Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Зотов, Ю. Б. Черняков, Интегрируемые многочастичные системы, полученные с использованием предела Иноземцева, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 258–277

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf535>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 15:25:22

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СИСТЕМЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРЕДЕЛА ИНОЗЕМЦЕВА

Предел Иноземцева (ПИ), или скейлинговый предел, известен как процедура, применяемая к эллиптической модели Калоджеро–Мозера. Она является комбинацией тригонометрического предела, бесконечного сдвига координат частиц и перенормировки констант связи. В результате этой процедуры получается экспоненциальный тип взаимодействия. Показано, что ПИ, примененный к эллиптической $sl(N, \mathbb{C})$ -модели Эйлера–Калоджеро–Мозера и эллиптической модели Годена, приводит к новым, похожим на цепочки Тоды, системам из N взаимодействующих частиц с дополнительными степенями свободы, которые соответствуют орбите коприсоединенного действия в $sl(n, \mathbb{C})$. Пределы, соответствующие полному вырождению этих орбитных степеней свободы, воспроизводят только уже известные периодические и открытые цепочки Тоды. Дана классификация систем, возникающих в ПИ для случая $sl(3, \mathbb{C})$. Эта классификация представлена на двумерной плоскости параметров, задающих бесконечные сдвиги координат частиц. Пространство разбивается на симметричные области. Комбинация потенциалов Тоды и тригонометрического потенциала Калоджеро–Сазерленда появляется в этой картинке на плоскости параметров на стенках меньших размерностей. Вследствие очевидных симметрий классификация может быть обобщена на случай произвольного числа частиц. ПИ применяется также к $sl(2, \mathbb{C})$ -эллиптической модели Годена с двумя проколотыми точками на эллиптической кривой, обсуждаются основные свойства возможных в этом случае пределов. Также рассмотрены пределы матриц Лакса.

1. ВВЕДЕНИЕ

1.1. Предел Иноземцева. Рассмотрим систему из двух взаимодействующих частиц с гамильтонианом

$$H(v, u) = v^2 + m^2 E_2(u), \quad (1)$$

где v и $-v$ — их импульсы в системе центра масс, u — разность координат, m — константа связи и $E_2(u) \equiv E_2(u, \tau)$ — функция Эйзенштейна, определенная на комплексном то-

*ИТЭФ и МФТИ, Москва, Россия. E-mail: zotov@gate.itep.ru

†ИТЭФ, Москва, Россия. E-mail: chernyakov@gate.itep.ru

ре T^2 с модулем τ . Эта функция связана с функцией Вейерштрасса: $E_2(z, \tau) = \wp(z, \tau) + 2\zeta(1/2)$.

ПИ (см. [1]–[3]) есть комбинация тригонометрического предела $\text{Im}(\tau) \rightarrow \infty$, бесконечного сдвига координат частиц и перенормировки констант связи. С помощью этой процедуры можно преобразовать гамильтониан (1) в гамильтониан

$$\overline{H} = v^2 + \overline{m}^2(e^U + e^{-U}), \quad (2)$$

записанный в сдвинутых координатах $U = u - (1/2) \text{Im}(\tau)$ и с перенормированной константой связи $\overline{m}$. Совершенно аналогично ПИ может быть применен к системе из N взаимодействующих частиц:

$$H(v_i, u_i) = \sum_{i=1}^N v_i^2 + m^2 \sum_{i \neq j}^N E_2(u_i - u_j). \quad (3)$$

Предел дает периодическую цепочку Тоды (случай открытой цепочки Тоды также возможен):

$$H(v_i, U_i) = \sum_{i=1}^N v_i^2 + 2\overline{m}^2 \sum_{\substack{i,j=i+1; \\ j=1, i=N}}^N e^{U_j - U_i}. \quad (4)$$

Таким образом, ПИ описывает связь между эллиптической системой Калоджеро–Мозера и цепочкой Тоды.

1.2. Цель работы. Целью работы является применение ПИ к различным обобщениям эллиптической модели Калоджеро–Мозера и выяснению того, какие системы появляются в пределе в зависимости от параметров предела.

Будем применять ПИ к следующим системам.

1. $sl(N, \mathbb{C})$ -эллиптическая модель Эйлера–Калоджеро–Мозера (ЭКМ):

$$L_{kl}(z, \bar{z}) = v_k \delta_{kl} - p_{kk} \delta_{kl} E_1(z) - p_{kl} (1 - \delta_{kl}) e^{2\pi i \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}}} u_{kl} \Phi(u_{kl}, z), \quad (5)$$

$$H(u_i, v_i) = \sum_{i=1}^N v_i^2 + \sum_{i \neq j} p_{ij} p_{ji} E_2(u_{ij}), \quad (6)$$

где $p_{ij} \in sl(N, \mathbb{C})$, а скобки Пуассона таковы:

$$\{v_i, u_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_{ij}, p_{kl}\} = p_{kj} \delta_{il} - p_{il} \delta_{kj}, \quad \{p_{ij}, v_k\} = 0, \quad \{p_{ij}, u_k\} = 0. \quad (7)$$

Интегрируемая система определена на факторпространстве $sl(N, \mathbb{C}) // \{\text{diag } SL(N, \mathbb{C})\}$. В данном случае оно задано условием $p_{kk} = 0$ и фиксацией калибровки (см. раздел 2). Степени свободы, связанные с $p_{ij} \in sl(N, \mathbb{C})$ на редуцированном пространстве, будем называть орбитными.

Гамильтонианы $H_{k,l}$ определяются с помощью матрицы Лакса $L_{ij}(z, \bar{z}) \in sl(N, \mathbb{C})$, $z \in T^2$:

$$\mathrm{Tr}(L^k(z, \bar{z})) = \sum_{l=0}^N E_l(z) H_{k,l},$$

где эллиптические функции $E_l(z)$ имеют асимптотику $1/z^l$ (см. приложение А).

2. Эллиптическая модель Годена (ЭГ, см. [4]):

$$(L_G)_{kl} = v_k \delta_{kl} - \sum_{a=1}^{N_0} (p_a)_{kk} \delta_{kl} E_1(z - x_a) - \\ - (1 - \delta_{kl}) \sum_{a; k \neq l} \exp \left\{ 2\pi i \frac{(z - x_a) - (\bar{z} - \bar{x}_a)}{\tau - \bar{\tau}} u_{kl} \right\} (p_a)_{kl} \Phi(u_{kl}, z - x_a), \quad (8)$$

где $(p_a)_{kl} \in sl(N, \mathbb{C})$. Скобки Пуассона имеют вид

$$\{v_i, u_j\} = \delta_{ij}, \quad \{(p_a)_{ij}, (p_b)_{kl}\} = \delta_{ab}((p_a)_{kj} \delta_{il} - (p_a)_{il} \delta_{kj}), \\ \{(p_a)_{ij}, u_k\} = 0, \quad \{(p_a)_{ij}, v_k\} = 0, \quad a = 1, \dots, N_0. \quad (9)$$

1.3. Обозначения. Для осуществления предельных переходов удобно выбрать тор T^2 в виде $\mathbb{C}/(2\omega_1\mathbb{Z} + 2\omega_2\mathbb{Z})$, $\omega_1 = -i\pi$, $\mathrm{Im}(\omega_2) = 0$, $\tau = \omega_2/\omega_1$.

Тригонометрический предел осуществляется предельным переходом $\omega_2 \rightarrow \infty$. Черта сверху используется для обозначения перенормированных величин, а функция χ — для показателей соответствующих экспонент: $m = \overline{m}e^{\chi_m \omega_2}$, $\chi_m \equiv \chi(m)$.

Сдвиги координат обозначаются так:

$$u_{ij} = U_{ij} + f_{ij}\omega_2. \quad (10)$$

1.4. Результаты. В $sl(3, \mathbb{C})$ -ЭКМ квадратичные гамильтонианы можно получить из формулы (6):

$$h_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - 2aE_2(u_{12}) - 2bE_2(u_{23}) - 2cE_2(u_{31}),$$

где $a = p_{12}p_{21}$, $b = p_{23}p_{32}$, $c = p_{31}p_{13}$ — орбитные переменные на редуцированном фазовом пространстве (последней орбитной переменной является $d = p_{12}p_{23}p_{31}$).

Выпишем всевозможные квадратичные гамильтонианы, полученные из написанного выше $h_{2,0}$ с помощью ПИ, по модулю перестановок частиц и вырождений (некоторые слагаемые этих гамильтонианов могут исчезнуть в пределе):

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - 2\bar{a}e^{-U_{12}} - 2\bar{b}e^{-U_{23}} - 2\bar{c}e^{-U_{31}}, \quad (11)$$

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - 2\bar{a}e^{U_{12}} - 2\bar{b}e^{-U_{23}} - 2\bar{c}e^{-U_{31}}, \quad (12)$$

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - 2\bar{a}(e^{-U_{12}} + e^{U_{12}}) - 2\bar{b}e^{-U_{23}} - 2\bar{c}e^{-U_{31}}, \quad (13)$$

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - \frac{1}{2}\bar{a}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{U_{12}}{2}} - 2\bar{b}e^{-U_{23}} - 2\bar{c}e^{U_{31}}, \quad (14)$$

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - \frac{1}{2}\bar{a}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{U_{12}}{2}} - 2\bar{b}(e^{-U_{23}} + e^{U_{23}}) - 2\bar{c}(e^{U_{31}} + e^{-U_{31}}), \quad (15)$$

$$\bar{h}_{2,0} = \sum_{i=1}^3 v_i^2 - \frac{1}{2}\bar{a}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{U_{12}}{2}} - \frac{1}{2}\bar{b}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{U_{23}}{2}} - \frac{1}{2}\bar{c}\frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{U_{31}}{2}}. \quad (16)$$

Первый и последний являются непосредственными обобщениями периодической цепочки Тоды и тригонометрической системы Калоджеро–Сазерленда, соответственно. Все остальные содержат необычную зависимость от координат.

Классификация представлена на рис. 1 (f_{ij} – параметры сдвигов координат $u_{ij} = U_{ij} + \omega_2 f_{ij}$ и, таким образом, $f_{ij} + f_{jk} + f_{ki} = 0$).

Рис. 1

На рис. 1 различные типы систем соответствуют симплексам различных размерностей и местоположений (по модулю перестановок a, b, c): I и III – два типа двумерных симплексов, содержащих в себе пределы к гамильтонианам (11) и (12), соответственно

(симплексы II и IV эквивалентны III с точностью до перестановок); линии $\{f_{ij} = 2\mathbb{Z}\}$ и средние линии $\{f_{ij} = 1 + 2\mathbb{Z}\}$ состоят из отрезков – одномерных симплексов и соответственно отвечают системе Сазерленда (14) и гамильтонианам (13) с членами, содержащими $\text{ch } U_{ij}$, все вершины – нульмерные симплексы и соответствуют типам гамильтонианов (15) и (16).

Рассмотрение кубического гамильтониана усложняет рис. 1, добавляя дуальную решетку (см. рис. 2 в разделе 4).

Оказывается, что итоговый рисунок (объединение рис. 1 и рис. 2) описывает классификацию возможных пределов скобок Пуассона между перенормированными орбитными переменными $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ и $\bar{d}$.

Рис. 1, 2 обладают очевидными симметриями и, следовательно, классификация может быть обобщена на случай произвольного числа частиц. В случае N взаимодействующих частиц всевозможные пределы гамильтонианов и скобок Пуассона соответствуют различным областям на $(N - 1)$ -мерной гиперповерхности переменных f_{ij} .

В модели ЭГ число возможных пределов больше, так как в этом случае диагональная часть матрицы Лакса (8) содержит зависимость от $(p_a)_{ii}$ даже на редуцированном фазовом пространстве и существуют дополнительные параметры $(x_a - x_b)$, которые также могут быть сдвинуты в пределе. Тогда итоговые гамильтонианы будут непосредственно зависеть от параметров предела (см. раздел 7).

2. СИСТЕМЫ ЭГ И $sl(N, \mathbb{C})$ -ЭКМ

Эллиптическая модель Годена является примером системы Хитчина [5] (см. также [6] и [7]) и была введена в работе [4]. Матрица Лакса этой модели дана формулой (8).

Можно ограничить алгебру (9) на многообразии

$$\sum_a (p_a)_{kk} = 0, \quad k = 1, \dots, N, \quad (17)$$

так как это соответствует фиксации момента μ_p по присоединенному действию диагональной подгруппой из $SL(N, \mathbb{C})$ на p_{kl} и тому факту, что p_{kk} коммутируют с $\text{Tr}(L(z)^n)$ относительно скобки Пуассона. При этом ограничении число переменных в $(p_a)_{kl}$ сокращается на $N - 1$. Заметим, что ограничение (17) согласовано с простым требованием на эллиптическую функцию:

$$\sum_{\text{простые полюсы}} \text{res}\{(L_G(z))_{kk}\} = 0. \quad (18)$$

Гамильтонианы являются коэффициентами в уравнении спектральной кривой

$$\det(L(z) + \mu) = 0. \quad (19)$$

Другой способ получить гамильтонианы – разложить $\text{Tr}(L^m)$ по базису функций $\{E_1(z - x_a), E_2(z - x_a), E_2'(z - x_a), \dots\}$. Тогда коэффициенты в разложении будут снова гамильтонианами (см. [4], [6]).

$sl(N, \mathbb{C})$ -ЭКМ соответствует $N_0 = 1$. В этом случае формула (17) записывается следующим образом:

$$(\mu_p)_i = p_{ii} = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (20)$$

и, следовательно, матрица Лакса имеет вид

$$(L)_{kl} = v_k \delta_{kl} - \sum_{k \neq l} e^{2\pi i \frac{z - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} u_{kl}} p_{kl} \Phi(u_{kl}, z). \quad (21)$$

Используя формулы из приложения Б, в этом случае получаем следующие гамильтонианы ($\langle \rangle$ означает след):

$$\langle L(z)^2 \rangle = H_{2,0} + H_{2,2} E_2(z), \quad (22)$$

$$\langle L(z)^3 \rangle = H_{3,0} + H_{3,2} E_2(z) + H_{3,3} E_2'(z), \quad (23)$$

$$H_{2,0} = \sum_{i,j=1}^N (v_i^2 - p_{ij} p_{ji} E_2(u_{ij})), \quad (24)$$

$$H_{2,2} = \sum_{i,j=1}^N p_{ij} p_{ji}, \quad (25)$$

$$H_{3,0} = \sum_{i,j,k=1}^N \left(v_i^3 - 3v_i p_{ij} p_{ji} E_2(u_{ij}) - p_{ij} p_{jk} p_{ki} \left[E_2(u_{ij}) E_1(u_{jk}) + E_2(u_{jk}) E_1(u_{ij}) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{2} E_1(u_{ki}) (E_2(u_{ij}) + E_2(u_{jk})) + \frac{1}{2} E_1(u_{ij} - u_{jk}) (E_2(u_{ij}) - E_2(u_{jk})) \right] \right), \quad (26)$$

$$H_{3,2} = \sum_{i,j=1}^N (3v_i p_{ij} p_{ji} + p_{ij} p_{jk} p_{ki} [E_1(u_{ij}) + E_1(u_{jk}) + E_1(u_{ki})]), \quad (27)$$

$$H_{3,3} = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N p_{ij} p_{jk} p_{ki}. \quad (28)$$

Заметим, что $H_{2,2}$ и $H_{3,3}$ — операторы Казимира алгебры (7).

Следует также заметить, что экспоненциальные множители в матрицах Лакса (5), (8) не важны для вычисления гамильтонианов, так как $u_{ij} + u_{ji} = 0$, $u_{ij} + u_{jk} + u_{ki} = 0$. Однако эти множители играют важную роль в пределах самих матриц Лакса (см. раздел 8).

3. $sl(3, \mathbb{C})$ -ЭКМ

Вычислим размерность фазового пространства $sl(N, \mathbb{C})$ -ЭКМ. В пространстве $\{p_{ij}\}$ число независимых динамических переменных равно $(N-1)(N-2)$, так как интегрируемая система определена на орбите $\{p_{ij} // \text{Diag } SL(N, \mathbb{C})\}$ с фиксированными значениями операторов Казимира, где $\text{Diag } SL(N, \mathbb{C})$ — подгруппа Картана в $SL(N, \mathbb{C})$. В пространстве $(u, v) \in T^* \text{ Bun}_{G, \Sigma}$ число таких переменных $2(N-1)$. В итоге получаем,

что размерность фазового пространства равна $N(N-1)$, т.е. $\dim(sl(3, \mathbb{C})\text{-ЭКМ}) = 6$, что согласуется с существованием трех интегралов движения в этом случае: $H_{2,0}$, $H_{3,0}$, $H_{3,2}$.

Орбита $\{p_{ij} // \text{Diag } SL(N, \mathbb{C})\}$ задается связями $p_{ii} = 0$ и фиксацией коприсоединенного действия подгруппой Картана. Тем не менее явная фиксация коприсоединенного действия (так же как и фиксация операторов Казимира) может оказаться неудобной. Поэтому в случае рассмотрения величин, инвариантных относительно такого действия, будем лишь предполагать некоторый выбор калибровки, не задавая его непосредственно.

Скобки между недиагональными переменными в случае $N = 3$, $N_0 = 1$ выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \{p_{12}, p_{23}\} &= -p_{13}, & \{p_{32}, p_{21}\} &= -p_{31}, \\ \{p_{31}, p_{12}\} &= -p_{32}, & \{p_{21}, p_{13}\} &= -p_{23}, \\ \{p_{23}, p_{31}\} &= -p_{21}, & \{p_{13}, p_{32}\} &= -p_{12}. \end{aligned} \quad (29)$$

Можно не заботиться о фиксации калибровки, если выбрать инвариантные относительно $\text{Diag } SL(N, \mathbb{C})$ переменные:

$$a = p_{12}p_{21}, \quad b = p_{23}p_{32}, \quad c = p_{13}p_{31}, \quad d = p_{12}p_{23}p_{31}. \quad (30)$$

Заметим, что a , b , c и d — комбинации из p_{kl} , достаточные для записи гамильтонианов (24)–(28). Из формулы (29) получаем скобки между инвариантными переменными:

$$\begin{aligned} \{a, b\} &= \{b, c\} = \{c, a\} = d - \frac{abc}{d}, \\ \{a, d\} &= ab - ac, \quad \{b, d\} = bc - ab, \quad \{c, d\} = ac - cb. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение abc/d не содержит сингулярности, так как оно равно $p_{21}p_{32}p_{13}$.

Для $sl(3, \mathbb{C})$ -ЭКМ гамильтонианы заданы формулами (24)–(28):

$$h_{2,0} = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2aE_2(u_{12}) - 2bE_2(u_{23}) - 2cE_2(u_{31}), \quad (32)$$

$$h_{2,2} = 2(a + b + c), \quad (33)$$

$$\begin{aligned} h_{3,0} &= v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + 3v_3aE_2(u_{12}) + 3v_1bE_2(u_{23}) + 3v_2cE_2(u_{31}) + \\ &+ \frac{3}{2} \left(d - \frac{abc}{d} \right) \frac{E_2'(u_{12})E_2(u_{23}) - E_2'(u_{23})E_2(u_{12})}{E_2(u_{12}) - E_2(u_{23})}, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} h_{3,2} &= 3(v_1 + v_2)a + 3(v_1 + v_3)c + 3(v_2 + v_3)b + \\ &+ 3 \left(d - \frac{abc}{d} \right) [E_1(u_{12}) + E_1(u_{23}) + E_1(u_{31})], \end{aligned} \quad (35)$$

$$h_{3,3} = -\frac{3}{2} \left(d + \frac{abc}{d} \right). \quad (36)$$

Здесь $h_{2,2}$ и $h_{3,3}$ – соответственно квадратичный и кубичный операторы Казимира алгебры (31).

Спектральная кривая записывается как

$$\det(L(z) + \mu) = 0, \quad (37)$$

$$\mu^3 - \frac{1}{2}\mu(E_2(z)h_{2,2} + h_{2,0}) + \frac{1}{3}(E_2'(z)h_{3,3} + E_2(z)h_{3,2} + h_{3,0}) = 0.$$

4. ВЫРОЖДЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

4.1. Формулы, используемые для вычисления ПИ квадратичных гамильтонианов. Положим $x = x_n + \sigma\omega_2$, где x_n – новые (сдвинутые) координаты,

$$|\sigma| < 2, \quad 0 < \beta < 1, \quad \omega_2 \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Выпишем главный не исчезающий порядок в пределе $\omega_2 \rightarrow \infty$:

$$E_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\left(\frac{x}{2} - k\omega_2\right) \approx \begin{cases} \sigma = 0 : & \frac{1}{2} \operatorname{cth}\left(\frac{x_n}{2}\right), \\ 0 < \sigma < 1 : & \frac{1}{2} + e^{-x_n - \sigma\omega_2}, \\ \sigma = 1 : & \frac{1}{2} - 2e^{-\omega_2} \operatorname{sh}(x_n), \\ \sigma > 1 : & \frac{1}{2} - e^{x_n - (2-\sigma)\omega_2}, \end{cases} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} e^{\beta\omega_2} E_2(x) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{x+2k\omega_2} + e^{-x-2k\omega_2} - 2} \approx \\ &\approx \frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{x_n+\sigma\omega_2} + e^{-x_n-\sigma\omega_2} - 2} + \frac{e^{\beta\omega_2}}{e^{x_n+\sigma\omega_2-2\omega_2} + e^{-x_n-\sigma\omega_2+2\omega_2} - 2} \approx \\ &\approx \begin{cases} \beta = 0, & \begin{cases} \sigma = 0 : & \frac{1}{4} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{x_n}{2}}, \\ 0 < \sigma < 1 : & e^{-\sigma\omega_2 - x_n}, \\ \sigma = 1 : & e^{-\omega_2} (e^{-x_n} + e^{x_n}), \\ 1 < \sigma < 2 : & e^{-(2-\sigma)\omega_2 + x_n}, \end{cases} \\ \beta > 0, & \begin{cases} \sigma = \beta < 2 - \sigma : & e^{-x_n}, \\ 2 - \sigma = \beta < \sigma : & e^{x_n}, \\ \sigma = \beta = 2 - \sigma : & e^{-x_n} + e^{x_n}. \end{cases} \end{cases} \quad (40) \end{aligned}$$

Из формулы (40) можно легко получить гамильтонианы (11)–(16) и (4). Например, гамильтониан (4) получится, если положить $u_j = U_j + 2j\omega_2/N$, $m = \overline{m}e^{\omega_2/N}$ (см. [2]).

Рис. 2

4.2. Формулы, используемые для вычисления ПИ в кубических гамильтонианах:

$$E'_2(x) = -\frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\text{ch}(\frac{x}{2} - k\omega_2)}{\text{sh}^3(\frac{x}{2} - k\omega_2)} \approx \begin{cases} 0 < \sigma < 1 : & -e^{-\sigma\omega_2 - x_n}, \\ \sigma = 1 : & e^{-\omega_2}(e^{x_n} - e^{-x_n}), \\ 1 < \sigma < 2 : & e^{-(2-\sigma)\omega_2 + x_n}. \end{cases} \quad (41)$$

Рассмотрим пределы выражения

$$\Delta = -\frac{1}{2} \frac{E'_2(u_{12})E_2(u_{23}) - E'_2(u_{23})E_2(u_{12})}{E_2(u_{12}) - E_2(u_{23})}. \quad (42)$$

Оно содержится в слагаемом гамильтониана $h_{3,0}$, заданного формулой (34). Для анализа данного выражения необходимо учесть члены второго не исчезающего порядка в приближенных формулах для $E_2(z)$ и $E'_2(z)$. Результат представлен на рис. 2.

Выражение Δ позволяет разбить плоскость параметров в соответствии со случаями

$$\Delta \approx \begin{cases} A_+ : & e^{U_{12}} e^{-(2-f_{12})\omega_2}, \\ A_- : & -e^{-U_{12}} e^{-f_{12}\omega_2}, \\ B_+ : & e^{U_{23}} e^{-(2-f_{23})\omega_2}, \\ B_- : & -e^{-U_{23}} e^{-f_{23}\omega_2}, \\ C_+ : & e^{U_{31}} e^{f_{31}\omega_2}, \\ C_- : & -e^{-U_{31}} e^{-(2+f_{31})\omega_2}. \end{cases} \quad (43)$$

Области A'_-, A'_+, B'_-, B'_+ и C'_- сдвинуты на целый период по сравнению с областями A_-, A_+, B_-, B_+ и C_- , соответственно.

На рис. 2 существуют два типа границ. Первый соответствует случаю, когда граница принадлежит одной из осей: $f_{12} \in 2\mathbb{Z}$ или $f_{23} \in 2\mathbb{Z}$, или $f_{31} \in 2\mathbb{Z}$. Все остальные линии относятся ко второму типу. Они принадлежат дуальной решетке. На рис. 2 можно видеть шестиугольник $A'_+ B'_- C'_+ A'_- B'_+ C_-$. Стороны этого шестиугольника содержат границы первого типа, а линии, проходящие через центр, содержат границы второго типа. Выпишем пример предела величины Δ , соответствующий первому типу границ:

$$\Delta \approx \begin{cases} C_+ \cap \{f_{23} = 0\} : -e^{-U_{12}} e^{-f_{12}} \left(1 - \operatorname{cth} \frac{U_{23}}{2}\right), \\ A_+ \cap \{f_{23} = 0\} : e^{U_{12}} e^{-(2-f_{12})} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{U_{23}}{2}\right). \end{cases} \quad (44)$$

Границы первого типа соответствуют комбинации из тригонометрического предела и ПИ и, таким образом, содержат комбинацию потенциалов Тоды и Калоджеро–Сазерленда.

Что касается границ второго типа, то значения величины Δ из соседних областей имеют один и тот же порядок малости, поэтому на них потенциал равен сумме потенциалов из прилегающих областей. (Все то же самое верно и для нульмерных границ.)

4.3. $sl(N, \mathbb{C})$ -случай. В случае N частиц следует рассматривать $\operatorname{Tr}(L^2), \dots, \operatorname{Tr}(L^N)$. Наиболее сложный потенциал появляется как свободный член в выражении

$$\Phi(u_{12}, z) \Phi(u_{23}, z) \dots \Phi(u_{N1}, z). \quad (45)$$

Можно обобщить рис. 2 на старшие размерности. В случае $sl(4, \mathbb{C})$ пространство параметров трехмерно ($f_{12} + f_{23} + f_{34} + f_{41} = 0$). Все пространство разбивается на правильные тетраэдры с трехмерной структурой внутри, соответствующей рис. 2 на двумерных стенках. Случай произвольного N может быть получен аналогично.

5. ПРЕДЕЛЫ СКОБОК В $sl(3, \mathbb{C})$ -СЛУЧАЕ

Будем искать все несингулярные пределы скобок (31) и всевозможные пределы гамильтонианов (32)–(36), соответствующие этим несингулярным пределам скобок.

Идея состоит в умножении, если это необходимо, данного гамильтониана на экспоненту с показателем, сокращающим наибольший показатель в гамильтониане:

$$h_{i,j} = \bar{h}_{i,j} e^{\chi(h_{i,j})}, \quad \chi(h_{i,j}) \geq 0. \quad (46)$$

Эта процедура сохраняет свойство инволюции гамильтонианов, но, конечно, не гарантирует независимости $\bar{h}_{i,j}$. Достаточным условием сохранения независимости гамильтонианов является сохранение кинетических членов $\sum v_i^2$ и $\sum v_i^3$ в $h_{2,0}$ и $h_{3,0}$, соответственно.

Другой (эквивалентный предыдущему) подход к изучению пределов следует из рассмотрения спектральной кривой (37):

$$\mu^3 - \frac{1}{2}\mu(E_2(z)h_{2,2} + h_{2,0}) + \frac{1}{3}(E_2'(z)h_{3,3} + E_2(z)h_{3,2} + h_{3,0}) = 0.$$

Можно потребовать несингулярного предела спектральной кривой, что справедливо во всех случаях, когда $\chi(h_{3,0}) = \chi(h_{2,0}) = 0$.

Можно также перенормировать спектральный параметр:

$$\mu = \bar{\mu}e^{\chi_\mu}. \quad (47)$$

Тем не менее в этом случае кинетический член в $h_{2,0}$ и $h_{3,0}$ исчезает, что может привести к потере независимости гамильтонианов. Для ее сохранения можно перенормировать импульс:

$$v_i = \bar{v}_i e^{\chi_\mu}. \quad (48)$$

Но это можно сделать только в том случае, если в симплектической форме существует множитель $e^{-\chi_\mu}$:

$$\omega = e^{-\omega_2 \chi_\mu} \sum_{i=1}^3 dv_i \wedge du_i. \quad (49)$$

В этом смысле перенормировка импульса не приводит к интересным следствиям. Будем рассматривать случай $\chi_\mu = 0$, $\chi(h_{2,0}) = 0$, $\chi(h_{3,0}) = 0$.

Цель данного раздела – найти возможные (несингулярные) пределы скобок (31):

$$\{a, b\} = \{b, c\} = \{c, a\} = d - \frac{abc}{d}, \quad \{a, d\} = ab - ac, \quad \{b, d\} = bc - ab, \quad \{c, d\} = ac - cb$$

и, таким образом, выяснить, существуют ли пределы вышеуказанных скобок с нетривиальной динамикой перенормированных переменных a, b, c, d :

$$\bar{a} = e^{\chi_a \omega_2} a, \quad \bar{b} = e^{\chi_b \omega_2} b, \quad \bar{c} = e^{\chi_c \omega_2} c, \quad \bar{d} = e^{\chi_d \omega_2} d. \quad (50)$$

Условие несингулярности для перенормировки скобок (31) выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} \chi_a &\leq \chi_d, & \chi_b &\leq \chi_d, & \chi_c &\leq \chi_d, \\ \chi_d &\leq \chi_a + \chi_c, & \chi_d &\leq \chi_a + \chi_b, & \chi_d &\leq \chi_b + \chi_c. \end{aligned} \quad (51)$$

Важно отметить, что невозможно удовлетворить вышеуказанным неравенствам, если какая-либо функция $\chi < 0$.

Нетривиальность перенормированных скобок означает выполнение точного равенства вместо любого из неравенств (51). Приведем все такие возможности (по модулю перестановок a, b, c):

$$\begin{aligned} \chi_a &< \chi_d, \quad \chi_b < \chi_d, \quad \chi_c < \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b = \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c > \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c > \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} &= \bar{d}, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0; \end{aligned} \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \chi_a < \chi_d, \quad \chi_b < \chi_d, \quad \chi_c < \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b = \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c = \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c > \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} = \bar{d}, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = \bar{d}, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0; \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} \chi_a < \chi_d, \quad \chi_b < \chi_d, \quad \chi_c < \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b = \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c = \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c = \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} = \bar{d}, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = \bar{d}, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = \bar{d}, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0; \end{aligned} \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \chi_a = \chi_d, \quad \chi_b < \chi_d, \quad \chi_c < \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b > \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c > \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c > \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = \{\bar{a}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = -\bar{a}\bar{b}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{c}; \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \chi_a = \chi_d, \quad \chi_b = \chi_d, \quad \chi_c < \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b > \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c > \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c > \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = \{\bar{c}, \bar{a}\} = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \\ \{\bar{a}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{b}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = -\bar{a}\bar{b}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{b}; \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \chi_a = \chi_d, \quad \chi_b = \chi_d, \quad \chi_c = \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b > \chi_d, \quad \chi_a + \chi_c > \chi_d, \quad \chi_b + \chi_c > \chi_d, \\ \{\bar{a}, \bar{b}\} = \{\bar{b}, \bar{c}\} = \{\bar{c}, \bar{a}\} = -\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \\ \{\bar{a}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{b} - \bar{a}\bar{c}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{c} - \bar{c}\bar{b}; \end{aligned} \quad (57)$$

$$\begin{aligned} \chi_a = \chi_d, \quad \chi_b = 0, \quad \chi_c = \chi_d, \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \{\bar{b}, \bar{c}\} = \bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \\ \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = \{\bar{d}, \bar{c}\} = -\bar{a}\bar{c}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}; \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} 0 < \chi_a < \chi_d, \quad 0 < \chi_b < \chi_d, \quad \chi_c = \chi_d, \quad \chi_a + \chi_b = \chi_d, \quad \{\bar{a}, \bar{b}\} = \bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \\ \{\bar{b}, \bar{c}\} = \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = -\bar{a}\bar{c}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = \bar{b}\bar{c}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Заметим, что спектральная кривая объединяет гамильтониан $h_{3,2}$ и кубический оператор Казимира $h_{3,3}$ в пределе $\omega_2 \rightarrow \infty$, если $|(x_n - x)/\omega_2| \neq 1$.

6. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРЕДЕЛОВ В СЛУЧАЕ $sl(3, \mathbb{C})$ -ЭКМ

Классификация пределов в данном случае состоит из всевозможных пределов гамильтонианов (32)–(36) и всевозможных пределов скобок (31).

В классификации пределов скобок имеет место примечательный факт, если потребовать, чтобы все три члена в квадратичном гамильтониане имели нетривиальный предел. В этом случае χ_a , χ_b и χ_c удовлетворяют некоторому равенству, следующему из соотношения $f_{12} + f_{23} + f_{31} = 0$. В области I на рис. 1 оно выглядит как $\chi_a + \chi_b + \chi_c = 2$, а в области III – как $\chi_a = \chi_b + \chi_c$. Эти равенства могут быть как совместны, так и несовместны с соотношениями, определяющими данный предел скобок. Сравнивая их со списком пределов скобок, данным в разделе 5, заключаем, что все типы скобок (52)–(59) распределены на рис. 2 с добавлением средних линий, изображенных на рис. 1. Областям II, III, IV вместе с прилегающими к ним средними линиями соответствуют скобки

типа (59); сторонам фундаментального треугольника отвечает тип (58). Дуальная решетка, изображенная на рис. 2, разбивает область I на рис. 1 на три: им соответствуют скобки (52) и (55), а одномерным границам между этими областями – типы (53) и (56); центру фундаментального треугольника соответствуют (54) и (57).

Выпишем три примера пределов скобок, соответствующие случаям (52), (58) и (59).

Пример 1.

$$\begin{aligned} \{\bar{a}, \bar{b}\} &= \bar{d}, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = 0, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0, \\ f_{12} &= \frac{1}{3}, \quad f_{23} = \frac{1}{4}, \quad f_{31} = -\frac{7}{12}, \quad \chi_a = \frac{1}{3}, \quad \chi_b = \frac{1}{4}, \quad \chi_c = \frac{1}{2}, \quad \chi_d = \frac{7}{12}, \\ \bar{h}_{2,0} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2\bar{a}e^{-U_{12}} - 2\bar{b}e^{-U_{23}}, \quad \bar{h}_{2,2} = 2\bar{c}, \\ \bar{h}_{3,0} &= v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + 3v_3\bar{a}e^{-U_{12}} + 3v_1\bar{b}e^{-U_{23}} - 3\bar{d}e^{U_{31}}, \\ \overline{h_{3,2} + h_{3,3}} &= -3\bar{c}v_2 - 3\frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \quad \bar{h}_{3,3} = -\frac{3}{2}\bar{d}. \end{aligned} \quad (60)$$

Пример 2.

$$\begin{aligned} \{\bar{a}, \bar{b}\} &= \{\bar{b}, \bar{c}\} = \bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \quad \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = -\bar{a}\bar{c}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = \bar{b}\bar{c} - \bar{a}\bar{b}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = \bar{a}\bar{c}, \\ f_{12} &= 1, \quad f_{23} = 0, \quad f_{31} = -1, \quad \chi_a = 1, \quad \chi_b = 0, \quad \chi_c = 1, \quad \chi_d = 1, \\ \bar{h}_{2,0} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 4\bar{a} \operatorname{ch}(U_{12}) - \frac{1}{2}\bar{b} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\frac{U_{23}}{2})} - 4\bar{c} \operatorname{ch}(U_{31}), \quad \bar{h}_{2,2} = 2(\bar{a} + \bar{c}), \\ \bar{h}_{3,0} &= v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + 6v_3\bar{a} \operatorname{ch}(U_{12}) + \frac{3}{2}v_1\bar{b} \frac{1}{\operatorname{sh}^2(\frac{U_{23}}{2})} + 6v_2\bar{c} \operatorname{ch}(U_{31}) - \\ &\quad - 3\left(\bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right) \left\{ \operatorname{sh}(U_{12}) + \operatorname{ch}(U_{12}) \operatorname{cth}\left(\frac{U_{23}}{2}\right) \right\}, \\ \bar{h}_{3,2} &= 3(v_1 + v_2)\bar{a} + 3(v_1 + v_3)\bar{c} + \frac{3}{2}\left(\bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right) \operatorname{cth}\left(\frac{U_{23}}{2}\right), \quad \bar{h}_{3,3} = -\frac{3}{2}\left(\bar{d} + \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right). \end{aligned} \quad (61)$$

Пример 3.

$$\begin{aligned} \{\bar{a}, \bar{b}\} &= \bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}, \quad \{\bar{b}, \bar{c}\} = \{\bar{c}, \bar{a}\} = 0, \quad \{\bar{a}, \bar{d}\} = -\bar{a}\bar{c}, \quad \{\bar{b}, \bar{d}\} = \bar{b}\bar{c}, \quad \{\bar{c}, \bar{d}\} = 0, \\ f_{12} &= \frac{1}{2}, \quad f_{23} = \frac{1}{2}, \quad f_{31} = -1, \quad \chi_a = \frac{1}{2}, \quad \chi_b = \frac{1}{2}, \quad \chi_c = \chi_d = 1, \\ \bar{h}_{2,0} &= v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2\bar{a}e^{-U_{12}} - 2\bar{b}e^{-U_{23}} - 4\bar{c} \operatorname{ch}(U_{31}), \quad \bar{h}_{2,2} = 2\bar{c}, \\ \bar{h}_{3,0} &= v_1^3 + v_2^3 + v_3^3 + 3v_3\bar{a}e^{-U_{12}} + 3v_1\bar{b}e^{-U_{23}} + 6v_2\bar{c} \operatorname{ch}(U_{31}) - 3\left(\bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right)e^{U_{31}}, \\ \bar{h}_{3,2} &= 3(v_1 + v_3)\bar{c} + \frac{3}{2}\left(\bar{d} - \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right), \quad \bar{h}_{3,3} = -\frac{3}{2}\left(\bar{d} + \frac{\bar{a}\bar{b}\bar{c}}{\bar{d}}\right). \end{aligned} \quad (62)$$

7. ПРЕДЕЛЫ В $sl(2, \mathbb{C})$ -ЭГ С ДВУМЯ ПРОКОЛОТЫМИ ТОЧКАМИ НА ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ

Рассмотрим следующую матрицу Лакса:

$$\begin{aligned} L_{kl} = & v_k \delta_{kl} + (p_1)_{kk} E_1(z - x_1) + (p_2)_{kk} E_1(z - x_2) + \\ & + (p_1)_{kl} \exp \left\{ 2\pi i \frac{(z - x_1) - (\bar{z} - \bar{x}_1)}{\tau - \bar{\tau}} u_{kl} \right\} \Phi(u_{kl}, z - x_1) + \\ & + (p_2)_{kl} \exp \left\{ 2\pi i \frac{(z - x_2) - (\bar{z} - \bar{x}_2)}{\tau - \bar{\tau}} u_{kl} \right\} \Phi(u_{kl}, z - x_2), \end{aligned} \quad (63)$$

$$v_1 = -v_2, \quad (p_1)_{11} = -(p_1)_{22}, \quad (p_2)_{11} = -(p_2)_{22}. \quad (64)$$

Из (17) следует, что

$$(p_1)_{11} = -(p_2)_{11}, \quad (p_1)_{22} = -(p_2)_{22}. \quad (65)$$

Будем обозначать $v = v_1$, $u = u_{12}$ и $p_{11} = (p_1)_{11}$. Вместо фиксирования действия диагональной подгруппой из $SL(2, \mathbb{C})$ снова выберем инвариантные координаты:

$$(p_1)_{12}(p_1)_{21} = a_1, \quad (p_2)_{12}(p_2)_{21} = a_2, \quad (p_1)_{12}(p_2)_{21} = a_3, \quad (p_1)_{11} = a_4. \quad (66)$$

Скобки легко вычисляются:

$$\{a_1, a_2\} = \{a_1, a_4\} = \{a_2, a_4\} = 0, \quad \{a_1, a_3\} = \{a_2, a_3\} = 2a_3 a_4, \quad \{a_3, a_4\} = a_3. \quad (67)$$

Для вычисления гамильтонианов, производимых $\text{Tr}(L^2)$, необходимо следующее тождество:

$$\Phi(w, z_1) \Phi(-w, z_2) = -\Phi(w, z_1 - z_2) [E_1(z_1) - E_1(z_2) + E_1(w) - E_1(w + z_1 - z_2)]. \quad (68)$$

Гамильтонианы имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_{2,0} = & v^2 - a_1 E_2(u) - a_2 E_2(u) + \\ & + a_3 \exp \left\{ 2\pi i \frac{(\bar{x}_1 - x_1) - (\bar{x}_2 - x_2)}{\tau - \bar{\tau}} u \right\} \times \\ & \times \Phi(u, x_2 - x_1) [E_1(u + x_2 - x_1) - E_1(u)] + \\ & + \frac{a_1 a_2}{a_3} \exp \left\{ 2\pi i \frac{(\bar{x}_2 - x_2) - (\bar{x}_1 - x_1)}{\tau - \bar{\tau}} u \right\} \times \\ & \times \Phi(u, x_1 - x_2) [E_1(u + x_1 - x_2) - E_1(u)], \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} h_{2,1,1} = & 2a_4 v - 2a_4^2 E_1(x_1 - x_2) - \\ & - a_3 \exp \left\{ 2\pi i \frac{(\bar{x}_1 - x_1) - (\bar{x}_2 - x_2)}{\tau - \bar{\tau}} u \right\} \Phi(u, x_2 - x_1) + \\ & + \frac{a_1 a_2}{a_3} \exp \left\{ 2\pi i \frac{(\bar{x}_2 - x_2) - (\bar{x}_1 - x_1)}{\tau - \bar{\tau}} u \right\} \Phi(u, x_1 - x_2), \end{aligned} \quad (70)$$

$$\frac{1}{2} h_{2,2,1} = a_1 + a_4^2, \quad \frac{1}{2} h_{2,2,2} = a_2 + a_4^2.$$

Примечательные свойства ПИ в случае ЭГ:

1. У матрицы p_{ij} существует нетривиальная диагональ, которая усложняет выражения для гамильтонианов и алгебры скобок Пуассона между элементами p_{ij} .
2. Существует дополнительный параметр $x_1 - x_2$, который также может быть сдвинут в ПИ.
3. Итоговые гамильтонианы непосредственно зависят от параметров предела f_{ij} .

8. ПРЕДЕЛЫ МАТРИЦ ЛАКСА

Используя формулы из приложения В, можно найти приближенное выражение для матрицы Лакса (5) в случае $N_0 = 1$, $p_{ii} = 0$:

$$L_{kl} = v_k \delta_{kl} - \exp \left\{ 2\pi i \frac{(z) - \bar{z}}{\tau - \bar{\tau}} u_{kl} \right\} p_{kl} \Phi(u_{kl}, z). \quad (71)$$

При больших значениях ω матрицу Лакса (71) можно записать как

$$\begin{aligned} L_{ij} \approx & v_i \delta_{ij} + \exp \left\{ -\frac{U_{ij}}{2} \sigma - f_{ij} \frac{z_n + \bar{z}_n}{4} - \frac{f_{ij}}{2} \sigma \omega_2 \right\} \bar{p}_{ij} e^{\omega_2 \zeta_{ij}} \times \\ & \times \frac{1}{2} \left(\operatorname{cth} \frac{u_{ij}}{2} + \operatorname{cth} \frac{z}{2} \right) (1 - e^{u_{ij} + z - 2\omega_2}) \approx v_i \delta_{ij} + \\ & + \begin{cases} f_{ij} > 0 : \exp \left\{ -\frac{U_{ij}}{2} \sigma - f_{ij} \frac{z_n + \bar{z}_n}{4} \right\} \bar{p}_{ij} \times \\ \quad \times \exp \left\{ -\frac{f_{ij}}{2} \sigma \omega_2 + \omega_2 \zeta_{ij} \right\} (1 - e^{U_{ij} + f_{ij} \omega_2 + z_n + \sigma \omega_2 - 2\omega_2}), \\ f_{ij} < 0 : \exp \left\{ -\frac{U_{ij}}{2} \sigma - f_{ij} \frac{z_n + \bar{z}_n}{4} \right\} \bar{p}_{ij} \times \\ \quad \times \exp \left\{ -\frac{f_{ij}}{2} \sigma \omega_2 + \omega_2 \zeta_{ij} \right\} (e^{-z_n - \sigma \omega_2} - e^{U_{ij} + f_{ij} \omega_2}). \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

Простейший способ получения этой формулы (кроме непосредственного вычисления, приведенного в приложении В) – использовать представление в виде ряда

$$\Phi(u, z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{e^{-nz}}{1 - e^{-2n\omega_2 - u}}. \quad (73)$$

Рассмотрим возможные пределы.

8.1. Для $f_{ij} > 0$ требование несингулярности L_{ij} при $\omega_2 \rightarrow \infty$ выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} -\frac{f_{ij}}{2} \sigma + \zeta_{ij} \leq 0, \\ -\frac{f_{ij}}{2} \sigma + \zeta_{ij} + f_{ij} + \sigma - 2 \leq 0. \end{cases} \quad (74)$$

Существуют три нетривиальных предела для недиагональной части L_{ij} :

$$L_{ij} \approx v_i + \begin{cases} \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}, \\ \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}(-e^{U_{ij}+z_n}), \\ \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}(1 - e^{U_{ij}+z_n}). \end{cases} \quad (75)$$

Эти случаи соответствуют условиям

$$\begin{cases} f_{ij} = \frac{2}{\sigma}\zeta_{ij}, & f_{ij} < 2 - \sigma, & \zeta_{ij} < \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right), \\ f_{ij} = 2 - \frac{\zeta_{ij}}{1 - \frac{\sigma}{2}}, & f_{ij} > 2 - \sigma, & \zeta_{ij} < \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right), \\ f_{ij} = 2 - \sigma, & \zeta_{ij} = \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right). \end{cases} \quad (76)$$

8.2. При $f_{ij} < 0$ имеем следующие условия несингулярности для L_{ij} :

$$-\frac{f_{ij}}{2}\sigma + \zeta_{ij} - \sigma \leq 0, \quad -\frac{f_{ij}}{2}\sigma + \zeta_{ij} + f_{ij} \leq 0; \quad (77)$$

$$L_{ij} \approx v_i + \begin{cases} \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}(e^{-z_n}), \\ \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}(-e^{U_{ij}}), \\ \exp\left\{-\frac{U_{ij}}{2}\sigma - f_{ij}\frac{z_n + \bar{z}_n}{4}\right\}\bar{p}_{ij}(e^{-z_n} - e^{U_{ij}}). \end{cases} \quad (78)$$

Случаи (78) соответствуют условиям

$$\begin{cases} f_{ij} = \frac{2}{\sigma}\zeta_{ij} - 2, & f_{ij} < -\sigma, & \zeta_{ij} < \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right), \\ f_{ij} = -\zeta_{ij}\frac{1}{1 - \frac{\sigma}{2}}, & f_{ij} > -\sigma, & \zeta_{ij} < \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right), \\ f_{ij} = -\sigma, & \zeta_{ij} = \sigma\left(1 - \frac{\sigma}{2}\right). \end{cases} \quad (79)$$

8.3. Пример. С помощью полученных формул можно найти матрицы Лакса для примеров, приведенных в разделе 6. Для примера 3 (см. (62)) имеем

$$L(z) = \begin{pmatrix} v_1 & -\bar{p}_{12}e^{-\frac{1}{2}U_{12}} & \bar{p}_{13}e^{-\frac{1}{2}U_{31}}(e^{U_{31}} - e^{-z}) \\ \bar{p}_{21}e^{-\frac{1}{2}U_{12}} & v_2 & -\bar{p}_{23}e^{-\frac{1}{2}U_{23}} \\ -\bar{p}_{31}e^{\frac{1}{2}U_{31}}(1 - e^{-U_{31}}e^z) & \bar{p}_{32}e^{-\frac{1}{2}U_{23}} & v_3 \end{pmatrix}. \quad (80)$$

9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе показано, что ПИ, примененный к эллиптической $sl(N, \mathbb{C})$ -модели Эйлера–Калоджеро–Мозера и эллиптической модели Годена, приводит к новым, похожим на цепочки Тоды, системам N взаимодействующих частиц с дополнительными степенями свободы, соответствующими орбите коприсоединенного действия в $sl(n, \mathbb{C})$. Пределы, соответствующие полному вырождению орбитных степеней свободы, воспроизводят только уже известные периодические и открытые цепочки Тоды. Дана классификация систем, возникающих в ПИ для случая $sl(3, \mathbb{C})$. Эта классификация представлена на двумерной плоскости параметров, задающих бесконечные сдвиги координат частиц. Пространство разбивается на симметричные области. Комбинация потенциалов Тоды и Калоджеро–Сазерленда появляется в этой картинке на стенках меньших размерностей. Вследствие очевидных симметрий классификация может быть обобщена на случай произвольного числа частиц. ПИ применяется также к $sl(2, \mathbb{C})$ -эллиптической модели Годена с двумя проколотыми точками на эллиптической кривой, обсуждаются основные черты возможных в этом случае пределов. Рассмотрены также пределы матриц Лакса.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основные формулы и определения

Большинство формул, приведенных в приложениях, заимствовано из [2], [6] и [8].

Основным элементом является ϑ -функция

$$\vartheta(z, \tau) = q^{\frac{1}{8}} e^{-\frac{\pi}{4}} (e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}) \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)(1 - q^n e^{2\pi i z})(1 - q^n e^{-2\pi i z}), \quad q = e^{2\pi i \tau}. \quad (81)$$

Функции Эйзенштейна имеют вид

$$E_1(z, \tau) = \partial_z \ln \vartheta(z, \tau), \quad E_1(z, \tau) \approx \frac{1}{z} + \dots, \quad (82)$$

$$E_2(z, \tau) = -\partial_z E_1(z, \tau), \quad E_2(z, \tau) \approx \frac{1}{z^2} + \dots. \quad (83)$$

Связь с функциями Вейерштрасса:

$$\zeta(z, \tau) = E_1(z, \tau) + 2\eta_1(\tau)z, \quad (84)$$

$$\wp(z, \tau) = E_2(z, \tau) - 2\eta_1(\tau), \quad (85)$$

где

$$\eta_1(\tau) = \zeta\left(\frac{1}{2}\right).$$

В приложениях Б и В используются обозначения, полезные для взятия пределов (см. [2]):

$$\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad \omega_1 = -i\pi, \quad \text{Im}(\omega_2) = 0. \quad (86)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Формулы, используемые для вычисления гамильтонианов и их пределов

Представление функций Эйзенштейна в виде рядов удобно для взятия предела $\omega_2 \rightarrow \infty$:

$$E_1(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{cth}\left(\frac{z}{2} - k\omega_2\right), \quad (87)$$

$$E_2(z) = \frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}^2\left(\frac{z}{2} - k\omega_2\right)}, \quad (88)$$

$$E_2'(z) = -\frac{1}{4} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{z}{2} - k\omega_2\right)}{\operatorname{sh}^3\left(\frac{z}{2} - k\omega_2\right)}. \quad (89)$$

Следующее важное выражение появляется в матрице Лакса:

$$\Phi(u, z) = \frac{\vartheta(u+z)\vartheta'(0)}{\vartheta(u)\vartheta(z)}. \quad (90)$$

Оно имеет полюс в точке $z = 0$ и $\operatorname{res}|_{z=0} \Phi(u, z) = 1$. Мы также используем хорошо известные тождества

$$\Phi(u, v)\Phi(-u, v) = E_2(v) - E_2(u), \quad (91)$$

$$\Phi'_u(u, v) = \Phi(u, v)(E_1(u+v) - E_1(u)), \quad (92)$$

следовательно,

$$\frac{E_2'(u)}{E_2(u) - E_2(v)} = E_1(u+v) + E_1(u-v) - 2E_1(u). \quad (93)$$

Тождество, необходимое для вычисления кубического гамильтониана, выглядит так:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & E_2(u) & E_2'(u) \\ 1 & E_2(v) & E_2'(v) \\ 1 & E_2(w) & E_2'(w) \end{pmatrix} = \frac{2\vartheta(v-w)\vartheta(w-u)\vartheta(u-v)\vartheta(u+v+w)}{[\vartheta(u)\vartheta(v)\vartheta(w)]^3}. \quad (94)$$

Оно может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} \Phi(u, z)\Phi(v, z)\Phi(-u-v, z) = & -\frac{1}{2}E_2'(z) - \frac{1}{2}E_2(z) \frac{E_2'(u) - E_2'(v)}{E_2(u) - E_2(v)} - \\ & - \frac{1}{2} \frac{E_2'(v)E_2(u) - E_2'(u)E_2(v)}{E_2(u) - E_2(v)}. \end{aligned} \quad (95)$$

Используя формулу (93), имеем

$$\frac{E_2'(u) - E_2'(v)}{E_2(u) - E_2(v)} = 2E_1(u+v) - 2E_1(u) - 2E_1(v), \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{E_2'(v)E_2(u) - E_2'(u)E_2(v)}{E_2(u) - E_2(v)} = & -E_1(u+v)(E_2(u) + E_2(v)) + E_1(u-v)(E_2(u) - E_2(v)) + \\ & + 2(E_2(u)E_1(v) + E_2(v)E_1(u)). \end{aligned} \quad (97)$$

Таким образом, формула (95) может быть переписана в следующей форме:

$$\begin{aligned} \Phi(u, z)\Phi(v, z)\Phi(-u-v, z) = & -\frac{1}{2}E_2'(z) + E_2(z)[E_1(u) + E_1(v) + E_1(-u-v)] - \\ & - E_2(u)E_1(v) - E_2(v)E_1(u) + \frac{1}{2}E_1(u+v)(E_2(u) + E_2(v)) - \\ & - \frac{1}{2}E_1(u-v)(E_2(u) - E_2(v)). \end{aligned} \quad (98)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ В

Формулы, используемые для вычисления пределов в матрицах Лакса

Формула (81) (см. приложение А), а также

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1 = \zeta(0) = -\frac{1}{2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n = \zeta(-1) = -\frac{1}{12}, \quad (99)$$

где $\zeta(z)$ — ζ -функция Римана,

$$\frac{\vartheta(u, \tau)}{\vartheta'(0, \tau)} = \frac{\omega_1}{\pi} q^{-\frac{1}{12}} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \sin(\pi(u - n\tau)), \quad (100)$$

$$\begin{aligned} \frac{\vartheta\left(\frac{z}{2\pi i}, \tau\right)}{\vartheta'(0, \tau)} = & -ie^{\frac{\omega_2}{6}} \prod_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sh}\left(\frac{z}{2} + n\omega_2\right) = \\ = & -2ie^{\frac{\omega_2}{6}} \operatorname{sh} \frac{z}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (e^z + e^{-z} - e^{2n\omega_2} - e^{-2n\omega_2}) = \\ = & -2i \operatorname{sh} \frac{z}{2} \prod_{n=1}^{\infty} (-1 + e^{z-2n\omega_2} + e^{-z-2n\omega_2} - e^{-4n\omega_2}) \approx \\ \approx & 2i \operatorname{sh}\left(\frac{z}{2}\right) (1 - e^{z-2\omega_2} - e^{-z-2\omega_2}). \end{aligned} \quad (101)$$

Если $\partial z / \partial \omega_2 > 0$ и $\partial u / \partial \omega_2 > 0$, то

$$\frac{(1 - e^{u+z-2\omega_2} - e^{-u-z-2\omega_2})}{(1 - e^{u-2\omega_2} - e^{-u-2\omega_2})(1 - e^{z-2\omega_2} - e^{-z-2\omega_2})} \approx 1 - e^{u+z-2\omega_2}. \quad (102)$$

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. Горскому, А. Забродину, А. Маршакову, А. Миронову, А. Морозову и А. Червову за полезные замечания и А. Левину за многочисленные обсуждения. Особую признательность выражаем М. Олшанецкому за предложенную тему и полезные обсуждения. Работа обоих авторов была частично поддержана грантом РФФИ № 00-02-16530 и Программой поддержки научных школ, грант № 00-15-96557.

Список литературы

- [1] *V. I. Inozemtsev*. Commun. Math. Phys. 1989. V. 121. P. 629.
- [2] *Eric D'Hoker and D. H. Phong*. Calogero–Moser and Toda systems for twisted and untwisted affine Lie algebras. hep-th/9804125; Lectures on supersymmetric Yang–Mills theory and integrable systems. hep-th/9912271.
- [3] *S. P. Khastgir, R. Sasaki, and K. Takasaki*. Calogero–Moser Models IV: Limits to Toda theory. hep-th/9907102.
- [4] *N. Nekrasov*. Holomorphic bundles and many-body systems. hep-th/9503157.
- [5] *N. Hitchin*. Duke Math. J. 1987. V. 54. № 1. P. 91.
- [6] *A. M. Levin and M. A. Olshanetsky*. Hierarchies of isomonodromic deformations and Hitchin systems. hep-th/9709207.
- [7] *M. A. Olshanetsky*. Generalized Hitchin systems and Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equation on elliptic curves. hep-th/9510143.
- [8] *E. Billey, J. Avan, O. Babelon*. Exact Yangian symmetry in the classical Euler–Calogero–Moser model. hep-th/9401117.