Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. де Вит, А. В. Маршаков, Электромагнитная дуальность и уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 230–238

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf533>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 13:48:34

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ДУАЛЬНОСТЬ И УРАВНЕНИЯ ВИТТЕНА–ДИЙКГРААФА–ВЕРЛИНДЕ–ВЕРЛИНДЕ

Рассматриваются уравнения ассоциативности (или уравнения Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде) в той форме, в которой они появляются в теории Виттена–Зайберга. Доказано, что эти уравнения ковариантны относительно общих преобразований электромагнитной дуальности. Обсуждаются следствия этой ковариантности с различных точек зрения.

1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразования дуальности играют важную роль в современной теоретической физике. В теории Виттена–Зайберга [1] электромагнитная дуальность является основным руководящим принципом для получения точного вида эффективного низкоэнергетического действия (см. недавний обзор и библиографию по этой теме в работе [2]). Тем самым дуальность является важным средством для изучения непертурбативной физики, и любой действительно непертурбативный результат не должен противоречить электромагнитной дуальности.

Основываясь на электромагнитной дуальности, теория Виттена–Зайберга позволяет определить голоморфную функцию $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, в терминах которой формулируется низкоэнергетическое эффективное действие. Вектор $\mathbf{a}$ является вектором комплексных скалярных полей, принимающих значения в алгебре Картана калибровочной группы, а функция $\mathcal{F}$ является препотенциалом соответствующей специальной кэлеровой геометрии. Конструкция Виттена–Зайберга содержит вспомогательную комплексную кривую, модули комплексной структуры которой являются функциями на некотором спе-

*Institute for Theoretical Physics and Spinoza Institute, Utrecht University, Utrecht, The Netherlands. E-mail: bdewit@phys.uu.nl

†Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Институт теоретической и экспериментальной физики, Москва, Россия. E-mail: mars@lpi.ru, andrei@heron.itep.ru

специальном кэлеровом многообразии¹⁾, так что компоненты вектора $\mathbf{a}$ играют роль локальных координат. Эта конструкция наиболее адекватно описывается на языке интегрируемой системы [3], отождествляющей функцию $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ с логарифмом тау-функции так называемой квазиклассической иерархии или универсальной иерархии Уизема [4], которая тем самым удовлетворяет некоторой системе нетривиальных дифференциальных уравнений (подробности этого соответствия и библиографию по данному вопросу можно найти, например, в книге [5]).

Одним из наиболее загадочных примеров этих уравнений является система уравнений ассоциативности, или уравнений Виттена–Дийкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ), изначально обнаруженных в контексте двумерных топологических теорий [6]. В работе [7] было установлено, что функция $\mathcal{F}(\mathbf{a})$, отвечающая точному решению чистой калибровочной теории Янга–Миллса с группой $SU(N)$ [8], удовлетворяет системе уравнений ассоциативности

$$\mathcal{F}_i \cdot \mathcal{F}_j^{-1} \cdot \mathcal{F}_k = \mathcal{F}_k \cdot \mathcal{F}_j^{-1} \cdot \mathcal{F}_i \quad \forall i, j, k, \quad (1)$$

записанной в терминах матриц $\|\mathcal{F}_i\|_{jk} \equiv \mathcal{F}_{ijk}$, матричные элементы которых являются третьими производными функции $\mathcal{F}(\mathbf{a})$,

$$\mathcal{F}_{ijk} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j \partial a_k}. \quad (2)$$

В дальнейшем было показано, что система уравнений (1) выполняется для всех известных решений Виттена–Зайберга, связанных с гиперэллиптическими спектральными кривыми [9]²⁾ (определенный прогресс в негиперэллиптическом случае был достигнут в недавней работе [11]). Важной составляющей этого результата является то, что величины $\mathcal{F}_{ijk}$ определяют структурные константы алгебры, построенной из голоморфных дифференциалов на соответствующей комплексной кривой. Поскольку низкоэнергетическое эффективное действие правильным образом преобразуется при действии группы электромагнитной дуальности, уравнения ВДВВ (1) должны быть также согласованы с этими преобразованиями дуальности.

Необходимо сразу подчеркнуть существенное различие между специальной кэлеровой метрикой, выражающейся через вторые производные функции $\mathcal{F}$, и так называемой метрикой топологической теории [6], являющейся линейной комбинацией третьих производных $\mathcal{F}$. Представляется очевидным, что “топологическая метрика” не имеет

¹⁾Строго говоря, термин *специальная геометрия* отвечает кэлеровой геометрии для случая локальной $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории, взаимодействующей с супергравитацией Пуанкаре. В случае глобальной суперсимметрии иногда применяют термин *глобальная специальная геометрия*. Ниже мы не будем делать различия между этими двумя терминами.

²⁾В работе [9] было также показано, что уравнения (1) не выполняются для препотенциала $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ мягко нарушенной $\mathcal{N} = 4$ теории Виттена–Зайберга, и этот факт до сих пор до конца не понят (см., впрочем, по этому поводу [10]).

никакого смысла в контексте теории Виттена–Зайберга, а (неголоморфная) специальная кэлерова метрика не имеет прямого отношения к уравнениям ВДВВ. В уравнениях (1) матрица $\|\mathcal{F}_j\|^{-1}$ выполняет роль (обратной) голоморфной метрики $\mathcal{F}_j$, однако $\|\mathcal{F}_j\|^{-1}$ может быть легко заменена на обратную матрицу любой линейной комбинации матриц $\mathcal{F}_j$ (линейная комбинация обратных матриц $\|\mathcal{F}_j\|^{-1}$ не имеет смысла обратной метрики). Таким образом, роль метрики не является очевидной в контексте уравнений ВДВВ (1).

В данной работе мы демонстрируем, что уравнения ВДВВ (1) ковариантны относительно общих преобразований электромагнитной дуальности³⁾. Более точно, мы докажем, что если голоморфная функция $\mathcal{F}$ является решением уравнений ВДВВ, то *дуальный* препотенциал тоже является решением тех же самых уравнений. Технически доказательство очень простое и не ограничивается случаем препотенциалов Виттена–Зайберга; его можно провести для любого решения уравнений ВДВВ, а значит, для любой тау-функции иерархии Уизема и допустимого для этой тау-функции класса преобразований дуальности. В разделе 2 мы предлагаем краткий обзор основных фактов, касающихся уравнения ассоциативности, и вводим дуальную голоморфную функцию для преобразования электромагнитной дуальности, меняющего местами электрические и магнитные заряды. В разделе 3 мы докажем, что и в случае преобразований дуальности общего вида дуальная функция также удовлетворяет уравнениям ВДВВ. Раздел 4 посвящен обсуждению результатов и некоторым выводам.

2. УРАВНЕНИЯ ВДВВ ДЛЯ ДУАЛЬНОГО ПРЕПОТЕНЦИАЛА

В теории Виттена–Зайберга вторые производные функции $\mathcal{F}(\mathbf{a})$ являются матричными элементами матрицы периодов соответствующей вспомогательной комплексной кривой:

$$T_{ij} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j}. \quad (3)$$

Мнимая часть матрицы периодов является кэлеровой метрикой, как следует непосредственно из выражения для кэлерова потенциала:

$$K(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = \text{Im} \sum_i \bar{a}_i \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}. \quad (4)$$

Производные матричных элементов матрицы периодов, $\partial T_{ij} / \partial a_k = \mathcal{F}_{ijk}$, являются тем самым полностью симметричными голоморфными тензорами, которые непосредственно входят в уравнения ВДВВ (1). Мы будем считать, что матрицы $\|\mathcal{F}_i\|$, а также их линейные комбинации общего вида невырождены. В отличие от двумерных топологических

³⁾Впервые ковариантность уравнений ВДВВ относительно преобразований электромагнитной дуальности была отмечена в работе [12]. Кроме того, ограниченный класс преобразований дуальности рассматривался в работе [13], впрочем результаты этой работы не вполне согласуются с частным случаем приведенных ниже формул.

теорий, где всегда одну из линейных комбинаций матриц $\|\mathcal{F}_i\|$ из (1) можно выбрать постоянной [6], [14], в случае теории Виттена–Зайберга это сделать, вообще говоря, нельзя.

Обратимся теперь к преобразованиям электромагнитной дуальности

$$a_i \rightarrow a_i^D = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}, \quad a_i^D \rightarrow -a_i = \frac{\partial \mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D)}{\partial a_i^D} \quad (5)$$

с дуальной функцией $\mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D)$. Как хорошо известно, эти формулы можно переписать в виде преобразования Лежандра

$$\mathcal{F}^D(\mathbf{a}^D) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) - \sum_i a_i a_i^D. \quad (6)$$

В качестве очевидного следствия имеем

$$\frac{\partial a_i^D}{\partial a_j} = \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial a_i \partial a_j} = T_{ij}, \quad \frac{\partial a_i}{\partial a_j^D} = -\frac{\partial^2 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D} = -T_{ij}^D, \quad (7)$$

так что дуальная матрица периодов T_{ij}^D является с точностью до знака обратной к изначальной матрице периодов (3), т. е.

$$\sum_j T_{ij}^D T_{jk} = -\delta_{ik}. \quad (8)$$

Рассмотрим теперь величины

$$\|\mathcal{F}_i^D\|_{jk} \equiv \mathcal{F}_{ijk}^D = -\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial a_k^D} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D \partial a_k^D}. \quad (9)$$

Непосредственным вычислением получаем⁴⁾

$$\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial a_k^D} = \sum_{l,m,n} T_{il}^D \frac{\partial T_{mn}}{\partial a_l} T_{nj}^D \frac{\partial a_l}{\partial a_k^D}. \quad (10)$$

Следовательно, третьи производные $\mathcal{F}_{ijk}$ преобразуются при этом как третьи производные функции при соответствующей (линейной) репараметризации:

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}^D}{\partial a_i^D \partial a_j^D \partial a_k^D} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_l \partial a_m \partial a_n} \frac{\partial a_i}{\partial a_l^D} \frac{\partial a_j}{\partial a_m^D} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^D}, \quad (11)$$

⁴⁾ Отметим также возникающее попутно изящное соотношение

$$\frac{\partial T_{ij}^D}{\partial T_{kl}} = T_{ik}^D T_{lj}^D.$$

или в более компактной матричной форме

$$\|\mathcal{F}_i^{\mathbf{D}}\| = \sum_j \frac{\partial a_i}{\partial a_j^{\mathbf{D}}} \|T^{\mathbf{D}} \cdot \mathcal{F}_j \cdot T^{\mathbf{D}}\|. \quad (12)$$

Из рассмотрения этих формул становится очевидно, что уравнения (1) выполняются и для дуальной функции $\mathcal{F}^{\mathbf{D}}(\mathbf{a}^{\mathbf{D}})$, так как

$$\mathcal{F}_i^{\mathbf{D}} \cdot (\mathcal{F}_j^{\mathbf{D}})^{-1} \cdot \mathcal{F}_k^{\mathbf{D}} - (i \leftrightarrow k) = \sum_{l,m,n} \frac{\partial a_i}{\partial a_m^{\mathbf{D}}} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^{\mathbf{D}}} \frac{\partial a_j^{\mathbf{D}}}{\partial a_l} [\mathcal{F}_m \cdot \mathcal{F}_l^{-1} \cdot \mathcal{F}_n - (m \leftrightarrow n)] = 0, \quad (13)$$

где в правой части мы использовали соотношения (1) для всех индексов l, m, n .

3. ОБЩИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДУАЛЬНОСТИ

Та же самая логика непосредственно переносится на случай обобщенной электромагнитной дуальности, преобразования которой образуют арифметическую подгруппу в $Sp(2r, \mathbb{R})$ и обобщают преобразования дуальности, задаваемые формулами (5); буквой r мы обозначили ранг калибровочной группы. На пертурбативном уровне группа преобразований дуальности становится непрерывной. Обсуждаемые в работе свойства ковариантности верны как для дискретных, так и для непрерывных групп, уравнения ВДВВ ковариантны даже для преобразований из $Sp(2r, \mathbb{C})$.

В дуальном базисе (который для общих преобразований дуальности мы будем обозначать индексом S) мы переходим к новым переменным $\mathbf{a}^{\mathbf{S}}$ и новой функции $\mathcal{F}^{\mathbf{S}}(\mathbf{a}^{\mathbf{S}})$ с помощью формул [15], [16]

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^{\mathbf{S}} &= U \cdot \mathbf{a} + Z \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right), \\ \left(\frac{\partial \mathcal{F}^{\mathbf{S}}}{\partial \mathbf{a}^{\mathbf{S}}} \right) &= V \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right) + W \cdot \mathbf{a}, \end{aligned} \quad (14)$$

где матрицы U, V, W, Z (размера $r \times r$) можно объединить в матрицу из группы $Sp(2r, \mathbb{Z})$, если выполняются соотношения

$$\begin{aligned} U^t \cdot V - Z^t \cdot W &= V \cdot U^t - W \cdot Z^t = 1, \\ U^t \cdot W &= W^t \cdot U, \quad Z^t \cdot V = V^t \cdot Z. \end{aligned} \quad (15)$$

Обобщение формулы (6) на общий случай имеет вид

$$\mathcal{F}^{\mathbf{S}}(\mathbf{a}^{\mathbf{S}}) = \mathcal{F}(\mathbf{a}) + \frac{1}{2} \mathbf{a}^t \cdot U^t \cdot W \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}^t \cdot W^t \cdot Z \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right)^t \cdot Z^t \cdot V \cdot \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \mathbf{a}} \right). \quad (16)$$

Отметим, что эта формула является (частичным) преобразованием Лежандра только в случае, когда $U^t \cdot W = Z^t \cdot V = 0$.

Пользуясь этими формулами, легко показать, что матрица периодов, как и раньше, определяемая формулами (3), и ее дуальный аналог в общем случае

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}^S}{\partial a_i^S \partial a_j^S} = T_{ij}^S \quad (17)$$

связаны соотношением

$$T^S = (V \cdot T + W) \cdot S^{-1}(T). \quad (18)$$

Специальная кэлерова метрика, построенная по кэлерову потенциалу (4),

$$G_{\bar{i}j} = \frac{\partial^2 K(\mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})}{\partial \bar{a}_i \partial a_j} = \text{Im } T_{ij}, \quad (19)$$

преобразуется согласно формуле

$$G^S = [S^\dagger]^{-1}(\bar{T}) \cdot G \cdot S^{-1}(T). \quad (20)$$

В этих формулах мы ввели матрицу $S(T)$, определенную соотношением

$$S_{ij}(T) = \frac{\partial a_i^S}{\partial a_j} = \|U + Z \cdot T\|_{ij}. \quad (21)$$

Продemonстрируем теперь, что *третьи* производные функций $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ связаны соотношением вида (11), т.е.

$$\mathcal{F}_{ijk}^S = \sum_{l,m,n} \mathcal{F}_{lmn} (S^{-1})_{li} (S^{-1})_{mj} (S^{-1})_{nk}, \quad (22)$$

или

$$\frac{\partial^3 \mathcal{F}^S}{\partial a_i^S \partial a_j^S \partial a_k^S} = \sum_{l,m,n} \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial a_l \partial a_m \partial a_n} \frac{\partial a_i}{\partial a_l^S} \frac{\partial a_j}{\partial a_m^S} \frac{\partial a_k}{\partial a_n^S}. \quad (23)$$

Этот результат известен [16], но мы кратко продемонстрируем, как он получается. Сначала можно показать, что

$$\delta T^S = (V - (V \cdot T + W) \cdot S^{-1} \cdot Z) \cdot \delta T \cdot S^{-1} = (S^t)^{-1} \cdot \delta T \cdot S^{-1}. \quad (24)$$

Формула (24) непосредственно следует из уравнений (18), (21) и (15). Аналогично можно показать, что $S^{-1}(T) \cdot Z$ является симметричной матрицей.

Заменяя в формуле (24) вариацию общего вида на производные по компонентам вектора $\mathbf{a}^S$ и используя соотношение $\mathcal{F}_{ijk} = \partial T_{ij} / \partial a_k$ вместе с формулой (21), можно сразу доказать формулу (22) в общем случае. Далее, следуя тем же рассуждениям, что и в разделе 2, мы приходим к выводу, что уравнения ВДВВ (1) остаются ковариантными относительно *общих* преобразований дуальности (18), т.е. функция $\mathcal{F}^S(\mathbf{a}^S)$ удовлетворяет уравнениям

$$\mathcal{F}_i^S \cdot (\mathcal{F}_j^S)^{-1} \cdot \mathcal{F}_k^S = \mathcal{F}_k^S \cdot (\mathcal{F}_j^S)^{-1} \cdot \mathcal{F}_i^S, \quad (25)$$

если изначальная функция $\mathcal{F}$ являлась решением уравнений ВДВВ. Положив в общих формулах $U = V = 0$ и $Z = -W = 1$, легко проверить, что из них воспроизводятся все результаты предыдущего раздела.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Согласно концепции электромагнитной дуальности две дуальные голоморфные функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ описывают одну и ту же геометрию и находятся в одном и том же классе эквивалентности. Мы уже отмечали, что эта дуальность является тем самым основой теории Виттена–Зайберга. Следовательно, можно утверждать, что физически значимые результаты, если они выражаются в терминах функции $\mathcal{F}$, должны одинаково выполняться для всех представителей класса эквивалентности. В частности, функции $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}^S$ должны одновременно удовлетворять одним и тем же соотношениям. Поэтому можно заключить, что уравнения ассоциативности должны выполняться для всех представителей данного класса эквивалентности. В настоящей работе мы показали, что уравнения ассоциативности (1) просто ковариантны относительно общих преобразований дуальности.

Следует заметить, что варианты уравнений ассоциативности в теории Виттена–Зайберга, отличные от уравнений (1), также приводились в литературе (см., в частности, работу [17]). Некорректность этих вариантов сразу следует из отсутствия ковариантности их относительно преобразований электромагнитной дуальности. Поэтому неудивительно, что уравнения ВДВВ в этих вариантах были опровергнуты и из других соображений.

Понятие метрики в том виде, в котором оно появляется в контексте уравнений ассоциативности, продолжает вызывать вопросы. Мы уже отмечали, что специальная кэлера метрика не имеет ничего общего с “метрикой”, введенной в контексте двумерных топологических теорий, где изначально были обнаружены уравнения ВДВВ. Последняя метрика связана с третьими производными функции $\mathcal{F}$ и для случая двумерной топологической теории может быть выбрана постоянной. Заметим, однако, что условие постоянства метрики, вообще говоря, *не* сохраняется при преобразованиях дуальности, или тем самым преобразования дуальности выводят за класс топологических решений в смысле работы [14]. Другая же (специальная кэлера) метрика выражается через вторые производные и при дуальности преобразуется не голоморфно (см. формулу (20)). В отличие от топологической и специальной кэлера метрик, метрика, возникающая в уравнениях ассоциативности (1), очевидно, непостоянна и голоморфна. Мы считаем чрезвычайно важным отметить этот момент.

Результат этой работы выходит за рамки теории Виттена–Зайберга, так как он применим ко всем случаям, в которых выполняются уравнения ВДВВ, независимо от того, можно ли привести физические аргументы в пользу существования электромагнитной дуальности для того или иного решения. Напомним, что все решения Виттена–Зайберга описываются в терминах интегрируемых систем, так что функция $\mathcal{F}$ является тау-функцией универсальной иерархии Уизема (ограниченной на конечный набор переменных). Однако, насколько известно в настоящий момент, далеко не все тау-функции отвечают решениям Виттена–Зайберга, но тем не менее являются решениями уравнений ВДВВ (1). Таким образом, применяя преобразование дуальности к некоторой тау-функции, мы получим другую тау-функцию, удовлетворяющую уравне-

ниям ВДВВ даже при отсутствии изначальных аргументов о том, что преобразования дуальности устанавливают некоторые классы эквивалентности для этих тау-функций. Частный случай преобразований дуальности, когда $U^t \cdot W = Z^t \cdot V = 0$, а формула (16) принимает вид (частичного) преобразования Лежандра, может иметь особый смысл в контексте иерархий уиземовского типа.

Еще один круг вопросов касается связи между уравнениями ВДВВ в теории Виттена–Зайберга с геометрией пространств модулей римановых поверхностей и интегрируемыми системами. Безусловно, дуальные матрицы периодов неразличимы с точки зрения геометрии комплексных кривых. С этой точки зрения они эквивалентны, и эквивалентность уравнений ассоциативности является следствием этого факта. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [14], [18]), что когда две разные функции $F(\mathbf{a})$ и $\tilde{F}(\tilde{\mathbf{a}})$ связаны соотношениями

$$\frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} = \frac{\partial^2 \tilde{F}}{\partial \tilde{a}_i \partial \tilde{a}_j} \quad (26)$$

и мы знаем, что одна из них, скажем $F(\mathbf{a})$, является решением уравнений ВДВВ, тогда другая функция $\tilde{F}(\tilde{\mathbf{a}})$ тривиально удовлетворяет тому же уравнению. В данной работе мы распространили это соотношение эквивалентности на случай функций, вторые производные которых (т.е. матрицы периодов) связаны преобразованиями дуальности. Заметим при этом, что несмотря на то что эти две функции представляют одну и ту же геометрию, принадлежат к одному и тому же классу эквивалентности и являются одновременно решениями уравнений ВДВВ, они будут, вообще говоря, совершенно различными функциями своих аргументов.

Благодарности. Авторы благодарны Су-Джон Рею за гостеприимство в Центре теоретической физики Национального университета Сеула, где эта работа была закончена. А.М. также благодарен Г. Брадону за многочисленные обсуждения возможной связи между специальной кэлеровой геометрией и уравнениями ассоциативности, а также А. Забродину и А. Миронову за обсуждение возможной роли дуальности в контексте иерархий Уизема. Работа была выполнена при поддержке гранта INTAS № 99-1-590. Работа А.М. была также частично поддержана грантом РФФИ № 00-02-16477, грантом CRDF № RP1-2102(6531) и программой поддержки научных школ РФФИ № 00-15-96566.

Список литературы

- [1] *N. Seiberg, E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1994. V. 426. P. 19; hep-th/9407087; Nucl. Phys. B. 1994. V. 431. P. 484; hep-th/9408099.
- [2] *B. de Wit.* Electric-magnetic Dualities in Supergravity. Proc. Thirty Years of Supersymmetry (October 2000). To appear in Nucl. Phys. Proc. Suppl.; hep-th/0103086.
- [3] *A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1995. V. 355. P. 466; hep-th/9505035.
- [4] *I. Krichever.* Commun. Pure Appl. Math. 1994. V. 47. P. 437; hep-th/9205110.
- [5] *A. Marshakov.* Seiberg–Witten Theory and Integrable Systems. Singapore: World Scientific, 1999.

- [6] *E. Witten.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281; *R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde.* Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59.
- [7] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1996. V. 389. P. 43; hep-th/9607109.
- [8] *A. Klemm, W. Lerche, S. Theisen, S. Yankielowicz.* Phys. Lett. B. 1995. V. 344. P. 169; hep-th/9411048; hep-th/9412158; *P. Argyres, A. Faraggi.* Phys. Rev. Lett. 1995. V. 73. P. 3931; hep-th/9411057.
- [9] *A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov.* Int. J. Mod. Phys. A. 2000. V. 15. P. 1157; hep-th/9701123.
- [10] *A. Marshakov.* Associativity equations in effective SUSY quantum field theories. hep-th/0108023.
- [11] *L. K. Hoveaars, P. H. M. Kerstenn, R. Martini.* Phys. Lett. B. 2001. V. 503. P. 189; hep-th/0012133.
- [12] *B. de Wit, B. Kleijn, S. Vandoren.* Fortschr. Phys. 1999. V. 47. P. 317; hep-th/9801039.
- [13] *Y. Ohta.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 6042; hep-th/9905126.
- [14] *B. Dubrovin.* Geometry of 2D topological field theories. In: Integrable Systems and Quantum Groups (Montecatini Terme, 1993). Lect. Notes Math. V. 1620. Eds. M. Francaviglia et al. Berlin: Springer, 1996. P. 120; hep-th/9407018.
- [15] *B. de Wit, A. Van Proeyen.* Nucl. Phys. B. 1984. V. 245. P. 89; *S. Cecotti, S. Ferrara, L. Girardello.* Int. J. Mod. Phys. A. 1989. V. 4. P. 2457.
- [16] *B. de Wit, F. Vanderesypen, A. Van Proeyen.* Nucl. Phys. B. 1993. V. 400. P. 463; hep-th/9210068.
- [17] *G. Bonelli, M. Matone.* Phys. Rev. Lett. 1996. V. 77. P. 4712; hep-th/9605090.
- [18] *A. Mironov, A. Morozov.* Phys. Lett. B. 1998. V. 424. P. 48; hep-th/9712177.