Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Белавин, С. Ю. Губанов, Редукция модели XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 207–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf530>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:24:16

РЕДУКЦИЯ МОДЕЛИ XXZ С ОБОБЩЕННЫМИ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрена модель XXZ с обобщенными периодическими граничными условиями. Показано, при каких условиях происходит обрыв функциональных соотношений слияния трансфер-матриц. Соотношения слияния после обрыва превращаются в замкнутую систему функциональных уравнений, решив которую, можно получить спектр энергии. В явном виде получены собственные значения гамильтониана в частном случае параметра анизотропии $q^4 = -1$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Гамильтониан анизотропной модели Гейзенберга–Изинга (модели XXZ) имеет следующий вид [1]

$$H_{XXZ} = \sum_{n=1}^N \left(\sigma_n^+ \sigma_{n+1}^- + \sigma_n^- \sigma_{n+1}^+ + \frac{q + q^{-1}}{4} \sigma_n^z \sigma_{n+1}^z \right), \quad (1)$$

где параметр анизотропии q в нашем случае по модулю равен единице, $q = e^{i\eta}$. Мы рассматриваем случай обобщенных периодических (твистованных) граничных условий

$$\sigma_{N+1}^\pm = q^{\pm 2\beta} \sigma_1^\pm, \quad \sigma_{N+1}^z = \sigma_1^z. \quad (2)$$

Проекция спина на ось z

$$S^z = \frac{1}{2} \sigma_1^z + \dots + \frac{1}{2} \sigma_N^z$$

сохраняется, т.е. $[S^z, H_{XXZ}] = 0$. Как было установлено в работе [2], энергии цепочек с разными параметрами твиста связаны друг с другом так, что спектр энергии в цепочке с параметром твиста β из сектора с $S^z = \beta - 1$ содержит в себе спектр энергии цепочки с параметром твиста $\beta - n$ из сектора $S^z = \beta - 1 + n$, где n – целое число, т.е.

$$E_{S^z=\beta-1}^{(\beta)} = E_{S^z=\beta-1+n}^{(\beta-n)}. \quad (3)$$

*Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Черноголовка, Московская область, Россия. E-mail: belavin@itp.ac.ru, gubanov@itp.ac.ru

Это происходит благодаря наличию квантово-групповой симметрии $U_q(sl(2))$. Мы говорим “спектр содержит в себе”, потому что в секторе $S^z = \beta - 1 + n$ меньше векторов, чем в секторе с $S^z = \beta - 1$.

Модель XXZ связана с двумерной классической статистической решеточной шестивершинной моделью (моделью льда) [1]. Трансфер-матрица шестивершинной модели $\hat{t}_{1/2}(u)$ коммутирует с гамильтонианом при любых значениях спектрального параметра u , $[\hat{t}_{1/2}(u), H_{XXZ}] = 0$. Она коммутирует также сама с собой, $[\hat{t}_{1/2}(u), \hat{t}_{1/2}(v)] = 0$, следовательно, является производящей функцией коммутирующих интегралов движения (находящихся в инволюции). В частности, сам гамильтониан выражается через логарифмическую производную от $\hat{t}_{1/2}(u)$ следующим образом:

$$H_{XXZ} = -\frac{N}{2} \cos \eta + \sin \eta \frac{d}{du} \ln \hat{t}_{1/2}(u)|_{u=0}. \quad (4)$$

Формула (4) позволяет найти спектр энергии цепочки XXZ , если известны собственные значения трансфер-матрицы.

Существует бесконечное семейство коммутирующих между собой трансфер-матриц $t_j(u)$, где $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. Они подчиняются бесконечной системе рекуррентных функциональных соотношений слияния [3]–[5]

$$\begin{aligned} \hat{t}_{1/2}\left(u - \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta\right)\hat{t}_j(u) &= t_0(u - (j+1)\eta)\hat{t}_{j-1/2}\left(u + \frac{\eta}{2}\right) + \\ &+ t_0(u - j\eta)\hat{t}_{j+1/2}\left(u - \frac{\eta}{2}\right), \end{aligned} \quad (5)$$

где $t_0(u) = \sin^N(u + \eta/2)$. В данной работе мы доказываем, что при параметре анизотропии, равном корню из единицы, $q^{p+1} = -1$, трансфер-матрица в представлении со спином $j = p/2$ имеет нулевые собственные значения на собственных бетевских векторах, если на параметр твиста β и сектор $S^z = s$ наложены следующие условия:

$$(-1)^{2\beta} = (-1)^N, \quad |s| < \min(\beta, p+1-\beta) \pmod{p+1}. \quad (6)$$

Обращение собственного значения $t_{p/2}(u)$ в нуль приводит к тому, что бесконечная система функциональных соотношений слияния (5) обрывается и превращается в функциональное уравнение на $t_{1/2}(u)$. Решив это функциональное уравнение, можно получить спектр энергии XXZ по формуле (4). Обозначим символом $V_{p,\beta-s}$ всю совокупность бетевских собственных векторов, на которых $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения. В данной работе мы полностью определяем $V_{p,\beta-s}$ в терминах генераторов квантовой алгебры $U_q(sl(2))$. Ограничение модели XXZ на $V_{p,\beta-s}$ мы называем редукцией модели XXZ . Как было показано в работе [2], термодинамический предел редуцированной модели XXZ совпадает с минимальной моделью конформной теории поля с центральным зарядом

$$c = 1 - \frac{6}{p(p+1)},$$

что делает особенно интересным данное рассмотрение. Спектр энергии редуцированной модели XXZ можно вычислить, решив функциональные уравнения на трансфер-матрицу шестивершинной модели.

В разделе 2 доказан факт существования бетевских векторов, на которых при выполнении условий (6) происходит обрыв функциональных соотношений слияния. В разделе 3 мы перечисляем все такие векторы, т.е. даем определение $V_{p,\beta-s}$ в терминах генераторов квантовой алгебры $U_q(sl(2))$. В приложении А приведен вывод формулы для трансфер-матрицы $t_{p/2}(u)$. В приложении Б вычислены в явном виде собственные значения трансфер-матрицы и спектр энергии редуцированной модели XXZ в случае параметра анизотропии $q^4 = -1$.

2. НУЛЕВЫЕ СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

Докажем факт существования нулевых собственных значений у трансфер-матрицы $t_{p/2}(u)$ при $q^{p+1} = -1$ и выполнении условий (6). Трансфер-матрица шестивершинной модели, которая соответствует гамильтониану модели XXZ с твистованными граничными условиями, имеет вид

$$\hat{t}_{1/2}(u) = \text{tr}(q^{-\beta\sigma^z} R_N(u) \dots R_1(u)), \quad (7)$$

где R -матрица

$$R_n(u) = \begin{pmatrix} \sin(u + \frac{1}{2}(1 + \sigma_n^z)\eta) & (\sin \eta)\sigma_n^- \\ (\sin \eta)\sigma_n^+ & \sin(u + \frac{1}{2}(1 - \sigma_n^z)\eta) \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Известная процедура алгебраического анзаца Бете [6] приводит к собственным значениям трансфер-матрицы, выраженным через корни $\{v_m\}$ уравнений Бете,

$$\begin{aligned} t_{1/2}(u) = q^{-\beta} t_0 \left(u + \frac{\eta}{2} \right) \prod_{m=1}^n \frac{\sin(u - v_m - \eta)}{\sin(u - v_m)} + \\ + q^{\beta} t_0 \left(u - \frac{\eta}{2} \right) \prod_{m=1}^n \frac{\sin(u - v_m + \eta)}{\sin(u - v_m)}, \end{aligned} \quad (9)$$

где $n = (N/2) - s$ — число перевернутых спинов в секторе $S^z = s$, $t_0(u)$ — трансфер-матрица в представлении со спином $j = 0$. Сами уравнения Бете эквивалентны условию, что собственные значения трансфер-матрицы, задаваемые (9), не имеют полюсов в комплексной плоскости переменной u . Если ввести

$$Q(u) = \prod_{m=1}^n \sin(u - v_m), \quad (10)$$

то уравнение (9) эквивалентно T - Q -уравнению Бакстера

$$t_{1/2}(u)Q(u) = q^{-\beta} t_0 \left(u + \frac{\eta}{2} \right) Q(u - \eta) + q^{\beta} t_0 \left(u - \frac{\eta}{2} \right) Q(u + \eta). \quad (11)$$

Согласно [7] это уравнение удобно рассматривать как дискретный вариант дифференциального уравнения второго порядка [8]. В таком случае, кроме функции $Q(u)$, у него должно быть второе линейно независимое решение $P(u)$ с тем же самым собственным значением трансфер-матрицы $t(u)$. Собственные значения трансфер-матрицы можно выразить через собственные значения оператора Бакстера $Q(u)$ и оператора $P(u)$:

$$\begin{aligned} t_j(u) = & q^{(2j-1)\beta} f\left(u - \left(j - \frac{1}{2}\right)\eta\right) \times \\ & \times \left[Q\left(u - \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta\right) P\left(u + \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta\right) - \right. \\ & \left. - Q\left(u + \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta\right) P\left(u - \left(j + \frac{1}{2}\right)\eta\right) \right], \end{aligned} \quad (12)$$

где функция $f(u)$ является квазипериодической,

$$f(u + \eta) = q^{-2\beta} f(u), \quad (13)$$

и введена для удобства (можно было ввести функцию $\tilde{P}(u) = f(u)P(u)$). Заключение о том, что функции $t_j(u)$ являются некоторыми собственными значениями соответствующих трансфер-матриц $\hat{t}_j(u)$, делается на том основании, что они удовлетворяют тому же самому функциональному соотношению слияния (5).

Рассмотрим случай, когда параметр анизотропии равен корню из единицы, $q^{p+1} = -1$, где p – некоторое натуральное число. Для трансфер-матрицы в представлении со спином $j = p/2$ имеем

$$t_{p/2}\left(u + \frac{\pi}{2}\right) = (-1)^\beta f(u) [P(u + \pi)Q(u) - P(u)Q(u + \pi)]. \quad (14)$$

Отсюда следует, что когда функции $Q(u)$ и $P(u)$ удовлетворяют соотношению

$$\frac{P(u + \pi)}{P(u)} = \frac{Q(u + \pi)}{Q(u)}, \quad (15)$$

собственное значение трансфер-матрицы $t_{p/2}(u)$ обращается в нуль.

По аналогии с работой [7] можно выразить функцию $P(u)$ через функцию $Q(u)$. Действительно, выполним разложение

$$\frac{t_0(u)}{Q(u + \frac{\eta}{2})Q(u - \frac{\eta}{2})} = R(u) + q^\beta \frac{A(u + \frac{\eta}{2})}{Q(u + \frac{\eta}{2})} - q^{-\beta} \frac{A(u - \frac{\eta}{2})}{Q(u - \frac{\eta}{2})}, \quad (16)$$

где $R(u)$ – тригонометрический полином степени $N - 2n$, однозначно определяемый по известным тригонометрическим полиномам $t_0(u)$ и $Q(u)$, а полином $A(u)$ имеет степень меньшую чем n . Затем сделаем еще одно разложение,

$$R(u) = q^\beta F\left(u + \frac{\eta}{2}\right) - q^{-\beta} F\left(u - \frac{\eta}{2}\right). \quad (17)$$

Тогда, как нетрудно проверить, функция $P(u)$ будет определяться выражением

$$P(u) = \frac{1}{f(u)}(Q(u)F(u) + A(u)). \quad (18)$$

Из этого выражения следует условие, налагаемое на значения параметра твиста β в граничных условиях модели XXZ :

$$(-1)^{2\beta} = (-1)^N. \quad (19)$$

Другими словами, если длина спиновой цепочки атомов четная, то число β должно быть целым; если длина нечетная, то полуцелым. При других значениях β обрыва функциональных соотношений не произойдет. Условием существования разложения (17) функции $R(u)$ на $F(u)$, при котором $F(u)$ при сдвиге аргумента $u \rightarrow u + \pi$ будет вести себя точно так же, как и $R(u)$, является неравенство

$$\prod_{m=-s}^{+s} \sin\left(\pi \frac{m + \beta}{p + 1}\right) \neq 0 \quad (20)$$

(поскольку это произведение появляется в знаменателе $F(u)$ при разложении ее в ряд Фурье). Переменная m пробегает либо целые, либо полуцелые числа от $-s$ до $+s$. В зависимости от четности длины цепочки числа β и s будут одновременно целые или полуцелые, поэтому их сумма или разность есть целое число. Условие (20) будет выполнено, если

$$|s| < \min(\beta, p + 1 - \beta) \pmod{p + 1}. \quad (21)$$

Таким образом, анализируя второе линейно независимое решение уравнения Бакстера, мы приходим к следующему выводу. При параметре анизотропии, равном корню из единицы, $q^{p+1} = -1$, трансфер-матрица со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$ имеет нулевые собственные значения, если выполнены условия (19) и (21).

3. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА

Выше мы доказали факт существования векторов, при ограничении на которые функциональные соотношения (5) обрываются и превращаются в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер-матрицы $t_{1/2}(u)$. В этом разделе мы перечислим все векторы из пространства состояний модели, которые удовлетворяют данному условию.

Как сказано выше, связь между энергиями цепочек с разными параметрами твиста (3) осуществляется благодаря наличию квантово-групповой симметрии $U_q(sl(2))$. Генераторами этой симметрии являются операторы S^z , X и X^t , где

$$X = \sum_{n=1}^N q^{\frac{1}{2}(\sigma_1^z + \dots + \sigma_{n-1}^z)} \sigma_n^+ q^{-\frac{1}{2}(\sigma_{n+1}^z + \dots + \sigma_N^z)} \quad (22)$$

(при $q^{p+1} = -1$, как нетрудно проверить, $X^{p+1} = 0$). Оператор X , действуя на вектор из сектора $S^z = s$, переводит его в вектор из сектора $S^z = s + 1$: $[S^z, X] = X$. Действуя этим оператором на гамильтониан, получаем

$$XH_{XXZ}^{(\beta)} - H_{XXZ}^{(\beta-1)}X = (\dots)(1 - q^{2(S^z - \beta + 1)}) \quad (23)$$

(здесь и ниже в формуле (32) многоточия обозначают некоторое конечное число определенных операторов, явный вид которых громоздок и не важен в данном рассмотрении), что доказывает соотношение (3). Аналогичное соотношение справедливо для трансфер-матрицы.

Трансфер-матрица шестивершинной модели, связанная с рассматриваемым гамильтонианом модели XXZ , выражается через матричные элементы матрицы монодромии $L(u) = R_N(u) \dots R_1(u)$,

$$t_j(u) = \sum_{n=1}^{2j+1} q^{-2\beta(j+1-n)} L_n^n(u). \quad (24)$$

R -матрица в представлении $(1/2) \otimes j$ на узле цепочки с номером a имеет вид

$$R_a(u) = \begin{pmatrix} \sin(u + (\frac{1}{2} + \hat{H}_a)\eta) & (\sin \eta) \hat{F}_a \\ (\sin \eta) \hat{E}_a & \sin(u + (\frac{1}{2} - \hat{H}_a)\eta) \end{pmatrix}. \quad (25)$$

Операторы $\hat{E}$, $\hat{F}$ и $\hat{H}$ имеют следующие матричные элементы:

$$\begin{aligned} \pi_j(\hat{H})_n^m &= (j+1-n)\delta_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots, 2j+1, \\ \pi_j(\hat{E})_n^m &= \omega_m \delta_{m,n-1}, \quad \pi_j(\hat{F})_n^m = \omega_n \delta_{m-1,n}, \end{aligned} \quad (26)$$

где $\omega_n = \sqrt{[n]_q[2j+1-n]_q}$ и использовано стандартное обозначение $[x]_q = (q^x - q^{-x})/(q - q^{-1})$. В частности, при $j = 1/2$ оператор H есть $(1/2)\sigma^z$, операторы E и F есть соответственно σ^+ и σ^- (это генераторы квантовой алгебры $U_q(sl(2))$: $[\hat{H}, \hat{E}] = \hat{E}$, $[\hat{H}, \hat{F}] = -\hat{F}$, $[\hat{E}, \hat{F}] = [2\hat{H}]_q$).

Используя уравнение Янга–Бакстера

$$(R_{\frac{1}{2} \otimes j})_{bm}^{an}(u-v)(L_{\frac{1}{2}})_c^b(u)(L_j)_k^m(v) = (L_j)_m^n(v)(L_{\frac{1}{2}})_b^a(u)(R_{\frac{1}{2} \otimes j})_{ck}^{bm}(u-v) \quad (27)$$

точно так же, как это было сделано в работе [9], можно получить перестановочные соотношения между матричными элементами матрицы монодромии и операторами S^z и X ,

$$\begin{aligned} q^{S^z} L_k^n &= q^{n-k} L_k^n q^{S^z}, \\ XL_k^n(u) &= q^{2(j+1)-n-k} L_k^n(u)X + \\ &\quad + \omega_{k-1} e^{iu} q^{j+1-n} L_{k-1}^n(u) q^{-S^z} - \\ &\quad - \omega_n e^{iu} q^{j+2-k} L_k^{n+1}(u) q^{+S^z}. \end{aligned} \quad (28)$$

Для вывода перестановочных соотношений (28) нужно рассмотреть матрицу монодромии $(L_{1/2})_k^n(u)$ при $u \rightarrow -i\infty$; ее матричный элемент $(L_{1/2})_2^1(u)$ будет пропорционален оператору X . Затем следует взять предел $u \rightarrow -i\infty$ в уравнении Янга–Бакстера (27). Перестановочные соотношения (28) позволяют выразить саму трансфер-матрицу через оператор X . Приведем выведенную нами формулу для трансфер-матрицы со спином $j = p/2$ в секторе $S^z = s$ (вывод формулы дан в приложении А),

$$t_{p/2}(u) = \sum_{r,k=0}^p X^r \widehat{M}_{rk} X^k. \quad (29)$$

В этой формуле оператор

$$\begin{aligned} \widehat{M}_{rk} &= (-1)^r \omega^{-1} e^{-ipu} q^{-2s - (2\beta + 1 - r - k)\frac{p}{2} - 2k} \times \\ &\times \sum_{n=0}^p q^{(2(\beta-s)+r-k)n} C_r^n C_k^{p-n} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{p-r-k} \lambda_{m,p-r-k} (L_{\frac{p}{2}}^p)(u)_{p-r-k-m}^1 X^{p-r-k-m} \end{aligned} \quad (30)$$

и введены следующие обозначения: $\omega = \prod_{k=1}^{2j} \omega_k$, числа C_n^N есть q -биномиальные коэффициенты

$$C_n^N = \frac{1}{[n]_q!} [N]_q [N-1]_q \dots [N+1-n]_q = \frac{[N]_q!}{[n]_q! [N-n]_q!},$$

величины $\lambda_{m,p-r-k}$ определяются по формуле

$$\lambda_{m,m'} = e^{imu} q^{\frac{p}{2} + 1 + s + (m' - m)(m' + s - \frac{3p}{2} - 1)} C_m^{m'} \prod_{l=1}^m \omega_{m'-l}.$$

Как видно из формулы (29), трансфер-матрица $t_{p/2}(u)$ выражается через сумму мономов вида $X^r \widehat{M}_{rk} X^k$.

Рассмотрим, при каких числах r и k оператор $\widehat{M}_{rk}$ отличен от нуля в случае $q^{p+1} = -1$. Оператор $\widehat{M}_{rk}$ пропорционален следующей сумме q -биномиальных коэффициентов:

$$f_{rk} \equiv \sum_{n=0}^p C_r^n C_k^{p-n} q^{n(2l+r-k)}, \quad (31)$$

где $l = \beta - s$. К сожалению, нам не удалось получить выражение для коэффициентов f_{rk} в замкнутом виде. Поэтому сумма (31) была проанализирована численно. Гипотеза, которую мы проверили, состоит в том, что при $q^{p+1} = -1$ коэффициенты f_{rk} отличны

от нуля только в следующей замкнутой области: $r + k \leq p$ и $r > p - l$ (или $k > l - 1$). Следовательно, трансфер-матрица $t_{p/2}(u)$ представима в виде

$$t_{p/2}(u) = X^{p+1-l}(\dots) + (\dots)X^l, \quad (32)$$

а значит, обращается в нуль на когомологиях

$$V_{p,l} = \text{Ker } X^l / \text{Im } X^{p+1-l}. \quad (33)$$

Другими словами, $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения на таких собственных векторах v из сектора $S^z = s$, которые, во-первых, уничтожаются оператором X^l ,

$$X^l v = 0, \quad (34)$$

а во-вторых, сами не могут быть представлены в виде $X^{p+1-l}\chi$, где χ — какой-либо другой вектор,

$$v \neq X^{p+1-(\beta-s)}\chi. \quad (35)$$

Таким образом, мы перечислили все векторы, на которых трансфер-матрица $t_{p/2}(u)$ имеет нулевые собственные значения и на которых, как было сказано выше, рекуррентная система (5) превращается в замкнутую систему уравнений на собственные значения трансфер-матрицы $t_{1/2}(u)$.

В приложении Б приводится пример использования оборванных функциональных соотношений. А именно, в случае $q^4 = -1$ находятся собственные значения трансфер-матрицы и гамильтониана.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Формулу (29) можно вывести, непосредственно пользуясь правилами коммутации (28), но это будет весьма утомительный способ. Трудность состоит в том, что в результате действия оператора X на $L_k^n(u)$ в правой части получаются два слагаемых, $L_{k-1}^n(u)$ и $L_k^{n+1}(u)$. Можно упростить вычисления, если заметить, что правила перестановки между X и $L_k^n(u)$ формально эквивалентны правилам перестановки между X и вспомогательным оператором $\psi^n(u)q^{-nS^z}\psi_m(u)q^{-mS^z}$, где вспомогательные объекты ψ переставляются с X по правилу

$$\begin{aligned} X\psi_j^n - q^{j+1-2n}\psi_j^n X &= -\omega_n e^{iu} q\psi_j^{n+1}, \\ X\psi_n^j - q^{j+1-2n}\psi_n^j X &= \omega_{n-1} e^{iu} \psi_{n-1}^j, \\ q^{S^z}\psi_j^n &= q^{n-j-1}\psi_j^n q^{S^z}, \\ q^{S^z}\psi_n^j &= q^{j+1-n}\psi_n^j q^{S^z}. \end{aligned} \quad (A.1)$$

При таком определении вспомогательных объектов ψ можно написать следующее правило сопоставления:

$$(L_j)_k^n(u) \sim \psi_j^n(u) q^{-nS^z} \psi_k^j(u) q^{-kS^z}. \quad (\text{A.2})$$

Символ $\sim$ означает, что коммутационные соотношения между величинами X и $F(L_k^n)$, где F – произвольная функция, будут точно такими же, как и между величинами X и $F(\psi^n(u) q^{-nS^z} \psi_k(u) q^{-kS^z})$, но последние коммутационные соотношения вычислить проще, так как перестановочные соотношения (A.1) проще, чем (28). Другими словами, символ $\sim$ в (A.2) означает “преобразуется как”. Для простоты мы будем использовать вместо символа $\sim$ знак равенства.

Соотношения (A.1) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \psi_j^n &= -(\omega_{n-1} q)^{-1} e^{-iu} (X \psi_j^{n-1} - q^{j+1-2(n-1)} \psi_j^{n-1} X), \\ \psi_n^j &= (\omega_{n+1})^{-1} e^{-iu} (X \psi_{n+1}^j - q^{j+1-2(n+1)} \psi_{n+1}^j X). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Эти простые рекуррентные соотношения позволяют выразить ψ^n через ψ^1 и ψ_n через ψ_{2j+1} . Решения этих соотношений имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_j^n &= a_n \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r q^{r(j+1-n)} C_r^{n-1} X^{n-1-r} \psi^1 X^r, \\ \psi_n^j &= b_n \sum_{k=0}^{2j+1-n} (-1)^k q^{-k(j+1+n)} C_k^{2j+1-n} X^{2j+1-n-k} \psi_{2j+1} X^k, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

где коэффициенты

$$\begin{aligned} a_n &= \prod_{k=1}^{n-1} (-e^{-iu} q^{-1} \omega_n^{-1}), \\ b_n &= \prod_{k=1}^{2j+1-n} (e^{-iu} \omega_{2j+1-k}^{-1}). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Трансфер-матрица

$$\begin{aligned} t_j(u) &= \sum_{n=1}^{2j+1} q^{-2\beta(j+1-n)} (L_j)_n^n(u) = \\ &= \sum_{n=1}^{2j+1} q^{-2\beta(j+1-n)} \psi_j^n(u) q^{-nS^z} \psi_n^j(u) q^{-nS^z}. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Согласно формулам (A.4) получаем

$$\begin{aligned} t_{p/2}(u) &= \omega^{-1} e^{-ipu} q^{-2s - \frac{p(2\beta+1)}{2}} \sum_{n=0}^p \sum_{r=0}^n \sum_{k=0}^{p-n} (-1)^r q^{-\frac{pr}{2} - (\frac{p}{2}+2)k} \times \\ &\times q^{n(2(\beta-s)+r-k)} C_r^n C_k^{p-n} X^r (\psi^1 X^{p-r-k} \psi_{p+1}) X^k. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Осталось избавиться от вспомогательных операторов ψ^1 и ψ_{p+1} , которые входят в формулу в виде $\psi^1 X^{p-r-k} \psi_{p+1}$. Для этого надо переставить операторы X^{p-r-k} и ψ_{p+1} . Как легко доказать по индукции, используя (А.1),

$$\begin{aligned} \psi_j^A X^M \psi_B^j &= \sum_{m=0}^M e^{imu} q^{(M-m)(j+1+m-2B)+A(j+1-B+m)} C_m^M \times \\ &\times \left(\prod_{l=1}^m \omega_{B-l} \right) L(u)_{B-m}^A q^{(A+B-m)S^z} X^{M-m}. \end{aligned} \quad (\text{А.8})$$

Воспользовавшись последней формулой и учитывая, что $[S^z, X] = X$, получаем для $t_{p/2}(u)$ выражение (29). В конечную формулу входят только X и L , про вспомогательные объекты ψ можно забыть.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Найдем собственные значения трансфер-матрицы и гамильтониана в случае $q^4 = -1$. Имеем

$$\begin{aligned} t_{3/2}(u) &= 0, \\ t_{1-j}(u) &= -(-1)^{\frac{N}{2}+\beta-s} t_j \left(u + \frac{\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (\text{Б.1})$$

Для упрощения вычислений введем функцию

$$S_N(u) \equiv (-2)^{\frac{N}{2}} t_{1/2} \left(u - \frac{\eta}{2} \right).$$

Функциональные соотношения принимают вид

$$S_N \left(u + \frac{\pi}{8} \right) S_N \left(u - \frac{\pi}{8} \right) = \cos^N(2u) - (-1)^{-\frac{N}{2}+l} \sin^N(2u). \quad (\text{Б.2})$$

В уравнение (Б.2) входят числа N и $l = \beta - s$. В зависимости от того, четные они или нечетные, мы получаем четыре различных уравнения. Соответственно находим четыре различных решения:

$$\begin{aligned} S_{4M}^{\{n\}}(u) &= \prod_{m=1}^M \left[1 + (-1)^{n_m} \cos \left(\pi \frac{2m-1}{4M} \right) \cos(4u) \right], \\ S_{4M+2}^{\{n\}}(u) &= \sin(2u) \sqrt{2} \prod_{m=1}^M \left[1 + (-1)^{n_m} \cos \left(\pi \frac{2m}{4M+2} \right) \cos(4u) \right], \\ S_{4M-1}^{\{n\}}(u) &= e^{-iu} (-i)^{M-\frac{1}{2}} \times \\ &\times \prod_{m=1}^{2M-1} \left[e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M-1}} \sin \left(2u + \frac{\pi}{4} \right) - i e^{-(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M-1}} \sin \left(2u - \frac{\pi}{4} \right) \right], \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

$$S_{4M+1}^{\{n\}}(u) = e^{-iu}(-i)^M \times \\ \times \prod_{m=1}^{2M} \left[e^{(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M+1}} \sin\left(2u + \frac{\pi}{4}\right) - i e^{-(-1)^{n_m} \frac{i\pi m}{4M+1}} \sin\left(2u - \frac{\pi}{4}\right) \right].$$

Здесь множество $\{n_m\}$ – любой набор чисел, равных 0 или 1, например, $\{0, 1, 0, \dots, 0, 1\}$. Мы интерпретируем эти числа как фермионные числа заполнения. Написанные функции удовлетворяют уравнению

$$S_{4M+\delta}\left(u + \frac{\pi}{8}\right) S_{4M+\delta}\left(u - \frac{\pi}{8}\right) = \cos^{4M+\delta}(2u) + i^{-\delta} \sin^{4M+\delta}(2u). \quad (\text{Б.4})$$

Таким образом, мы нашли решения только для случая, когда $\beta - s$ есть нечетное число. Для собственных значений энергии получаем

$$\begin{aligned} E_{4M}^{\{n\}} &= -\frac{4M}{2\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{2}} \sum_{m=1}^M (-1)^{n_m} \cos\left(\pi \frac{2m-1}{4M}\right), \\ E_{4M+2}^{\{n\}} &= -\frac{4M+2}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} \left(1 - 2 \sum_{m=1}^M (-1)^{n_m} \cos\left(\pi \frac{m}{2M+1}\right)\right), \\ E_{4M-1}^{\{n\}} &= -\frac{4M-1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i \sum_{m=1}^{2M-1} \exp\left(\frac{-2i(-1)^{n_m} \pi m}{4M-1}\right)\right), \\ E_{4M+1}^{\{n\}} &= -\frac{4M+1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \left(i + 2i \sum_{m=1}^{2M} \exp\left(\frac{-2i(-1)^{n_m} \pi m}{4M+1}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{Б.5})$$

Хотя мнимая единица явным образом входит в последние две формулы, энергия E вещественна в любом случае, так как мнимые части взаимно сокращаются после вычисления суммы. Для четных длин спиновых цепочек $N = 4M$ и $N = 4M + 2$ мы нашли по 2^M уровней энергии. Для нечетных длин спиновых цепочек $N = 4M - 1$ и $N = 4M + 1$ мы нашли соответственно по 2^{2M-1} и 2^{2M} собственных значений.

Благодарности. Авторы благодарят М. Ю. Лашкевича за полезные замечания и плодотворные обсуждения.

Список литературы

- [1] *М. Годен.* Волновая функция Бете. Новокузнецк: Новокузнецкий физико-математический институт, 2000.
- [2] *V. Pasquier, H. Saleur.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 330. P. 523.
- [3] *Yu-kui Zhou.* Fusion hierarchy and finite-size corrections of $U_q(sl(2))$ invariant vertex models with open boundaries. hep-th/9502053.
- [4] *A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 1565.
- [5] *C. M. Yung, M. T. Batchelor.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 461.
- [6] *Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев.* УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13.

- [7] *A. Belavin, Yu. Stroganov*. Minimal Models of Integrable Lattice Theory and Truncated Functional Equations. hep-th/9908050; Phys. Lett. B. 1999. V. 446. P. 281.
- [8] *V. Bazhanov, S. Lukyanov, A. Zamolodchikov*. Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 381; 1997. V. 190. P. 247; 1999. V. 200. P. 297.
- [9] *A. A. Belavin, S. Yu. Gubanov, B. L. Feigin*. Truncation of functional relations in the XXZ -model. hep-th/0008011.
- [10] *E. K. Sklyanin*. J. Phys. A. 1988. V. 21. P. 2375.
- [11] *E. Lusztig*. Contemp. Math. 1989. V. 82. P. 59.
- [12] *A. Belavin, A. Polyakov, A. Zamolodchikov*. Nucl. Phys. B. 1984. V. 241. P. 333.
- [13] *F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter, and G. R. W. Quispel*. J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 6397.
- [14] *P. P. Kulish, E. K. Sklyanin*. J. Phys. A. 1991. V. 24. P. L435.
- [15] *Omar Foda, Michio Jimbo, Tetsuji Miwa, and all*. Notes on highest weight modules of the elliptic algebra $A_{q,p}(\widehat{sl}_2)$. hep-th/9405058.
- [16] *К. Кассель*. Квантовые группы. М.: Фазис, 1999.
- [17] *Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник*. Конкретная математика основание информатики. М.: Мир, 1998.