L = u - D^2 \Leftrightarrow 2f_x = \gamma, \quad u_x = \gamma f. \quad (20)$$

Эта формула и полученная из нее формальным сопряжением позволяют, как известно, вычислить спектр оператора $L = x^2 - D^2$, соответствующего квантовому гармоническому осциллятору. В силу предложения 1 случай (20) соответствует $\mathbb{Z}_1$ -периодическим решениям одевающей цепочки для оператора Шредингера.

2.3. Обобщения цепочки Вейсса. Впервые одевающая цепочка (12), а точнее ее частный случай, появилась в работе Вейсса [3] в следующем виде:

$$\frac{a_{j,x}}{a_j} + \frac{a_{j+1,x}}{a_{j+1}} + \dots + \frac{a_{j+m-1,x}}{a_{j+m-1}} = a_j - a_{j+m-1}. \quad (21)$$

Эта отвечающая жордановой клетке (см. замечание после теоремы) цепочка получается из системы (12) в результате редукции

$$a_j^{(m-1)} = \dots = a_j^{(2)} = 0, \quad a_j^{(1)} = a_j = f_j + f_{j+1} + \dots + f_{j+m}. \quad (22)$$

Очевидно, одевающая цепочка при $m > 3$ допускает и другие редукции, понижающие порядок системы (12):

$$a_j^{(m-1)} = \dots = a_j^{(m-k)} = 0, \quad 1 < k \leq m - 3.$$

Заметим, что все эти редукции легко формулируются в терминах вспомогательной линейной задачи (см. определение 2). В частности, цепочке (21) соответствует спектральная задача

$$\psi_{j+m} + a_j \psi_{j+m-1} = \lambda \psi_j, \quad \psi_{j,x} = \psi_{j+1} + f_j \psi_j, \quad (23)$$

которая получается из спектральной задачи (11) в результате редукции (22) при $\mu_j = 0$.

В недавней работе [4] рассматривалась следующая модификация спектральной задачи (23):

$$\psi_{j+3} + a_j \psi_{j+1} + b_j \psi_{j-1} = \lambda \psi_j, \quad \psi_{j,x} = \psi_{j+2} + (f_j + f_{j+1}) \psi_j, \quad a_j = f_j + f_{j+1} + f_{j+2}.$$

Соответствующие уравнения цепочки

$$(f_{j-1} + f_j + f_{j+1})_x = (f_{j-1} + f_j + f_{j+1})(f_{j-1} - f_{j+1}) + b_{j+1} - b_{j-1}, \\ b_{j,x} = b_j(f_{j+1} - f_{j-1})$$

сводятся, очевидно, к уравнениям (21) при $m = 3$ редукцией $b = 0$.

Наконец, пара Лакса $L\psi = \lambda\psi$, $\psi_x = A\psi$ (ср. [5]), где

$$L = T^m - (f + \dots + f_{m-1})T^{-k}, \quad A = T^{k+m} - (f + \dots + f_{k+m-1}), \quad k + m > 0,$$

приводит к еще одной интересной модификации цепочки Вейсса (21):

$$(f_j + \dots + f_{j+m-1})_x = (f_j + \dots + f_{j+m-1})(f_{j-k} + \dots + f_{j-1} - f_{j+m} - \dots - f_{j+k+m-1}).$$

Случай $k = 1 - m$ дает в точности редукцию Вейсса, рассмотренную выше, случай $m = 1$ приводит к цепочке Богоявленского [6].

3. ГАМИЛЬТОНОВА ТЕОРИЯ ПБ

3.1. Канонические преобразования. Мы рассмотрим здесь альтернативный подход к одевающим цепочкам, в котором место преобразований Дарбу занимают ПБ для нелинейных интегрируемых уравнений. Большая часть примеров связана с уравнениями из известного списка [7] систем вида

$$\mathbf{u}_t = A(\mathbf{u})\mathbf{u}_{xx} + B(\mathbf{u}, \mathbf{u}_x), \quad \det A \neq 0, \quad \mathbf{u} = (u^1, u^2), \quad (24)$$

обладающих высшими законами сохранения. В частности, этот класс содержит НУШ и уравнение Буссинеска

$$q_{tt} + q_{xxxx} + q_x q_{xx} = 0. \quad (25)$$

Отметим, что первоначально одевающая цепочка в виде (10) возникла именно при рассмотрении ПБ для этого уравнения. Остальные примеры связаны с уравнениями типа КдФ и Савады–Котера.

Как цепочки, так и непрерывные уравнения обладают лагранжевой структурой. Грубо говоря, нас интересует вопрос, как связаны эти две структуры. Грубо же, можно ответить так: во всех случаях сдвиг в цепочке является каноническим преобразованием, сохраняющим гамильтонову структуру уравнения. С некоторыми оговорками можно сказать и наоборот: уравнение в частных производных задает вариационную симметрию цепочки.

Сначала обсудим общую схему на примере гамильтоновых систем (24). Эта теория является достаточно общей и охватывает широкий класс вариационных задач вида

$$\delta \int dt dx \Phi(q_t, q_{xx}, q_x, q) = 0.$$

В частности, лагранжианы с плотностями

$$\Phi = (q_t + q_{xx})^2 + q_x^3, \quad \Phi = \frac{1}{2}(q_t + q_{xx} - q_x^2)^2, \quad \Phi = \frac{(q_t + q_{xx} - \frac{1}{2}R'(q))^2}{4(q_x^2 - R(q))} + \frac{1}{12}R''(q) \quad (26)$$

отвечают соответственно уравнению Буссинеска, НУШ и анизотропной модели Ландау–Лифшица. Плотность $H[p, q] = H(p, q_{xx}, q_x, q)$ гамильтониана связана с плотностью лагранжиана Φ стандартными формулами

$$H = q_t \Phi_{q_t} - \Phi, \quad \Phi = pH_p - H \quad (p = \Phi_{q_t}).$$

Отметим, что подстановка

$$p \rightarrow p + \alpha q_{xx} \quad (27)$$

хотя и меняет вид гамильтониана, не отражается на исходном q -уравнении.

В излагаемой теории роль цепочки преобразований Дарбу играет цепочка ПБ

$$\dots (p_{n-1}, q_{n-1}) \rightarrow (p_n, q_n) \rightarrow (p_{n+1}, q_{n+1}) \dots, \quad (28)$$

переводящих решение гамильтоновой динамической системы

$$q_t = \frac{\delta H[p, q]}{\delta p}, \quad p_t = -\frac{\delta H[p, q]}{\delta q} \quad (29)$$

снова в решение.

Аналог элементарных преобразований Дарбу (см. предыдущий раздел) определяется как преобразование $(p, q) \rightarrow (\hat{p}, \hat{q})$ с помощью производящей функции $F[q, \hat{q}]$:

$$p = \frac{\delta F[q, \hat{q}]}{\delta q}, \quad \hat{p} = -\frac{\delta F[q, \hat{q}]}{\delta \hat{q}}. \quad (30)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Функция $F[q, \hat{q}] = F(q, q_x, \hat{q}, \hat{q}_x)$ называется производящей функцией *канонического ПБ* для динамической системы (29), если существует функция $\sigma[q, \hat{q}]$ такая, что

$$\hat{H}[\hat{p}, \hat{q}] - H[p, q] = \frac{d}{dx} \sigma[q, \hat{q}], \quad (31)$$

где $p, \hat{p}$ определены формулами (30).

В силу этого определения и соотношений

$$p_n = \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} = -\frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} \Rightarrow \frac{\delta F[q_n, q_{n+1}]}{\delta q_n} + \frac{\delta F[q_{n-1}, q_n]}{\delta q_n} = 0$$

производящая функция приводит нас к лагранжевой форме цепочки и задает плотность $F[q_n, q_{n+1}]$ лагранжиана:

$$\delta \int dx \sum_n F[q_n, q_{n+1}] = 0. \quad (32)$$

ПРИМЕР 1. Для гамильтониана $H = p^2 + p(q_x^2 - q_{xx})$, соответствующего второму из примеров (26), производящая функция

$$F = -q_x^2 + f(\hat{q} - q), \quad f'' + f' = 0,$$

приводит нас к лагранжиану для цепочки Тоды.

Подставляя выражения (30) для импульсов в (31), мы получим определяющее уравнение для производящей функции F и гамильтониана H , к разрешению которого сводится задача классификации. Разумеется, в полном объеме эта задача является весьма сложной, и здесь мы ограничимся лишь некоторыми подклассами уравнений. Например, в качестве дополнительного условия, сильно облегчающего задачу, можно считать, что гамильтониан не зависит явно от q (что отвечает инвариантности уравнений относительно сдвигов $q \rightarrow q + \text{const}$). Другим дополнительным условием может служить предположение о квадратичности гамильтониана по p :

$$H = G(q_x, q)p^2 + (A(q_x, q) - q_{xx})p + B(q_x, q). \quad (33)$$

Соответствующие динамические системы являются лагранжевыми,

$$L = \int dx \left(\frac{1}{2G} (A - q_{xx} - q_t)^2 - 2B \right),$$

и описывают ньютоновскую динамику одномерного объекта (струны) с плотностью $\rho = G^{-1}$ и дисперсией $\omega = \pm k^2$. В данном случае определяющее уравнение сводится в основном к системе

$$F_{aa}(GF_{aa} + 1) = \hat{G}F_{ab}^2, \quad GF_{ab}^2 = F_{bb}(\hat{G}F_{bb} - 1), \quad (GF_{aa} - \hat{G}F_{bb} + 1)F_{ab} = 0, \quad (34)$$

где использованы обозначения $q_x = a$, $\hat{q}_x = b$.

3.2. Уравнения типа НУШ и цепочки типа Тоды. Уравнения (34) приводят к существенно различным типам систем (33) при $F_{ab} = 0$ и $F_{ab} \neq 0$. В случае $F_{ab} = 0$ получаем обобщенные цепочки Тоды (см. [8]–[11]), при этом производящая функция имеет вид

$$F = f(a, q) + a\alpha(q, \hat{q}) + b\beta(q, \hat{q}) + \gamma(q, \hat{q}), \quad \sigma = r(a, q) + abh(q, \hat{q}) + \gamma_q a - \gamma_{\hat{q}} b + \rho(q, \hat{q}), \quad (35)$$

причем $Gf_{aa} = -1$, $r_a = f_q - af_{aq} - Af_{aa}$, $h = \beta_q - \alpha_{\hat{q}}$.

Подставляя (35) в (31), имеем

$$\begin{aligned} a^2bh_q + ab^2h_{\hat{q}} + a(r_q + \gamma_{qq}a + \rho_q) + b(\rho_{\hat{q}} - \gamma_{\hat{q}\hat{q}}b) = \\ = (f_{aq}a - f_q - \gamma_q - bh)[G(f_{aq}a - f_q - \gamma_q - bh) - A] + \\ + B - \hat{B} - (ah - \gamma_{\hat{q}})[\hat{G}(ah - \gamma_{\hat{q}}) + \hat{A}], \end{aligned} \quad (36)$$

откуда легко следует, что $G_{aaa} = \hat{G}_{bbb} = 0$.

ПРИМЕР 2. В качестве несложного упражнения разберем подробно случай без явной зависимости от q . В этом случае

$$H = pq_{xx} + \varepsilon_0 p^2 q_x^2 + \varepsilon_1 p q_x^2 + \varepsilon_2 p^2 q_x + \varepsilon_3 p^2 + \varepsilon_4 p q_x + \varepsilon_5 q_x^2 + \varepsilon_6 p, \quad (37)$$

производящая функция не зависит от $\hat{z}$ и уравнение (31) дает

$$F(z, y) = W(z) + zV(y) + U(y), \quad y = \hat{q} - q, \quad z \equiv q_x.$$

Импульсы задаются формулами

$$p = -cq_{xx} - a\hat{q}_x - b, \quad \hat{p} = -aq_x - b,$$

где $a = V'$, $b = U'$, $c = W''$. Условие $\hat{H} - H \in \text{Im } D_x$ эквивалентно следующим уравнениям на эти функции:

$$\frac{1}{c} = \varepsilon_0 q_x^2 + \varepsilon_2 q_x + \varepsilon_3, \quad a' = \varepsilon_2 a^2 - 2\varepsilon_0 ab + \varepsilon_1 a, \quad b' = \varepsilon_3 a^2 - \varepsilon_0 b^2 + \varepsilon_1 b - \varepsilon_5.$$

Система на a и b допускает первый интеграл,

$$-\varepsilon_5 + \varepsilon_1 b - \varepsilon_0 b^2 + \varepsilon_2 ab - \varepsilon_3 a^2 = a\mu,$$

и решается в элементарных функциях. В результате получается известный список цепочек типа Тоды (случай $a = 0$) и релятивистской цепочки Тоды ($a \neq 0$). Постоянная интегрирования μ не входит в уравнения в частных производных (которые определяются только параметрами ε), и при итерации ПБ ее можно выбирать независимо на каждом шаге, как и спектральный параметр в преобразовании Дарбу.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. В общем случае $F_{ab} = 0$

$$F(q_{n,x}, q_{n+1}, q_n) = W(q_{n,x}, q_n) + q_{n,x}V(q_{n+1}, q_n) + U(q_{n+1}, q_n). \quad (38)$$

В частности, для модели Ландау–Лифшица (см. (26)) кинетическая энергия $W = W(z, q)$ определяется слагаемым

$$W = \frac{1}{2\sqrt{R}} [(\sqrt{R} + z) \ln(\sqrt{R} + z) + (\sqrt{R} - z) \ln(\sqrt{R} - z)], \quad W_{zz} = \frac{1}{R(q) - z^2},$$

а функции U и V задаются формулами

$$V = 0, \quad U = -\ln(q_1 - q), \quad (39)$$

$$V_{q_1} = -\frac{1}{2r(q_1, q)}, \quad U = \frac{1}{2} \ln r(q_1, q), \quad (40)$$

где в обоих случаях $R(u)$ есть многочлен не выше четвертой степени, $r(u, v)$ – симметрический полином степени не выше 2 по каждой переменной, причем R является его дискриминантом:

$$R(u) = r_v^2 - 2rr_{vv}, \quad r(u, v) = r(v, u), \quad r_{uuu} = 0. \quad (41)$$

Гамильтонова форма соответствующих цепочек (см. [10])

$$u_{n,x} = \frac{2h(u_n, v_n)}{u_{n+1} - v_n} + h_{n,v_n}, \quad v_{n,x} = \frac{2h(u_n, v_n)}{u_n - v_{n-1}} - h_{n,u_n}$$

непосредственно связана [12] с известной XYZ -цепочкой Складина [13].

3.3. Уравнения типа Буссинеска. В случае $F_{ab} \neq 0$, уравнения (34) эквивалентны переопределенной системе

$$F_{aa}F_{bb} = F_{ab}^2, \quad G(a)F_{aa} - \hat{G}(b)F_{bb} + 1 = 0. \quad (42)$$

Обозначим $y = F_{aa}$, тогда $F_{bb} = (Gy + 1)/\hat{G}$, $F_{ab}^2 = y(Gy + 1)/\hat{G}$. Из условий совместности $F_{bba} = F_{abb}$, $F_{aba} = F_{aab}$ нетрудно получить выражения для y_a , y_b (определитель линейной системы не равен нулю). Условие совместности $y_{ab} = y_{ba}$ оказывается эквивалентным равенству $\hat{G}_{bb} = G_{aa}$, т.е. функции $\hat{G}$ и G квадратичны, как и в предыдущем случае. Далее, уравнения на функцию y удается сильно упростить в результате подстановки

$$u = \hat{G}G + \frac{\hat{G}}{4y(Gy + 1)} = \hat{G}G + \frac{1}{4F_{ab}^2}, \quad u_a^2 = \hat{G}_b^2 u, \quad u_b^2 = G_a^2 u.$$

Если $u \neq 0$, то замена $v = \sqrt{u}$ дает $2v_a = \hat{G}_b$, $2v_b = G_a$, и мы получаем решение в виде

$$G = g_2 a^2 + 2g_1 a + g_0, \quad \hat{G} = g_2 b^2 + 2\hat{g}_1 b + \hat{g}_0, \\ v = g_2 ab + \hat{g}_1 a + g_1 b + c, \quad w = v^2 - \hat{G}G,$$

$$F_{aa} = -\frac{1}{2G} \left(\frac{v}{\sqrt{w}} + 1 \right), \quad F_{bb} = -\frac{1}{2\hat{G}} \left(\frac{v}{\sqrt{w}} - 1 \right), \quad F_{ab} = \frac{1}{2\sqrt{w}},$$

откуда F находится интегрированием. Постоянную интегрирования c следует выбирать так, чтобы $w \neq 0$.

В случае $u = 0$ имеем $2F_{aa} = 1/G$, $2F_{bb} = 1/\hat{G}$, $4F_{ab}^2 = -1/\hat{G}G$, откуда следует, что функции G и $\hat{G}$ постоянны, а F квадратична.

ПРИМЕР 3. В простейшем случае $G = \widehat{G} = 1$ мы приходим к производящей функции

$$F[q, \hat{q}] = (1+c)q_x^2 + 4q_x\hat{q}_x + (1-c)\hat{q}_x^2 + 3(q_x + \hat{q}_x)(q - \hat{q})^2 + (q - \hat{q})^4 + 4\mu(q - \hat{q}) \quad (43)$$

и гамильтониану

$$H = p^2 + 4cq_{xx}p + 4(c^2 + 3)q_{xx}^2 - 48q_x^3, \quad (44)$$

где произвол в выборе постоянной c соответствует преобразованию (27):

$$\begin{aligned} p &= -2(1+c)q_{xx} - 4\hat{q}_{xx} + 12(q - \hat{q})\hat{q}_x + 4(q - \hat{q})^3 + 4\mu, \\ \hat{p} &= +2(1-c)\hat{q}_{xx} + 4q_{xx} + 12(q - \hat{q})q_x + 4(q - \hat{q})^3 + 4\mu. \end{aligned}$$

Легко видеть, что соответствующая цепочка совпадает с цепочкой (10), а соответствующая система (29) эквивалентна, с точностью до растяжений, уравнению Буссинеска (25).

ПРИМЕР 4. Вводя новые переменные $Q = \alpha q + \beta \hat{q}$, $\hat{Q} = \beta q + \alpha \hat{q}$, можно получить систему Михайлова–Шабата

$$Q_t = -\gamma Q_{xx} + \mu \hat{Q}_x(Q - \hat{Q}) + \nu(Q - \hat{Q})^3, \quad \hat{Q}_t = \gamma \hat{Q}_{xx} + \mu Q_x(Q - \hat{Q}) + \nu(Q - \hat{Q})^3, \quad (45)$$

причем

$$\beta = \alpha\rho, \quad \rho^2 - \rho + 1 = 0, \quad \gamma = 3\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right), \quad \mu = -\frac{2}{3}\frac{1}{\alpha - \beta}, \quad \nu = -\frac{2}{27}\frac{\alpha + \beta}{(\alpha - \beta)^3}.$$

ПРИМЕР 5. В заключение приведем еще один пример канонического преобразования, показывающий, что предположение квадратичности по p не является обязательным ($\omega^3 = 1$):

$$\begin{aligned} H = p_x q_x + p^3 + q_x^3 &\rightarrow \widehat{H} = -\hat{p}_x \hat{q}_x + \hat{p}^3 + \hat{q}_x^3, \\ F = \omega \hat{q}_x q + f(q, \hat{q}), \quad p = \omega \hat{q}_x + f_q, \quad \hat{p} = \omega q_x - f_{\hat{q}}. \end{aligned} \quad (46)$$

Используя выражения (46) для гамильтонианов и импульсов и требование $\delta(\widehat{H} - H) = 0$, получаем уравнения на f :

$$f_{\hat{q}\hat{q}} - 3\omega^2 f_q = 0, \quad f_{qq} + 3\omega^2 f_{\hat{q}} = 0, \quad (f_{\hat{q}}^2)_{\hat{q}} + (f_q^2)_q = 0, \quad f_q^3 + f_{\hat{q}}^3 = \text{const}. \quad (47)$$

Решая систему (47), получаем лагранжиан цепочки ПБ системы (46):

$$L = \sum_n [\omega_n q_{n+1,x} q_n + C_n e^{\frac{3}{\omega_n}(\Omega_n q_n - \Omega_n^* q_{n+1})}], \quad \omega_n^3 = \Omega_n^3 = 1. \quad (48)$$

3.4. Уравнения типа КдФ. Рассмотрим цепочки вида

$$q_{n+1,x} = C(q_{n,x}, q_n, q_{n+1}), \quad C_{q_{n,x}} \neq 0. \quad (49)$$

Сама эта цепочка не может быть лагранжевой, но мы требуем этого от некоторого ее следствия. Пусть лагранжиан имеет вид (1), тогда уравнение Эйлера

$$f q_{n+1,x} - f(-1) q_{n-1,x} + b_0 + b_1(-1) = 0, \quad f = -a_1 \quad (50)$$

должно обращаться в тождество в силу (49). Кроме того, мы будем требовать отсутствия нетривиальных инвариантов (псевдоконстант):

$$T(J) = J \Rightarrow J = \text{const}, \quad D(I) = 0 \Rightarrow I = \text{const}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Цепочки, удовлетворяющие данным требованиям, имеют вид (с точностью до точечных замен)*

$$q_{n+1,x} - \varepsilon q_{n,x} = G(q_{n+1} + \varepsilon q_n), \quad F = q_{n+1} q_{n,x} + \varepsilon b(q_{n+1} + \varepsilon q_n), \quad b' = G, \quad (51)$$

$$q_{n+1,x} q_{n,x} = \frac{1}{f(q_n, q_{n+1})}, \quad F = q_{n,x} V(q_n, q_{n+1}), \quad f = V_{q_{n+1}}. \quad (52)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем по $z = q_x$ тождество (50):

$$\begin{aligned} f(1)C(C(z, q, q_1), q_1, q_2) - fz + b_0(1) + b_1 &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow f(1)C_z(1)C_z &= f \Rightarrow C_{zz}(1)C_z^2 + C_z(1)C_{zz} &= 0. \end{aligned} \quad (53)$$

Комбинация этих соотношений дает $(T-1)C_{zz}^2/(fC_z^3) = 0$, и в силу условия отсутствия инвариантов имеем $C_{zz}^2 = \text{const} \cdot fC_z^3$. Данное уравнение имеет два решения:

$$C = Az + B, \quad C = \frac{k}{fz + A} + B,$$

где A, B , как и f , зависят от q, q_1 , а k – постоянная, которую можно считать равной единице за счет переопределения f .

В линейном случае имеем $f(1)A(1) = f/A = \rho^2(q_1)$, откуда легко получить $A = \varepsilon \rho(q)/\rho(q_1)$, $\varepsilon^2 = 1$. Точечная замена $q \rightarrow r(q)$ позволяет обратить ρ в единицу. После этого тождество (53) дает $B(1) + b_0(1) = -\varepsilon B - b_1$ и приводит к цепочкам (51).

Для решений вида $C = 1/(fz + A) + B$ подстановка в (53) дает

$$f(1)B + A(1) = 0, \quad f(1)B(1) - fB(-1) + b_0 + b_1(-1) = 0.$$

Из первого равенства следует, что функция B зависит только от q_1 , причем цепочку (49) можно записать в виде

$$(q_{n+1,x} - B(q_{n+1}))(q_{n,x} - B(q_n)) = \frac{1}{f(q_n, q_{n+1})}.$$

Если $B = 0$, то достаточно положить $b = 0$ (случай (52)). Если $B \neq 0$, то замена $q \rightarrow r(q)$ позволяет превратить B в единицу, при этом

$$f(q_1, q_2) - f(q_0, q_1) + b_0(q_0, q_1) + b_1(-1)(q_{-1}, q_0) = 0,$$

откуда получаем сначала $f_1 = b_{1,0} = 0$, но тогда и $f_0 = 0$. Таким образом, цепочка в данном случае тривиальна.

При помощи цепочек (51), (52) можно построить теорию ПБ для лагранжианов вида

$$\mathcal{L} = \iint dx dt \left(\frac{1}{2} q_t q_x^\alpha + H(q, q_x, \dots) \right), \quad \alpha = \pm 1,$$

уравнение Эйлера для которых имеет вид

$$J q_t = \frac{\delta H}{\delta q}, \quad J = \begin{cases} D_x, & \alpha = 1, \\ q_x^{-2} D_x + D_x q_x^{-2}, & \alpha = -1. \end{cases} \quad (54)$$

В обоих случаях условие $\hat{L} - L \in \text{Im } D_t + \text{Im } D_x$ разбивается на два:

$$\hat{q}_t \hat{q}_x^\alpha - q_t q_x^\alpha \in \text{Im } D_t + \text{Im } D_x, \quad \hat{H} - H \in \text{Im } D_x.$$

При $\alpha = 1$ первое выражение преобразуем следующим образом:

$$\hat{q}_t \hat{q}_x - q_t q_x = (\hat{q}_t + \varepsilon q_t)(\hat{q}_x - \varepsilon q_x) + \varepsilon D_t(\hat{q} q_x) - \varepsilon D_x(\hat{q} q_t),$$

что является полной дивергенцией, если $\hat{q}$ и q связаны формулой (51). Аналогично в случае $\alpha = -1$ имеем

$$\frac{\hat{q}_t}{\hat{q}_x} - \frac{q_t}{q_x} = D_t(V q_x) - D_x(V q_t),$$

если $\hat{q}$ и q связаны цепочкой вида (52). Для уточнения правой части цепочки используется условие $\hat{H} - H \in \text{Im } D_x$.

ПРИМЕР 6. Уравнение КдФ

$$q_t = q_{xxx} - 6q_x^2 \Rightarrow D_x(q_t) = \frac{\delta H}{\delta q}, \quad H = \frac{1}{2}q_{xx}^2 + 2q_x^3. \quad (55)$$

Ищем функцию G такую, что $\hat{H} - H$ есть полная производная в силу равенства $\hat{q}_x - \varepsilon q_x = G(\hat{q} + \varepsilon q)$. Имеем

$$\begin{aligned} \hat{q}_{xx}^2 - q_{xx}^2 + 4\hat{q}_x^3 - 4q_x^3 &= (\hat{q}_{xx} + \varepsilon q_{xx})(\hat{q}_x + \varepsilon q_x)G' + 4\hat{q}_x^3 - 4q_x^3 = \\ &= \frac{1}{2}D_x((\hat{q}_x + \varepsilon q_x)^2 G') - \frac{1}{2}(\hat{q}_x + \varepsilon q_x)^3 G'' + 4\hat{q}_x^3 - 4q_x^3 \stackrel{\text{Im } D_x}{=} \\ &\stackrel{\text{Im } D_x}{=} 4(\varepsilon q_x + G)^3 - 4q_x^3 - \frac{1}{2}(2\varepsilon q_x + G)^3 G''. \end{aligned}$$

Коэффициент при q_x^3 равен $\varepsilon - 1 - \varepsilon G''$, откуда получаем $G'' = 1 - \varepsilon$. Случай $\varepsilon = 1$ неинтересен, так как приводит к $\hat{q}_x = q_x$. Продолжая вычисление при $\varepsilon = -1$, получаем окончательно ПБ в виде

$$\hat{q}_x + q_x = (\hat{q} - q)^2 + \beta.$$

Параметр β можно выбирать разным на каждом шаге. Обозначая $f = \hat{q} - q$, получим одевающую цепочку (8).

ПРИМЕР 7. Уравнение sin-Гордон

$$q_{xt} = \sin 2q, \quad H = \frac{1}{2} \cos 2q. \quad (56)$$

В данном случае ε принимает два значения $\varepsilon = \pm 1$, так как разность

$$\cos 2\hat{q} - \cos 2q = -2 \sin(\hat{q} - q) \sin(\hat{q} + q)$$

есть полная производная при $\hat{q}_x - \varepsilon q_x = \beta \sin(\hat{q} + \varepsilon q)$.

Обсудим кратко связь между одевающими цепочками для этих двух классических примеров. Переходя к уравнению sh-Гордон $q_{xy} + e^{2q} - e^{-2q} = 0$ и используя оба знака, находим

$$\gamma_j^{-1} \partial_x (q_j + q_{j+1}) = e^{q_{j+1} - q_j} - e^{q_j - q_{j+1}}, \quad (57)$$

$$\gamma_j \partial_y (q_j - q_{j+1}) = e^{q_{j+1} + q_j} - e^{-q_j - q_{j+1}}. \quad (58)$$

Легко проверить, что условие антипериодичности

$$q_{j+l} = -q_j \quad \forall j, \quad l = 2, 4, \dots, \quad (59)$$

сводит обе одевающие цепочки (57), (58) к хорошо определенным динамическим системам и что соответствующие векторные поля D_x, D_y коммутируют. Таким образом, система уравнений (57), (58) и (59) описывает достаточно богатый класс частных решений уравнения $q_{xy} + e^{2q} - e^{-2q} = 0$. С другой стороны, можно проверить, что условие (59) и формулы

$$f_j = q_{j,x} - \gamma_j e^{q_{j+1} - q_j} \quad (j = 1, 2, \dots, l), \quad f_{l+1} = -q_{1,x}$$

приводят нас к $(l+1)$ -периодическому замыканию одевающей цепочки (8), рассмотренному в работе [2].

ПРИМЕР 8. Лагранжиан для уравнения Кричевера–Новикова

$$q_t = q_{xxx} - \frac{3}{2q_x}(q_{xx}^2 - r(q)) + cq_x \quad (60)$$

имеет плотность

$$L = \frac{q_t}{q_x} + \frac{r(q) - q_{xx}^2}{q_x^2}, \quad r^{(V)}(q) = 0, \quad (61)$$

т.е. в данном случае ПБ следует искать в виде (52). Ответ имеет вид [14]

$$q_x \hat{q}_x = h(q, \hat{q}) = (f_{\hat{q}}(q, \hat{q}))^{-1}, \quad (62)$$

где $h(q, \hat{q})$ — полином второй степени по q и $\hat{q}$ такой, что $r(q) = 2hh_{\hat{q}\hat{q}} - h_{\hat{q}}^2$. Лагранжиан цепочки (50) легко определяется:

$$L = \sum_n f(q_{n-1}, q_n) q_{n,x}, \quad f(q, \hat{q}) = \frac{2}{\sqrt{r(q)}} \operatorname{arctg} \frac{h_{\hat{q}}(q, \hat{q})}{\sqrt{r(q)}}. \quad (63)$$

3.5. Уравнения типа Савады–Котера. В общем случае $L = D^3 + uD + v$ уравнение Лакса

$$\begin{aligned} L_t &= [A, L], \quad A = D^5 + aD^3 + bD^2 + cD + \hat{c}, \\ 3a &= 5u, \quad 3b = 5(u_x + v), \quad 9c = 10u_{xx} + 5u^2 + 15v_x, \quad 9\hat{c} = 10(v_{xx} + uv), \end{aligned}$$

приводит к следующей паре уравнений для коэффициентов оператора L :

$$9u_t + u_{xxxxx} + 5D \left(uu_{xx} + 3u_x v + \frac{1}{3}u^3 - 3v^2 \right) = 0, \quad (64)$$

$$9v_t + v_{xxxxx} + 5D(uv_{xx} + 2u_{xx}v + 2u_x v_x - 3vv_x + u^2 v) = 0. \quad (65)$$

Легко проверить, что эта система допускает редукции

$$v = 0, \quad v = u_x, \quad 2v = u_x, \quad (66)$$

сводящие ее к скалярному эволюционному уравнению пятого порядка. Все эти редукции сводятся простыми дифференциальными подстановками (см. ниже) к одному и тому же уравнению

$$9f_t + D(f_{xxxx} + f^5) = 5D(f_{xx}f_x + f^2 f_{xx} + f f_x^2). \quad (67)$$

Здесь $f = (\ln \psi)_x$, и в нередуцированном виде это уравнение совпадает с уравнением

$$\psi_t = A\psi \Leftrightarrow 9\psi_t = (6v - 3u_x + 9\lambda)\psi_{xx} + (u_{xx} - u^2 - 3v_x)\psi_x + (v_{xx} + 4uv + 6\lambda u)\psi.$$

Заметим, что в случае уравнения Буссинеска

$$L_y = [D^2 + a, L] \Rightarrow \phi_{yy} + \frac{1}{3}\phi_{xxx} + 2\phi_{xx}\phi_y = 2\phi_x^2\phi_{xx}, \quad \phi = \ln \psi.$$

Последнее уравнение для $\phi = \ln \psi$ естественно рассматривать как модифицированное уравнение Буссинеска. В рассматриваемом случае, т.е. для оператора A пятого порядка, в качестве дополнительной к $\phi = \ln \psi$ динамической переменной можно выбрать u . Исключив в уравнении $\psi_t = A\psi$ функцию v при помощи уравнения (ср. (9))

$$f_{xx} + 3ff_x + f^3 + uf + v = \lambda, \quad f = \phi_x, \quad (68)$$

получаем одно из уравнений системы

$$9\phi_t + f_{xxx} + 6f^5 + 15(f_x f_{xx} + f f_x^2 + f^3 f_x) + 5(uf_x)_x + 15uf f_x + 10uf^3 + 5u^2 f = 15\lambda g, \quad (69)$$

где

$$f = \phi_x, \quad g = \phi_y = f_x + f^2 + \frac{2}{3}u. \quad (70)$$

В качестве второго уравнения модифицированной системы может служить уравнение (64) после исключения v при помощи (68).

Рассмотрим редукции цепочки (10) с дополнительными условиями

$$q_{3n} = q_{3n+l}, \quad l = 1, 2,$$

связанные, как будет показано ниже, с условиями (66). Напомним, что в переменных f , $u = 3z$ уравнения цепочки записываются следующим образом:

$$(z_{j-1} + z_j + z_{j+1})_x - 3f_{j-1}z_{j-1} + 3f_j z_{j+1} - f_{j-1}^3 + f_j^3 = \alpha_j. \quad (71)$$

При изучении указанных редукций, как мы увидим, полезно использовать также пару переменных f, g , указанных в (70). Точнее, в силу уравнений цепочки (10) выполняются соотношения

$$\begin{aligned} g_j &= f_j^2 + z_j + z_{j+1}, & f_{j,x} &= z_{j+1} - z_j \Rightarrow v_{j+1} = v_j + \frac{3}{2}D(g_j + f_{j,x}), \\ u_{j+1} &= u_j + 3Df_j, \end{aligned} \quad (72)$$

указывающие связь переменных f, g с законами сохранения цепочки. Отметим, наконец, что в силу определений (72) при всех j должны выполняться уравнения

$$(f_j + f_{j+1})_x = f_j^2 - f_{j+1}^2 + g_{j+1} - g_j. \quad (73)$$

При $l = 1$ и $f_{3n} = \mu_{3n} = 0$ мы имеем $v_{3n} = 0$ в силу (68) и уравнения цепочки (71) сводятся к системе трех уравнений для $f_1, f_2, g, \hat{g}$:

$$g_x + f_1 g = \alpha_1, \quad \hat{g}_x - f_2 \hat{g} = \alpha_3, \quad g + \hat{g} = \gamma, \quad (74)$$

где $f_k = f_{3n+k}$ и

$$g = g_1 + z_1 = f_1^2 + 2z_1 + z_2, \quad \hat{g} = g_2 + z_3 = f_2^2 + 2z_3 + z_2, \quad \gamma_x = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0.$$

Из уравнений (74), (73) следует, что

$$\begin{aligned} \gamma f_1 &= f \hat{g} + \alpha, & \gamma f_2 &= f g - \alpha, & f &= f_1 + f_2, & \alpha &= \alpha_1 + \alpha_3, \\ 2f_x &= f(f_1 - f_2) + \hat{g} - g, & \hat{g} - g &= 2 \frac{\gamma f_x - \alpha f}{f^2 + \gamma}. \end{aligned}$$

При $|\alpha| + |\gamma| \neq 0$ решение цепочки вырождается.

При $\alpha = \gamma = 0$ находим, что $\hat{g} = g = 0$,

$$2(f_1 + f_2)_x = f_1^2 - f_2^2, \quad v_0 = v_3 = 0, \quad v_1 = u_{1,x}, \quad v_2 = \frac{1}{2}u_{2,x}.$$

При этом с помощью соотношений

$$u_2 = 3z_2 = -2f_{2,x} - f_2^2, \quad u_3 = 3z_3 = f_{2,x} - f_2^2$$

и подстановки $u = -2f_x - f^2$ в уравнение (69) получаем (67). Несложно проверить также, что эта дифференциальная подстановка переводит решения уравнения (67) в решения уравнения Каупа–Купершмидта

$$u_t = u_{xxxxx} + 5D \left(uu_{xx} + \frac{3}{4}u_x^2 + \frac{1}{3}u^3 \right), \quad (75)$$

соответствующего редукции $v = u_x/2$ в системе уравнений (64), (65). Аналогично вторая дифференциальная подстановка $u = f_x - f^2$ переводит решения уравнения (67) в решения уравнения Савады–Котера

$$u_t = u_{xxxxx} + 5(uu_{xx})_x + 5u^2u_x, \quad (76)$$

соответствующего редукции $v = 0$ в системе уравнений (64), (65). Оставшаяся редукция $v = u_x$ соответствует $j = 1$. При этом

$$u_1 = 3z_1 = -f_{1,x} - f_1^2$$

и функция $f = -f_1$ является решением уравнения (67).

Описанный выше набор дифференциальных подстановок эквивалентен преобразованию Дарбу

$$L = D^3 + \frac{1}{2}Du + \frac{1}{2}uD = (D + f)D(D - f) \rightarrow \hat{L} = (D - f)(D + f)D = D^3 + \hat{u}D, \quad (77)$$

где u – решение уравнения Савады–Котера, а $\hat{u}$ – решение уравнения Каупа–Купершмидта.

В случае $l = 2$ при $f_{3n} + f_{3n+1} = \mu_{3n} + \mu_{3n+1} = 0$ находим, что

$$v_1 = \frac{3}{2}z_{1,x}, \quad v_4 = \frac{3}{2}z_{4,x},$$

и четыре уравнения с $j = 3n, \dots, 3n + 3$ образуют замкнутую систему уравнений

$$\begin{aligned} f_{1,xx} + 3f_1z_2 + f_1^3 + \frac{3}{2}z_{1,x} &= \mu_1, \\ f_{2,xx} + 3f_2z_3 + f_2^3 - 3f_1g_1 - 3f_1z_2 &= \mu_2 - 3\mu_1, \\ f_{3,xx} + 3f_3z_3 + f_3^3 - \frac{3}{2}z_{4,x} &= \mu_3 \end{aligned}$$

вместе с первым интегралом

$$g_1 + g_2 + g_3 = \gamma. \quad (78)$$

Отметим, что первое и третье из уравнений этой системы можно переписать в виде

$$g_x + 2f_1g = 2\mu_1, \quad \hat{g}_x - 2f_3\hat{g} = -2\mu_3, \quad g = g_1 + z_2, \quad \hat{g} = g_3 + z_3,$$

а оставшееся второе уравнение дает

$$f_{xx} + \frac{3}{2}(z_1 + z_4)f = \frac{1}{2}f^3 - \frac{3}{2}f^2(f_1 + f_3) + 3f_1f_3 + \frac{3}{2}f_x(f_1 - f_3) + \frac{3}{2}\gamma f_2 + \alpha_3 - \alpha_2.$$

После преобразований это уравнение принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} f_{xx} + \frac{3}{2}(z_1 + z_4)f + \frac{1}{4}f^3 + \frac{3}{4}\frac{\gamma^2 - f_x^2}{f} &= \\ = \frac{3}{4}f \left[\left(f_2 + \frac{\gamma}{f} \right)^2 - \left(f_3 - f_1 + \frac{f_x}{f} \right)^2 \right] + \alpha_3 - \alpha_2. & \quad (79) \\ 2v_1 = 3z_{1,x}, \quad 2v_4 = 3z_{4,x}, \quad g + \hat{g} + f_2^2 &= \gamma. \end{aligned}$$

В работе [15] показано, что ПБ имеет вид

$$2(q_1 - q)_{xx}(q_1 - q) + (q_1 - q)^2(q_{1,x} + q_x) - \frac{3}{2}(q_{1,x} - q_x)^2 + \frac{1}{18}(q_1 - q)^4 + \mu(q_1 - q) = 0.$$

При $\mu = 0$ оно найдено в работе [16] (см. также [17], [18]). Это ПБ соответствует, очевидно, обращению в нуль квадратной скобки в правой части (79), следующему из условия совместности.

Благодарности. Работа поддержана грантами РФФИ № 99-01-00431 и INTAS № 99-01782.

Список литературы

- [1] *А. Б. Шабат.* ТМФ. 1999. Т. 121. № 1. С. 165–176.
- [2] *А. П. Веселов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. № 2. С. 1–21.
- [3] *J. Weiss.* J. Math. Phys. 1987. V. 28. № 9. P. 2025–2039.
- [4] *Xing-Biao Hu, Hon-Wah Tam.* Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 319–327.
- [5] *A. K. Svinin.* Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 307–318.
- [6] *О. И. Богоявленский.* Опрокидывающиеся солитоны. Нелинейные интегрируемые уравнения. М.: Наука, 1991.
- [7] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
- [8] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат.* ТМФ. 1997. Т. 112. № 2. С. 179–194.
- [9] *В. Г. Марихин.* Письма в ЖЭТФ. 1997. Т. 66. С. 673–678.
- [10] *А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 2. С. 183–208.
- [11] *R. I. Yamilov.* Classification of Toda type scalar lattices. In: Proc. NEEDS'92. Eds. V. Makhankov, I. Puzynin, and O. Pashaev. Singapore: World Scientific, 1993. P. 423–431.
- [12] *В. Э. Адлер.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 48–61.
- [13] *Е. К. Склянин.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 27–34.
- [14] *V. E. Adler.* Int. Math. Research Notices. 1998. № 1. P. 1–4.
- [15] *R. Conte.* Exact solutions of nonlinear partial differential equations by singularity analysis. In: Direct and inverse methods in nonlinear evolution equations. CIME school (Cetraro, 5–12 September 1999). Ed. A. Greco. Berlin: Springer, 2000; nlin.SI/0009024.
- [16] *C. Rogers, S. Carillo.* Physica Scripta. 1987. V. 36. P. 865–869.
- [17] *M. C. Nucci.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 2897–2913.
- [18] *J. Satsuma, D. J. Kaup.* J. Phys. Soc. Japan. 1977. V. 43. P. 692–697.