Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова, Регулярные представления обобщенной алгебры Гейзенберга, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 219–226

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 17:45:18

© 2001 г.

Ю. С. Вернов*, М. Н. Мнацаканова†

РЕГУЛЯРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ АЛГЕБРЫ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Исследованы общие свойства регулярных неприводимых представлений обобщенной алгебры Гейзенберга в произвольном невырожденном слабо замкнутом пространстве с индефинитной метрикой.

Алгебра Гейзенберга, иными словами алгебра канонических коммутационных соотношений (ККС), лежит в основе квантовой теории. Поэтому исследованию представлений этой алгебры посвящено множество работ, начиная с классических результатов Шредингера, Вейля, фон Неймана. Обзор основных результатов дан в работе [1], § 4. Большинство работ посвящено изучению регулярных представлений алгебры Гейзенберга, а именно представлений, для которых ККС могут быть записаны как в стандартной, так и в вейлевской форме (при этом соответствующие группы должны быть непрерывны). Условие регулярности может быть сформулировано и непосредственно для обычных ККС – это условия Реллиха–Диксмье [2]. Согласно теореме фон Неймана каждое неприводимое регулярное представление алгебры Гейзенберга унитарно эквивалентно представлению Шредингера.

Напомним, что в этом представлении ККС $[a, a^+] = 1$ реализованы операторами

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q + \frac{d}{dq} \right), \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(q - \frac{d}{dq} \right)$$

в пространстве $L_2(-\infty, \infty)$.

Ниже под алгеброй Гейзенберга мы будем понимать эту алгебру в случае одной степени свободы, поскольку случай произвольного, но конечного числа степеней свободы требует лишь очевидного обобщения.

В работах [3], [4] исследовались также более общие классы представлений ККС.

Как известно, ковариантное описание калибровочных полей требует введения пространства с индефинитной метрикой [5]–[7]. В работе [8] были найдены представления алгебры Гейзенберга в пространстве с индефинитной метрикой и сформулирован новый

---

* Институт ядерных исследований РАН, Москва, Россия. E-mail: vernov@ms2.inr.ac.ru

† Научно-исследовательский институт ядерной физики Московского государственного университета, Москва, Россия. E-mail: mnatsak@theory.sinp.msu.ru

критерий регулярности, эквивалентный условиям Реллиха–Диксмье в случае гильбертова пространства, но пригодный также и для пространства с индефинитной метрикой.

В последние годы широко изучались более общие алгебры, чем алгебра Гейзенберга, а именно ее q - и R -деформации (см. работы [9]–[14] и ссылки в них). Регулярные представления этих алгебр в пространстве с индефинитной метрикой были изучены в [15]–[17].

Как сама алгебра Гейзенберга, так и ее q - и R -деформации являются частными случаями более общей алгебры, которую мы называем обобщенной алгеброй Гейзенберга. Эта алгебра была введена в [18], а в [16], [17] рассматривались некоторые ее свойства в связи с описанием представлений q - и R -деформированных алгебр Гейзенберга.

Настоящая работа посвящена рассмотрению общих свойств обобщенной алгебры Гейзенберга в случае одной степени свободы.

Дадим определение рассматриваемой алгебры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Оператор a и сопряженный ему относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$, в общем случае индефинитного, оператор a^+ порождают обобщенную алгебру Гейзенберга, если существует самосопряженный оператор N , удовлетворяющий условиям

$$Na = a(N - 1), \quad Na^+ = a^+(N + 1), \quad (1)$$

$$a^+a = \varphi(N), \quad aa^+ = \varphi_1(N), \quad (2)$$

где $\varphi(N)$ и $\varphi_1(N)$ – некоторые функции.

Мы будем рассматривать представления этой алгебры в невырожденном замкнутом пространстве J , которое может быть как банаховым, так и пространством, замкнутым в слабом смысле. Последнее означает, что если при $n \rightarrow \infty$ скалярное произведение $\langle x_n, y \rangle$ имеет предел для любого $y \in J$, то существует элемент $x \in J$ такой, что $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

Отметим, что если функции $\varphi(N)$ и $\varphi_1(N)$ таковы, что из условия (1) следует

$$\varphi(N)a = a\varphi(N - 1), \quad \varphi_1(N)a = a\varphi_1(N - 1), \quad (3)$$

то

$$\varphi_1(N) = \varphi(N + 1). \quad (4)$$

Действительно,

$$aa^+a = \varphi_1(N)a = \varphi(N + 1)a.$$

В случае алгебры Гейзенберга $\varphi(N) = N$. Если представление рассматриваемой алгебры регулярно, то условие (3) всегда выполнено.

Подчеркнем, что в общем случае операторы a и a^+ являются неограниченными. (Для алгебры Гейзенберга см. доказательство в работе [1], с. 2.) Поэтому обобщенная алгебра Гейзенберга определена не во всем пространстве J , а на некотором линейном множестве $D(A)$, плотном в слабом или сильном смысле, называемом областью определения A . Для простоты мы будем говорить, что A определена в области $D(A)$.

Перейдем к определению регулярных представлений. Это можно сделать двумя эквивалентными способами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Неприводимое представление обобщенной алгебры Гейзенберга регулярно, если оператор N имеет собственный вектор

$$N\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda. \quad (5)$$

ψ_λ является циклическим вектором этого представления, которое строится следующим образом. Образует цепочки векторов $\psi_{\lambda+n} = (a^+)^n \psi_\lambda$ и $\psi_{\lambda-n} = a^n \psi_\lambda$ (всюду $n, m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$). Согласно условию (1) каждый вектор из этих цепочек является собственным вектором оператора N :

$$N\psi_{\lambda+n} = (\lambda + n)\psi_{\lambda+n}, \quad N\psi_{\lambda-n} = (\lambda - n)\psi_{\lambda-n}. \quad (6)$$

Векторы $\psi_{\lambda+k}$ образуют полный набор собственных векторов оператора N , принадлежащих данному неприводимому представлению. Действительно,

$$\begin{aligned} a\psi_{\lambda+n} &= aa^+\psi_{\lambda+n-1} = \varphi(\lambda + n)\psi_{\lambda+n-1}, \\ a^+\psi_{\lambda-n} &= a^+a\psi_{\lambda-n+1} = \varphi(\lambda - n + 1)\psi_{\lambda-n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Следовательно, действие произвольного монома $M(a^n, a^{+m})$, содержащего n операторов a и m операторов a^+ , на ψ_λ пропорционально $\psi_{\lambda+m-n}$:

$$M(a^n, a^{+m})\psi_\lambda \sim \psi_{\lambda+m-n}.$$

Далее, очевидно, что

$$P_n(a, a^+)\psi_\lambda = \sum C_k \psi_{\lambda+k}, \quad (8)$$

где $P_n(a, a^+)$ – произвольный полином от a и a^+ .

Некоторые шаги в исследовании обобщенной алгебры Гейзенберга могут быть сделаны независимо от конкретного вида функции $\varphi(N)$.

Построим сначала пространство J , исходя из пространства конечных линейных комбинаций $\psi_{\lambda+k}$, которое мы обозначим J_0 . Очевидно, что $J_0 \in D(A)$ для любой функции $\varphi(N)$.

Пространство J замкнуто, следовательно, $J = \bar{J}_0$, однако замыкание $\bar{J}_0$ не является единственным, так как оно определяется топологией, заданной на J_0 . Рассматриваемые представления во всех этих пространствах естественно считать эквивалентными, т.к. все они содержат плотную относительно слабой или сильной топологии область J_0 (см. обсуждение подобных проблем в работе [8]). Таким образом, мы можем ограничиться естественным замыканием, для построения которого используется исходное индефинитное скалярное произведение.

Подчеркнем, что N не имеет нейтральных собственных векторов, т.к. J и, следовательно, J_0 – невырожденные пространства. Итак, мы можем построить векторы

$$e_k = \frac{\psi_{\lambda+k}}{|\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle|^{\frac{1}{2}}},$$

которые удовлетворяют условиям

$$\langle e_k, e_l \rangle = \delta_{kl} \delta_k, \quad \delta_k = \pm 1.$$

Разделяя множество e_k на множества положительных e_k^+ и отрицательных e_k^- векторов, мы можем представить J_0 в виде

$$J_0 = J_0^+ \oplus J_0^-, \quad J_0^+ \perp J_0^-. \quad (9)$$

Таким образом,

$$x = x^+ + x^-, \quad x^\pm = \sum_k C_k^\pm e_k^\pm, \quad x^\pm \in J_0^\pm. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь пространство всех бесконечных линейных комбинаций e_k таких, что $|\langle x, x \rangle| < \infty$, $x = \sum_{k=0}^\infty C_k e_k$. Это пространство содержит все векторы $x^\pm = \sum_k C_k^\pm e_k^\pm$, удовлетворяющие условию

$$\sum_{k=0}^\infty |C_k^\pm|^2 < \infty. \quad (11)$$

Условие (11) является достаточным для существования $\langle x, x \rangle$.

Но это условие является также необходимым, т.к. рассматриваемое пространство содержит векторы $x^+ - x^-$, так же как и $x^+ + x^-$, и, следовательно, оно содержит векторы $x^\pm$. Таким образом, это естественное замыкание определяется как

$$\bar{J}_0 = \bar{J}_0^+ \oplus \bar{J}_0^-. \quad (12)$$

Рассматриваемая алгебра A определена в плотной области $D(A)$, конкретный вид которой зависит от свойств функции $\varphi(N)$.

Покажем, что если функция $\varphi(N)$ задана, то произвольное неприводимое регулярное представление полностью определяется спектром N . Это значит, что если R и R' являются представлениями рассматриваемой алгебры и $\text{Sp } N = \text{Sp } N'$, $\varphi(N) = \varphi'(N')$, $\langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \langle \psi'_\lambda, \psi'_\lambda \rangle$, то существует унитарный оператор V такой, что $a' = V a V^+$, $(a')^+ = V a^+ V^+$.

Достаточно показать, что все скалярные произведения $\langle \psi_{\lambda+k}, \psi_{\lambda+k} \rangle$ полностью определены функцией $\varphi(N)$, если λ фиксирована.

Действительно, в соответствии с равенствами (7)

$$\langle \psi_{\lambda+n}, \psi_{\lambda+n} \rangle = \langle \psi_{\lambda+n-1}, a a^+ \psi_{\lambda+n-1} \rangle = \varphi(\lambda+n) \langle \psi_{\lambda+n-1}, \psi_{\lambda+n-1} \rangle, \quad (13)$$

$$\langle \psi_{\lambda-n}, \psi_{\lambda-n} \rangle = \langle \psi_{\lambda-n+1}, a^+ a \psi_{\lambda-n+1} \rangle = \varphi(\lambda-n+1) \langle \psi_{\lambda-n+1}, \psi_{\lambda-n+1} \rangle. \quad (14)$$

Из соотношений (13) и (14) непосредственно следует, что

$$\langle \psi_{\lambda+n}, \psi_{\lambda+n} \rangle = \varphi(\lambda+n) \varphi(\lambda+n-1) \dots \varphi(\lambda+1) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle, \quad (15)$$

$$\langle \psi_{\lambda-n}, \psi_{\lambda-n} \rangle = \varphi(\lambda-n+1) \varphi(\lambda-n+2) \dots \varphi(\lambda) \langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle. \quad (16)$$

Так как $\langle \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \langle \psi'_\lambda, \psi'_\lambda \rangle$, то $\langle x', y' \rangle = \langle x, y \rangle$, если

$$x = \sum_{k=l_1}^{l_2} C_k \psi_{\lambda+k}, \quad x' = \sum_{k=l_1}^{l_2} C_k \psi'_{\lambda+k}, \quad y = \sum_{k=m_1}^{m_2} \tilde{C}_k \psi_{\lambda+k}, \quad y' = \sum_{k=m_1}^{m_2} \tilde{C}_k \psi'_{\lambda+k},$$

$$l_1, l_2, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}.$$

Таким образом, мы доказали унитарную эквивалентность R и R' в J_0 и J'_0 и, следовательно, в J и J' .

Покажем теперь, что в произвольном регулярном представлении существует оператор $U(s) \equiv e^{isN}$, $s \in \mathbb{R}$, обладающий следующими свойствами:

$$\begin{aligned} U(s)U(t) &= U(s+t), \\ U(s) &\rightarrow \mathbb{I} \quad \text{при } s \rightarrow 0, \quad U(0) = \mathbb{I}, \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{U(s) - \mathbb{I}}{s} \psi &= iN\psi, \quad \text{если } \psi \in D(N) \end{aligned} \quad (17)$$

($\mathbb{I}$ – единичный оператор). Для того чтобы убедиться в этом, достаточно определить оператор $U(s)$ на векторах базиса:

$$U(s)\psi_{\lambda+k} = e^{is(\lambda+k)}\psi_{\lambda+k}. \quad (18)$$

Первое условие в (17) проверяется непосредственно. Более того, легко видеть, что оператор $U(s)$ ограничен. Действительно,

$$U(s) \sum C_k \psi_{\lambda+k} = \sum C'_k \psi_{\lambda+k}, \quad C'_k = e^{is(\lambda+k)} C_k.$$

Докажем последнее из свойств (17). Заметим, что для произвольного $\psi \in J_0$ наше утверждение сразу вытекает из равенства (18). Так как $U(s)$ – ограниченный оператор, утверждение остается справедливым всегда, когда существует вектор $N\psi$, т.е. если $\psi \in D(N)$. Из соотношения (18) следует, что

$$U(2\pi k) = e^{i2\pi k\lambda}. \quad (19)$$

Легко проверить равенства

$$U(s)a = e^{-is}aU(s), \quad U(s)a^+ = e^{is}a^+U(s). \quad (20)$$

Следовательно,

$$[U(2\pi k), a] = [U(2\pi k), a^+] = 0. \quad (21)$$

Заметим, что можно найти собственный вектор N , действуя операторами $W_k(2\pi)$ на произвольный вектор ψ , где

$$W_k(s) = \int_0^s e^{-iks'} V(s') ds', \quad V(s) = e^{-i\lambda s} U(s). \quad (22)$$

Действительно,

$$W_k(2\pi)\psi = 2\pi C_k \psi_{\lambda+k}, \quad \psi = \sum_l C_l \psi_{\lambda+l}. \quad (23)$$

Мы показали существование оператора $U(s)$ в произвольном регулярном представлении.

Докажем теперь, что и наоборот, существование оператора $U(s)$ означает, что у оператора N есть собственный вектор. Таким образом, мы можем дать следующее определение регулярного представления обобщенной алгебры Гейзенберга:

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Представление обобщенной алгебры Гейзенберга называется регулярным, если существует оператор $U(s)$, удовлетворяющий условиям (17).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Достаточно предположить, что условия (17) выполнены в некоторой области D , инвариантной относительно действия операторов $U(s)$, $s \in \mathbb{R}$.

Отметим сначала, что оператор $U(s)$ унитарен, т.к. оператор N самосопряжен. Действительно, из условий (17) вытекает, что

$$\frac{d}{ds}U(s) = iNU(s), \quad (24)$$

следовательно,

$$\frac{d}{ds}\langle U(s)\psi, U(s)\psi \rangle = 0 \quad \forall \psi. \quad (25)$$

Далее, соотношения (20) по-прежнему справедливы, т.к. они вытекают из равенств

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(U(s)aU(-s)) &= iU(s)[N, a]U(-s) = -iU(s)aU(-s), \\ \frac{d}{ds}(U(s)a^+U(-s)) &= iU(s)[N, a^+]U(-s) = iU(s)a^+U(-s). \end{aligned}$$

Таким образом, для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ оператор $U(2\pi k)$ коммутирует с a и a^+ . Поэтому $U(2\pi k) = C_k \mathbb{I}$ для неприводимых представлений. Детальное обсуждение этих вопросов можно найти в работе [8].

Так как $U(s)$ – унитарный оператор, то

$$U(2\pi) = e^{i2\pi\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}. \quad (26)$$

Соотношение (26) эквивалентно (19).

Мы можем построить собственный вектор N , как и выше, с помощью оператора $W_k(2\pi)$ (см. формулу (22)). Действительно, для любого $\psi \in D$ вектор $\psi_k = W_k(2\pi)\psi$ либо является собственным вектором $V(s)$ при произвольном s , либо $\psi_k = 0$:

$$V(s)\psi_k = \int_0^{2\pi} e^{-iks'} V(s+s')\psi ds' = e^{iks} \int_s^{2\pi+s} e^{-iks'} V(s')\psi ds' = e^{iks}\psi_k$$

($V(2\pi) = \mathbb{I}$ в соответствии с (26)).

Для доказательства (4) осталось перейти к пределу $s \rightarrow 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Существование оператора $W_k(s)$ обусловлено полнотой пространства J . Достаточно, чтобы J было полным относительно слабой топологии [8]. Если J – банахово пространство, то $W_k(s)$ существует, т.к.

$$|V(s' + \Delta) - V(s')| < \epsilon(\Delta)$$

для любого $s' \in (0, s)$. Действительно, в противном случае должна существовать последовательность s_n , $s_n \rightarrow \tilde{s}$, $n \rightarrow \infty$, $\tilde{s} \in (0, s)$, такая, что $V(s_n) \not\rightarrow V(\tilde{s})$, а это противоречит непрерывности $V(s)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Для любого $\psi \in D$ существует k_0 такое, что $\psi_{k_0} \neq 0$. Этот вывод следует из невырожденности пространства J . Если для произвольного $k \in \mathbb{Z}$ $\psi_k = 0$, то для любого вектора Φ выполняется соотношение

$$\int_0^{2\pi} e^{-iks} T(s) ds = 0,$$

где $T(s) = \langle \Phi, V(s)\Psi \rangle$. $T(s)$ – периодическая функция ($T(2\pi) = T(0)$), все коэффициенты ряда Фурье которой равны нулю. Поэтому $T(s) = 0$ для любого s и $\Psi \perp \Phi$ для любого Φ , откуда следует, что $\Psi = 0$.

Отметим, что собственные векторы оператора N могут принадлежать не множеству D , а только его замыканию $\overline{D}$. В этом случае D – множество быстро сходящихся бесконечных последовательностей $\sum C_k \psi_{\lambda+k}$. В случае алгебры Гейзенберга C_k удовлетворяют условию: $C_k k^n \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$ для любого n .

Имея ψ_λ , мы можем построить полный набор собственных векторов оператора N , соответствующих неприводимому представлению, для которого ψ_λ является циклическим вектором.

В заключение перечислим все виды регулярных неприводимых представлений рассматриваемой алгебры.

1. *Спектр, ограниченный снизу.* В этом случае существует такое число n , что $\varphi(\lambda - n) = 0$ и, в соответствии с формулой (16), $\langle \psi_{\lambda-n-1}, \psi_{\lambda-n-1} \rangle = 0$. Как мы уже отмечали, вследствие невырожденности J у оператора N нет нейтральных векторов и поэтому $\psi_{\lambda-n-1} = 0$. Если $\text{Sp } N$ не ограничен сверху, то

$$\text{Sp } N = \lambda - n + m.$$

Так как рассматриваемое представление неприводимо, каждый собственный вектор оператора N можно считать циклическим. Из нашего рассмотрения непосредственно следует, что начиная с любого собственного вектора N , мы придем к тому же самому множеству собственных векторов N и, следовательно, к тому же самому пространству J_0 . Более того, мы можем начать с любого $x \in J_0$. Поэтому такое представление будет неприводимым по построению. В качестве циклического вектора удобно выбрать вектор $\psi_{\lambda-n}$. Мы можем определить такие представления как фоковские представления, так как

$$\psi_{\lambda-n-1} = a\psi_{\lambda-n} = 0. \quad (27)$$

2. *Спектр, ограниченный сверху.* В этом случае $\psi_{\lambda+m+1} = 0$ для некоторого m , что означает

$$a^+ \psi_{\lambda+m} = 0, \quad (28)$$

в согласии с соотношением (15). Естественно назвать этот случай антифоковским.

Можно считать $\psi_{\lambda+m}$ циклическим вектором. Очевидно, что $\text{Sp } N = \lambda + m - n$.

3. *Конечный спектр.* В этом случае соотношения (27) и (28) выполняются одновременно и $\text{Sp } N = \lambda - n, \lambda - n + 1, \dots, \lambda + m$. Такого вида $\text{Sp } N$ не существует в алгебре Гейзенберга, но он возможен в ее q - и R -деформациях.

4. **Неограниченный спектр.** В этом случае $\varphi(\lambda+k) \neq 0$ для любого k , следовательно, $a\psi_{\lambda+k} \neq 0$, $a^+\psi_{\lambda+k} \neq 0$.

Итак, мы видим, что рассмотрение определенной обобщенной алгебры Гейзенберга сводится к изучению свойств соответствующей функции $\varphi(\lambda+k)$.

Список литературы

- [1] *C. R. Putnam.* Commutation Properties of Hilbert Space Operators and Related Topics. Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1967.
- [2] *F. Rellich.* Nach. Akad. Wiss. Gött. Math. –Phys. Klasse. 1946. P. 107; *J. Dixmier.* Comp. Math. 1958. V. 13. P. 263.
- [3] *F. Acerbi, G. Morchio, F. Strocchi.* Infrared singular fields and non-regular representations of CCR algebras. Preprint SISSA 39/92/FM, 1992; Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. P. 1.
- [4] *K. Schmüdgen.* J. Funct. Analysis. 1983. V. 50. P. 8; Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1983. V. 19. P. 601.
- [5] *F. Strocchi and A. S. Wightman.* J. Math. Phys. 1974. V. 15. P. 2198.
- [6] *G. Morchio and F. Strocchi.* Ann. Inst. Henri Poincaré. 1980. V. 33. P. 251.
- [7] *F. Strocchi.* Selected Topics on the General Properties of Quantum Field Theory. Singapore: World Scientific, 1993.
- [8] *M. Mnatsakanova, G. Morchio, F. Strocchi, and Yu. Vernov.* J. Math. Phys. 1998. V. 29. P. 2969.
- [9] *L. D. Faddeev.* Integrable models in $(1+1)$ -dimensional quantum field theory. In: Recent Advances in Field Theory and Statistical Mechanics. Les Houches, session XXXIX. Eds. J.-B. Zuber and R. Stora. Amsterdam: Elsevier, 1984. P. 563.
- [10] *P. P. Kulish and E. K. Sklyanin.* Quantum spectral transform method. Recent developments. In: Integrable Quantum Field Theory. Proc. of the Symp. held at Tvaerminne, Finland, 23–27 March, 1981. Lect. Notes Phys. V. 151. Eds. J. Hietarinta and C. Montonen. Berlin: Springer, 1982. P. 61.
- [11] *M. Chaichian and P. P. Kulish.* Phys. Lett. B. 1990. V. 234. P. 72.
- [12] *P. P. Kulish and E. V. Damaskinsky.* J. Phys. A. 1990. V. 23. P. L415; *И. И. Кулиш.* ТМФ. 1991. Т. 86. С. 8.
- [13] *M. S. Plyushchay.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 491. P. 619.
- [14] *M. S. Plyushchay.* Mod. Phys. Lett. A. 1996. V. 11. P. 2953.
- [15] *M. Chaichian, M. N. Mnatsakanova, and Yu. S. Vernov.* Analogue of the von Neumann's theorem of the q-oscillator algebra. In: Proc. of the XV Workshop "Problems on High Energy Physics and Field Theory", Protvino, 1992. Eds. A. P. Samokhin and G. L. Rcheulishvili. Protvino: IHEP, 1995. P. 126.
- [16] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова.* ТМФ. 1997. Т. 113. С. 355.
- [17] *Ю. С. Вернов, М. Н. Мнацаканова.* ТМФ. 2000. Т. 125. С. 272.
- [18] *M. N. Mnatsakanova, G. Morchio, and Yu. S. Vernov.* Canonical commutation relations in a positive and an indefinite metric spaces. In: Quarks-96 (Proc. 9th Int. seminar, Yaroslavl, Russia, May 5–11, 1996). V. 2. Eds. V. A. Matveev, A. A. Penin, V. A. Rubakov, and A. N. Tavkhelidze. Moscow: Inst. Nucl. Res., Russ. Acad. Sci, 1997. P. 51.