Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Иванов, Супербраны и суперсимметричные теории Борна–Инфельда как нелинейные реализации, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 278–297

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 15:28:17

© 2001 г.

Е. А. Иванов*

СУПЕРБРАНЫ И СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ ТЕОРИИ БОРНА–ИНФЕЛЬДА КАК НЕЛИНЕЙНЫЕ РЕАЛИЗАЦИИ

Основные аспекты подхода к описанию супербран и суперсимметричных теорий Борна–Инфельда, основанного на принципе частичного нарушения глобальной суперсимметрии (ЧНГС), изложены на нескольких поясняющих примерах. Это $N = 1$, $D = 4$ супермембрана и “заполняющие пространство” D2- и D3-супербраны. Дан краткий обзор известных фактов об этих системах и приведен ряд новых результатов. Для супермембраны показано, что уравнения движения, следующие из голдстоуновского суперполевого действия вне массовой поверхности, эквивалентны уравнениям, получаемым непосредственно из подхода нелинейных реализаций. Универсальная процедура, основанная на связи линейных и нелинейных реализаций ЧНГС, применена для нового построения голдстоуновских суперполевых действий вне массовой поверхности для данных систем.

Памяти М. В. Савельева

1. ВВЕДЕНИЕ

Один из возможных подходов к описанию супербран основан на концепции частичного нарушения глобальной суперсимметрии (ЧНГС) [1]–[19]. В таком подходе физические степени свободы супербраны описываются голдстоуновскими суперполями. Суперсимметрия мировой поверхности (физического пространства) действует на этих суперполях посредством линейных преобразований и поэтому остается ненарушенной. Оставшаяся часть полной суперсимметрии супербраны реализована нелинейно. Переходя к компонентам в голдстоуновском суперполевым действии и устраняя вспомогательные поля, можно восстановить соответствующее действие типа Грина–Шварца в статической калибровке (в общем случае это можно сделать после подходящего переопределения полей).

В то время как в случае обыкновенных p -супербран физические степени свободы образуют скалярные супермультиплеты на мировой поверхности, аналогичные мировые

* Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия; Laboratoire de Physique Théorique et des Hautes Energies, Université Paris 7, Paris, France

супермультиплеты в случае Др-бран, как известно, являются векторными, причем калибровочные поля в них подчиняются динамике Борна–Инфельда (БИ) (см. [20] и ссылки в этой работе). Соответствующие действия с ЧНГС должны поэтому образовывать подкласс явно суперсимметричных расширений [21]–[23] бозонного действия БИ. Действия из этого подкласса характеризуются наличием второй скрытой, нелинейно реализованной суперсимметрии. Подход ЧНГС может рассматриваться как эффективный метод вывода таких суперрасширений действия БИ. До сих пор этот подход применялся для построения суперрасширений только абелева действия БИ [5], [7], [12], [13]. Однако он может оказаться полезным и в неабелевом случае¹⁾.

В данной работе на примере нескольких простых, но содержательных моделей ($N = 1$ супермембрана и заполняющие пространство D2- и D3-браны) будет показано, как подход ЧНГС в сочетании с общими методами теории нелинейных реализаций [25] приводит к явно суперсимметричному описанию супербран и суперрасширений теории БИ в терминах суперполей на мировой поверхности. В большинстве случаев из формализма нелинейной реализации можно непосредственно вывести только уравнения движения голдстоуновского суперполя, описывающие данную супербрану или суперсимметричную теорию БИ на массовой поверхности. Построение суперполевых действий вне массовой поверхности требует более изощренных методов, включающих в себя построение *линейной* реализации соответствующего ЧНГС. Лагранжева плотность суперполя, описывающего супербрану или суперсимметричную теорию БИ, при этом отождествляется с подходящей компонентой некоторого линейного супермультиплета полной соответствующей суперсимметрии. На этот мультиплет накладываются ковариантные связи, которые позволяют выразить все его компоненты в терминах голдстоуновского мультиплета ненарушенной суперсимметрии. Явный вид этих связей можно найти исходя из общего соотношения между линейными и нелинейными реализациями суперсимметрий [26], примененного к случаю ЧНГС в работах [17], [18]²⁾. В данной работе эта универсальная процедура используется для нового вывода действий голдстоуновских суперполей вне массовой поверхности в рассматриваемых случаях. В случае супермембраны также доказано, что суперполевые уравнения движения, выведенные из действия вне массовой поверхности, эквивалентны уравнениям, постулированным в рамках нелинейной реализации суперсимметрии [7], [11].

2. $N = 1$, $D = 4$ СУПЕРМЕМБРАНА

2.1. $N = 1$, $D = 4$ супермембрана как система с ЧНГС. Супермембрана в пространстве размерности $D = 4$ спонтанно нарушает половину $N = 1$, $D = 4$ супер-

¹⁾ Неотъемлемое свойство этого подхода (отличающее его, например, от подхода, исходящего из действия Др-бран в формулировке Грина–Шварца с закрепленной калибровкой по отношению к каппа-симметрии [24]) состоит в явной *линейности* преобразований ненарушенной суперсимметрии.

²⁾ См. также [19].

симметрии и одну симметрию относительно сдвигов. Набор генераторов $N = 1$, $D = 4$ супералгебры Пуанкаре в $d = 3$ обозначениях естественным образом расщепляется на генераторы $\{Q_a, P_{ab}\}$ ненарушенных симметрий и генераторы $\{S_a, Z\}$ нарушенных симметрий ($a, b = 1, 2$). Основные антикоммутационные соотношения в этих обозначениях имеют вид

$$\{Q_a, Q_b\} = \{S_a, S_b\} = P_{ab}, \quad \{Q_a, S_b\} = \epsilon_{ab} Z. \quad (2.1)$$

Как было показано в работе [11], для вывода явно ковариантных суперполевых уравнений, описывающих динамику супербраны на мировом объеме, в данном случае (и в некоторых других) достаточно действовать в рамках нелинейной реализации супералгебры (2.1), не включая в рассмотрение генераторы группы автоморфизмов. При этом все генераторы суперсимметрии помещаются в факторпространство, причем координаты $N = 1$, $d = 3$ суперпространства $\{\theta^a, x^{ab}\}$ ассоциируются с генераторами Q_a, P_{ab} . Остальные параметры факторпространства отождествляются с голдстоуновскими суперполями $\psi^a \equiv \psi^a(x, \theta)$, $q \equiv q(x, \theta)$. Элемент факторпространства g имеет вид³⁾

$$g = e^{x^{ab} P_{ab}} e^{\theta^a Q_a} e^{q Z} e^{\psi^a S_a}.$$

Далее строятся картановские 1-формы

$$\begin{aligned} g^{-1} dg &= \omega_Q^a Q_a + \omega_P^{ab} P_{ab} + \omega_Z Z + \omega_S^a S_a, \\ \omega_P^{ab} &= dx^{ab} + \frac{1}{4} \theta^{(a} d\theta^{b)} + \frac{1}{4} \psi^{(a} d\psi^{b)}, \\ \omega_Z &= dq + \psi_a d\theta^a, \quad \omega_Q^a = d\theta^a, \quad \omega_S^a = d\psi^a \end{aligned}$$

и соответствующие ковариантные производные

$$\mathcal{D}_{ab} = (E^{-1})_{ab}^{cd} \partial_{cd}, \quad \mathcal{D}_a = D_a + \frac{1}{2} \psi^b D_a \psi^c \mathcal{D}_{bc}, \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned} E_{ab}^{cd} &= \frac{1}{2} (\delta_a^c \delta_b^d + \delta_a^d \delta_b^c) + \frac{1}{4} (\psi^c \partial_{ab} \psi^d + \psi^d \partial_{ab} \psi^c), \\ D_a &= \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \frac{1}{2} \theta^b \partial_{ab}, \quad \{D_a, D_b\} = \partial_{ab}. \end{aligned}$$

Набор голдстоуновских суперполей $\{q(x, \theta), \psi^a(x, \theta)\}$ приводим. В самом деле, суперполе ψ_a входит в форму ω_Z *линейно*, а потому может быть устранено путем наложения явно ковариантной связи (так называемый обратный эффект Хиггса [27])

$$\omega_Z|_{d\theta} = 0 \Rightarrow \psi_a = \mathcal{D}_a q,$$

³⁾ В данных обозначениях параметры факторпространства x^{ab} и q являются мнимыми, а θ^a и ψ^a – вещественными.

где $|_{d\theta}$ обозначает проекцию 1-формы на дифференциал $d\theta$. Тем самым $q(x, \theta)$ – это единственное существенное голдстоуновское суперполе, необходимое для описания частичного спонтанного нарушения $N = 1$, $D = 4 \rightarrow N = 1$, $d = 3$ в рамках подхода нелинейных реализаций.

Для построения динамических уравнений наложим дополнительную, явно ковариантную связь на суперполе $q(x, \theta)$. Эта связь является прямой ковариантизацией “плоских” уравнений движения:

$$D^a D_a q = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{D}^a \mathcal{D}_a q = 0. \quad (2.3)$$

Уравнение (2.3) совпадает с динамическим уравнением супермембраны в $D = 4$, что было показано в работе [7], в которой это уравнение было выведено в рамках факторпространства, включающего в себя генераторы $D = 4$ группы Лоренца. Поэтому уравнение (2.3) обладает скрытой ковариантностью относительно действия полной $D = 4$ группы Лоренца $SO(1, 3)$. Для бозонного поля $q(x) \equiv q(x, \theta)|_{\theta=0}$ в пределе нулевых фермионных полей получается уравнение, отвечающее действию Намбу–Гото для мембраны в размерности $D = 4$ в статической калибровке. Ниже будет показано, что уравнение (2.3) эквивалентно уравнению, вытекающему из суперполевого действия супермембраны.

Обратимся теперь к построению инвариантного голдстоуновского суперполевого действия вне массовой поверхности. В отличие от работы [7], здесь будет использован систематический подход, основанный на соотношении между линейными и нелинейными реализациями суперсимметрии [26]. Эта конструкция весьма близка к той, которая использовалась в работе [18] для $d = 2$ систем с ЧНГС.

Определим сначала *линейную* реализацию рассматриваемой версии ЧНГС $N = 1$, $D = 4 \rightarrow N = 1$, $d = 3$. С $d = 3$ точки зрения эта версия эквивалентна нарушению $N = 2 \rightarrow N = 1$, где $N = 2$, $d = 3$ супералгебра Пуанкаре содержит один центральный заряд Z и задается соотношениями (2.1). Основной объект такой реализации – это скалярное киральное $N = 2$, $d = 3$ суперполе $\Phi(x, \theta, \zeta)$, где x^{ab} , θ^a и ζ^d суть координаты $N = 2$, $d = 3$ суперпространства. Это суперполе преобразуется при действии центрального заряда следующим образом:

$$Z\Phi = 1. \quad (2.4)$$

Это означает, что генератор преобразований центрального заряда действует на поле Φ как сдвиг. Такое представление следует понимать как следующую специальную реализацию $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии (2.1): Φ – это параметр факторпространства (голдстоуновское суперполе), ассоциированный с Z , а остальные параметры интерпретируются как координаты $N = 2$, $d = 3$ суперпространства, на котором определено суперполе Φ (ср. с аналогичной $d = 2$ реализацией в работе [18]). По отношению к $N = 1$ суперсимметрии $\{P_{ab}, Q_a\}$ суперполе Φ представляет собой совокупность стандартных $N = 1$ суперполей (коэффициентов разложения Φ по ζ^a). Под действием

S -суперсимметрии оно преобразуется как

$$\delta_\eta \Phi = -\eta^a \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^a} - \frac{1}{2} \zeta^b \partial_{ab} - \theta_a Z \right) \Phi. \quad (2.5)$$

Соответственно спинорные ковариантные производные в этой реализации имеют вид

$$\widehat{D}_a^\theta = \frac{\partial}{\partial \theta^a} + \frac{1}{2} \theta^b \partial_{ab} - \zeta_a Z = D_a - \zeta_a Z, \quad D_a^\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta^a} + \frac{1}{2} \zeta^b \partial_{ab}.$$

Условие ковариантной киральности записывается в виде

$$(\widehat{D}_a^\theta - i D_a^\zeta) \Phi = 0 \Rightarrow \Phi = \phi - i \zeta^a D_a \phi + \frac{1}{4} \zeta^2 [D^2 \phi + 2i], \quad \phi \equiv \phi(x, \theta), \quad (2.6)$$

где учтено условие (2.4). Таким образом, весь неприводимый набор $4 + 4$ компонентных полей $N = 2$ суперполя $\Phi(x, \theta, \zeta)$ вне массовой поверхности содержится в комплексном $N = 1$ суперполе $\phi(x, \theta)$. Преобразование S -суперсимметрии для этого суперполя следует непосредственно из (2.5) и (2.4):

$$\delta_\eta \phi = \eta^a \theta_a + i \eta^a D_a \phi.$$

Для вещественных суперполей ρ и ϕ_0 , определяемых формулой

$$\phi = \phi_0 + i \rho,$$

получаются законы преобразования

$$\delta_\eta \rho = -i \eta^a \theta_a + \eta^a D_a \phi_0, \quad \delta_\eta \phi_0 = -\eta^a D_a \rho. \quad (2.7)$$

Для спинорного суперполя $\xi_a = i D_a \rho$ преобразование S -суперсимметрии содержит неоднородный сдвиг,

$$\delta_\eta \xi_a = \eta_a \left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0 \right) - \frac{i}{2} \eta^b \partial_{ab} \phi_0.$$

Следовательно, это суперполе имеет смысл голдстоуновского фермиона для линейной реализации ЧНГС $N = 2 \rightarrow N = 1$, $d = 3$. Компонентный полевой состав $\rho(x, \theta)$ совпадает с составом $q(x, \theta)$, а само суперполе ρ тем самым допускает трактовку как $N = 1$ голдстоуновское суперполе для спонтанно нарушенных Z -преобразований (оно испытывает сдвиг при Z -преобразованиях). Интересно, что роль связей обратного эффекта Хиггса в линейной реализации играют условия киральности (2.6), которые позволяют выразить все $N = 1$ суперполевые компоненты $N = 2$ суперполя $\Phi(x, \theta, \zeta)$ через производные от ρ и ϕ_0 .

Кроме основного голдстоуновского суперполя ρ , остается еще суперполе ϕ_0 ; оно преобразуется однородно относительно обеих $N = 1$, $d = 3$ суперсимметрий. Покажем теперь, что это суперполе можно выразить через ρ , если наложить нелинейную связь, которая превращает рассматриваемую линейную реализацию в нелинейную, связанную с исходной нелинейной реализацией переопределением полей. Для этого применим метод работ [17], [18], [26] к системе $N = 1$ суперполей ξ_a , ϕ_0 . Построим для этих суперполей *конечное* преобразование S -суперсимметрии, заменив в итоговом выражении параметры η^a голдстоуновскими суперполями $\psi^a(x, \theta)$ исходной нелинейной реализации (взятыми со знаком минус). Полученные объекты,

$$\begin{aligned}\tilde{\xi}_a &= \xi_a - \psi_a \left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0\right) + \frac{i}{2} \psi^d \partial_{ad} \phi_0 - \frac{1}{4} \psi^2 \partial_{ab} \xi^b, \\ \tilde{\phi}_0 &= \phi_0 - i \psi^a \xi_a + \frac{i}{2} \psi^2 \left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0\right),\end{aligned}$$

преобразуются однородно относительно преобразований S -суперсимметрии (и, разумеется, относительно Q -суперсимметрии). Поэтому условия

$$\tilde{\xi}_a = 0, \quad \tilde{\phi}_0 = 0$$

ковариантны относительно полной суперсимметрии. Используя свойство нильпотентности $\psi^3 = 0$, легко найти, что эти уравнения эквивалентны соотношениям

$$\psi^a = \frac{\xi^a}{1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0}, \quad \phi_0 = \frac{i}{2} \psi^2 \left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0\right) = \frac{i}{2} \frac{\xi^2}{1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0}. \quad (2.8)$$

Эти соотношения совпадают (с точностью до незначительной разницы в обозначениях) с соотношениями, найденными в работе [7]. Первое из них есть соотношение эквивалентности между голдстоуновскими фермионами нелинейной и линейной реализаций, а второе выражает ϕ_0 в терминах ψ^a или ξ^a :

$$\phi_0 = \frac{i}{2} \frac{\psi^2}{1 - \frac{1}{4} D^2 \psi^2} = \frac{i \xi^2}{1 + \sqrt{1 + D^2 \xi^2}}. \quad (2.9)$$

С учетом закона преобразования (2.7) для ϕ_0 интеграл

$$S \sim \int d^3 x d^2 \theta \phi_0 \quad (2.10)$$

инвариантен относительно полной $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии, а потому является искомым действием голдстоуновского суперполя $\rho(x, \theta)$ (или $q(x, \theta)$) вне массовой поверхности. Это действие описывает $N = 1$, $D = 4$ супермембрану на плоском фоне в явно инвариантном виде относительно суперсимметрии мировой поверхности. Это действие может быть равным образом представлено через исходное киральное $N = 2$ суперполе

$\Phi(x, \theta, \zeta)$ (см. уравнение (2.6)) в виде интегралов по полному или киральному $N = 2$, $d = 3$ суперпространствам:

$$S \sim \int d^3x d^2\theta d^2\zeta \Phi \bar{\Phi} \sim \int d^3x_L d^2\theta_L \Phi + \text{к.с.}, \quad (2.11)$$

где $\theta_L^a = \theta^a - i\zeta^a$ и $x_L^{ab} = x^{ab} + \theta^{(a}\zeta^{b)}/2$. Предполагается, что в разложение суперполя (2.6) подставлено явное выражение для ϕ_0 , и в правой части (2.11) произведен переход в киральный базис, в котором Φ не зависит от $\theta_R^a = \theta^a + i\zeta^a$. В таком представлении действие явно инвариантно относительно полной $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии (2.1). Заметим, что два инвариантных выражения в формуле (2.11) независимы до перехода к нелинейной реализации, но становятся идентичными (с точностью до числового множителя) после такого перехода. Похожее явление имеет место и в других случаях ЧНГС [6], [18], [20].

Заметим, что соотношения (2.8) могли бы быть получены при наложении (в духе работы [6]) условия нильпотентности на подходящее вещественное $N = 2$ суперполе, которое строится из Φ и комплексно-сопряженного суперполя и имеет нулевой центральный заряд [16], [19]. Нашей целью было продемонстрировать, что общий метод, использованный ранее в работах [17], [18], полностью применим и в данном случае.

2.2. Эквивалентность двух представлений уравнений движения супермембраны. Покажем теперь, что динамическое уравнение (2.3), которое было постулировано из чисто геометрических соображений, и уравнения движения, следующие из действия (2.10) вне массовой поверхности, на самом деле эквивалентны друг другу.

Уравнение (2.3), записанное через суперполевой голдстоуновский фермион ψ_a ,

$$\mathcal{D}^a \psi_a = 0,$$

можно представить в более развернутом виде:

$$W + \frac{1}{2} \psi^a W^{bc} \partial_{ab} \psi_c - \frac{1}{16} \psi^2 W^{ac} \partial_{bc} \psi_d \partial^{bd} \psi_a = 0, \quad (2.12)$$

где

$$W \equiv D^a \psi_a, \quad W^{ab} \equiv D^{(a} \psi^{b)}$$

и использовано явное представление (2.2) для ковариантной производной $\mathcal{D}_a$. В этой форме записи уравнение содержит только плоские производные D_a и ∂_{ab} .

С другой стороны, уравнения движения, следующие из действия (2.10) вне массовой поверхности при варьировании его относительно $N = 1$ суперполя ρ , могут быть также представлены в терминах суперполя ψ^a :

$$D^a \lambda_a = 0, \quad (2.13)$$

где

$$\lambda_a \equiv \frac{\psi_a}{1 - \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi} + \frac{1}{4} \frac{\psi^2}{(1 - \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi)^2} \{ \partial_{ab} \psi^b + 2 D_b \psi_a D_d \psi_c \partial^{db} \psi^c \} \quad (2.14)$$

и $A \cdot B \equiv A^{ab} B_{ab}$. Уравнение в этой форме можно вывести из соотношения эквивалентности (2.8). Будем исходить из лагранжиана (2.9), записанного в виде

$$\phi_0 = \frac{i}{2} \frac{\xi^2}{1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0} = \frac{i}{2} \psi^2 \left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0 \right), \quad S \sim \int d^3 x d^2 \theta \phi_0(x, \theta), \quad (2.15)$$

где

$$\left(1 - \frac{i}{2} D^2 \phi_0 \right)_{\text{eff}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi},$$

а нижний индекс “eff” означает, что опущены все члены, содержащие ψ^a (но не производные от ψ^a). Вариация ϕ_0 имеет вид

$$\delta \phi_0 = i \delta \xi^a \psi_a - \frac{1}{4} \psi^2 (D^2 \delta \phi_0)_{\text{eff}}, \quad (2.16)$$

где $(D^2 \delta \phi_0)_{\text{eff}}$ определяется из уравнения

$$(D^2 \delta \phi_0)_{\text{eff}} \left(1 - \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi \right) = -2i D^l \delta \xi^a D_l \psi_a + i \delta \xi^a D^2 \psi_a.$$

Используя первое из соотношений (2.8) и кинематическую связь

$$D^2 \xi_a = \partial_{ab} \xi^b, \quad (2.17)$$

следующую из соотношения $\xi_a = i D_a \rho$, получим в нулевом порядке по ψ уравнение

$$D^2 \psi_a = \partial_{ab} \psi^b + D_b \psi_a D_d \psi_c \partial^{bd} \psi^c + O(\psi). \quad (2.18)$$

Подставляя полученные формулы в вариацию (2.16) и учитывая, что $\delta \xi^a = i D^a \delta \rho$, из вариационного принципа $\delta S = 0$ получим уравнения движения в виде (2.13), (2.14).

Докажем теперь эквивалентность уравнений (2.12) и (2.13). Для этого покажем сначала, что уравнение (2.13) тождественно удовлетворяется, если справедливо уравнение (2.12).

Сначала выведем некоторые следствия уравнения (2.12). Подействовав на это уравнение спинорной производной, получим в нулевом порядке по ψ

$$D^2 \psi_a = -\partial_{ab} \psi^b - W_{ab} W_{cd} \partial^{bd} \psi^c + O(\psi). \quad (2.19)$$

Сравнивая этот ответ с кинематической связью (2.18), получим систему уравнений

$$D^2 \psi_a = O(\psi), \quad (2.20a)$$

$$\partial_{ab} \psi^b + W_{ab} W_{cd} \partial^{bd} \psi^c = O(\psi). \quad (2.20b)$$

Далее, подействовав на (2.12) оператором D^2 ($D^2 D^a = -\partial^{ab} D_b$), в том же порядке по ψ получим с использованием уравнения (2.20b) условие

$$\partial^{ab} W_{ab} = -W^{ab} W^{dc} \partial_{bc} W_{ad} + O(\psi). \quad (2.21)$$

Рассмотрим теперь уравнение (2.13). Во-первых, в силу уравнения (2.20b) можно произвести подстановку

$$\lambda_a \Rightarrow \frac{\psi_a}{1 - \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi} - \frac{1}{4} \frac{\psi^2}{(1 - \frac{1}{2} D\psi \cdot D\psi)^2} \partial_{ab} \psi^b \quad (2.22)$$

в уравнении (2.13). Во-вторых, в силу соотношения $W^2 \sim \psi^2$, следующего из условия (2.12), можно повсеместно сделать замену

$$(D\psi \cdot D\psi) \Rightarrow (W \cdot W). \quad (2.23)$$

Выражая теперь W из (2.12) и используя уравнение (2.20a) вместе с тождеством

$$\partial_{ab} \psi^b \partial^{ad} \psi^c W_{dc} = O(\psi), \quad (2.24)$$

которое следует из (2.20b), можно переписать уравнение (2.13) с точностью до несингулярного множителя

$$1 - \frac{1}{2} (W \cdot W) \equiv F$$

в следующем эквивалентном виде:

$$(W \cdot W) \psi^a \partial_{ab} \psi_c W^{bc} + \psi^2 W^{ab} W^{dc} \partial_{bc} W_{ad} - 2(G + K) = 0, \quad (2.25)$$

где

$$G \equiv \psi_a W^{ab} D^2 \psi_b, \quad K \equiv \psi_a W^{ab} \partial_{bc} \psi^c.$$

Остается найти явные выражения для величин G и K . Для этого необходимо знать выражения для $D^2 \psi^a$ и $\partial_{ab} \psi^b$ с точностью до членов первого порядка по ψ , в то время как уравнения (2.20) определяют эти члены только с точностью до нулевого порядка. Для того чтобы найти указанные члены разложения, необходимо вычислить $D^2 \psi^a$ до нужного порядка как из кинематических связей (используя соотношения (2.8) и (2.17)),

так и из уравнений движения (2.12) и сравнить полученные выражения. Эти выражения в принципе можно вычислить явно, но выглядят они весьма громоздкими. Соответствующие формулы для G и K гораздо проще. Исходя из кинематических соотношений (2.17) и (2.8), выражая W из уравнения (2.12) и используя динамическое тождество (2.24) вместе с циклическими тождествами, получим

$$G = K - \frac{1}{2}(W \cdot W)\psi^a W^{bc} \partial_{ab} \psi_c + \frac{1}{2}\psi^2 W^{ab} W^{cd} \partial_{ac} W_{bd}.$$

С другой стороны, прямое вычисление, использующее только уравнение (2.12) и его следствия, дает следующий результат:

$$G = -K + \frac{1}{2}(W \cdot W)\psi^a W^{bc} \partial_{ab} \psi_c + \frac{1}{2}\psi^2 W^{ab} W^{cd} \partial_{ac} W_{bd}.$$

Сравнивая эти выражения, получим соотношения

$$G = \frac{1}{2}\psi^2 W^{ab} W^{cd} \partial_{ac} W_{bd}, \quad K = \frac{1}{2}(W \cdot W)\psi^a W^{bc} \partial_{ab} \psi_c. \quad (2.26)$$

Подставляя теперь эти соотношения в уравнение (2.25), получаем, что (2.25) удовлетворяется тождественно. Тем самым доказано, что уравнение (2.13) удовлетворяется в силу уравнения (2.12).

Для того чтобы завершить доказательство эквивалентности уравнений (2.12) и (2.13), остается показать, что из уравнения (2.13) с необходимостью следует (2.12). Прежде всего, заметим, что из уравнения (2.13) следуют те же самые соотношения (2.19)–(2.21) и (2.24), что и из уравнения (2.12), а потому эти соотношения можно использовать при доказательстве. В частности, используя соотношение $W \sim \psi$, ψ^2 , которое снова следует из уравнения (2.13), можно в (2.13) сделать замены (2.22) и (2.23). Далее, из кинематических связей и уравнения (2.13) следуют *те же* выражения (2.26) для G и K (ранее полученные из уравнения (2.12)). Подставляя эти выражения в (2.13), получим условие

$$W + \frac{1}{2}\psi^a W^{bc} \partial_{ab} \psi_c = 0,$$

которое эквивалентно (2.12) в силу соотношения (2.20б) и его следствия (2.24).

Тем самым доказано, что уравнение (2.12), полученное из чисто геометрических соображений, эквивалентно уравнению (2.13), полученному с помощью вариационного принципа из действия (2.15), заданного вне массовой поверхности. Важным следствием этой эквивалентности является то, что действие (2.15) и уравнение (2.13) содержат в себе все симметрии, заложенные в уравнении (2.12), в том числе и симметрию относительно $D = 4$ группы Лоренца.

3. ЗАПОЛНЯЮЩАЯ ПРОСТРАНСТВО D2-БРАНА

В качестве второго полезного примера рассмотрим “заполняющую пространство” D2-брану, в которой $N = 1$, $d = 3$ векторный мультиплет играет роль мультиплета физических полей на мировой поверхности.

3.1. Динамика D2-браны из нелинейных реализаций. Нашим отправным пунктом будет супералгебра (2.1) без центрального заряда, т.е. с $Z = 0$. Элемент факторпространства g в этом случае содержит лишь одно голдстоуновское суперполе ψ^a , а ковариантные производные по-прежнему задаются соотношениями (2.2). В плоском случае $d = 3$ векторный мультиплет описывается $N = 1$ суперполевой спинорной ковариантной напряженностью μ_a , для которой справедливо тождество Бианки:

$$D^a \mu_a = 0 \Rightarrow \begin{cases} D^2 \mu_a = -\partial_{ab} \mu^b, \\ \partial_{ab} D^a \mu^b = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Уравнение движения имеет вид

$$D^2 \mu_a = 0. \quad (3.2)$$

В работе [11] было показано, что явно ковариантное обобщение уравнений (3.1), (3.2)

$$\mathcal{D}^a \psi_a = 0, \quad \mathcal{D}^2 \psi_a = 0 \quad (3.3)$$

описывает D2-брану. Доказательство основано на том наблюдении, что в бозонном пределе уравнения (3.3) сводятся к уравнению

$$(\partial_{ac} + V_a^d V_c^f \partial_{df}) V_b^c = 0 \quad (3.4)$$

на векторное поле $V_{ab} \equiv \mathcal{D}_a \psi_b|_{\theta=0}$. Это нелинейное, но полиномиальное уравнение, как было явно показано в работе [7], является “скрытой” формой уравнений, следующих из неполиномиального $d = 3$ действия БИ, которое представляет собой бозонное ядро суперполевого действия D2-браны в подходе ЧНГС. Стандартная форма уравнений $d = 3$ теории БИ восстанавливается посредством эквивалентного переопределения поля V_b^c . Это преобразование представляет собой бозонный предел эквивалентного суперполевого переопределения, которое устанавливает соответствие между голдстоуновским фермионом ψ_a нелинейной реализации и напряженностью μ_a , рассматриваемой как голдстоуновский фермион для *линейной* реализации того же самого варианта ЧНГС (см. п. 3.2). Как и в случае супермембраны, это соответствие позволяет явно продемонстрировать, что уравнения (3.3) эквивалентны суперполевому уравнению, следующему из суперполевого действия D2-браны, полученного в работе [7].

3.2. Суперполевое действие D2-браны вне массовой поверхности. Выведем теперь суперполевое действие D2-браны вне массовой поверхности, полученное в работе [7], с помощью общего метода, использованного в предыдущем разделе при выводе действия голдстоуновского суперполя $N = 1$, $D = 4$ супермембраны. Чтобы определить подходящую линейную реализацию рассматриваемого ЧНГС, необходимо вложить напряженность μ_a $N = 1$, $d = 3$ максвелловского суперполя в линейный $N = 2$, $d = 3$ мультиплет. Последний должен иметь такой закон преобразования при действии генераторов S -суперсимметрии, чтобы суперполе μ_a преобразовывалось с неоднородным членом, пропорциональным параметру η_a , т.е. могло быть интерпретировано как голдстоуновский фермион линейной реализации.

Подходящий $N = 2$, $d = 3$ супермультиплет был предложен в работе [16] как деформация $N = 2$, $d = 3$ максвелловского мультиплета (который получается размерной редукцией из $N = 1$, $d = 4$ тензорного мультиплета). В наших обозначениях этот деформированный мультиплет описывается вещественным $N = 2$, $d = 3$ суперполем $W(x, \theta, \zeta)$, подчиненным следующим связям:

$$[D^2 - (D^\zeta)^2]W = -2i, \quad (3.5a)$$

$$D^a D_a^\zeta W = 0 \quad (3.5b)$$

(эта форма связей наиболее удобна для наших целей; она может быть получена из связей работы [16] путем фиксации явно нарушенной внутренней $U(1)_A$ -симметрии автоморфизмов супералгебры (2.1) с $Z = 0$ и масштабного преобразования суперполя W^4).

Стандартный закон преобразования суперполя W при действии S -суперсимметрии

$$\delta_\eta W = -\eta^a \left(\frac{\partial}{\partial \zeta^a} - \frac{1}{2} \zeta^b \partial_{ab} \right) W$$

приводит к следующим законам преобразования для неприводимых $N = 1$ суперполевых компонент $\mu_a \equiv -iD_a^\zeta W|_{\zeta=0}$ и $w \equiv W|_{\zeta=0}$ этого $N = 2$ суперполя:

$$\delta_\eta \mu_a = \eta_a \left(1 - \frac{i}{2} D^2 w \right) + \frac{i}{2} \eta^b \partial_{ab} w, \quad (3.6a)$$

$$\delta_\eta w = -i\eta^a \mu_a. \quad (3.6b)$$

Легко проверить, что уравнение (3.6a) согласовано с тождествами Бианки (3.1) (которые суть просто уравнение (3.5b)). Ввиду присутствия в правой части уравнения (3.5a) постоянного члена, нарушающего $U(1)_A$ -симметрию, $N = 1$ максвелловское суперполе μ_a преобразуется неоднородно под действием S -суперсимметрии, а потому имеет смысл голдстоуновского фермиона линейной реализации рассматриваемого $N = 2 \rightarrow N = 1$, $d = 3$ сценария ЧНГС.

⁴⁾ Такая деформация суперполевых связей, определяющих $N = 1$, $d = 4$ тензорный мультиплет, была впервые рассмотрена в работе [28] в контексте $N = 4$ суперконформной механики.

Как и в случае супермембраны, дополнительное однородно преобразующееся $N = 1$ суперполе $w(x, \theta)$ можно выразить через суперполе Голдстоуна–Максвелла μ_a , если наложить нелинейные связи, явный вид которых диктуется использованным ранее общим методом в применении к данной системе. На первом этапе определим суперполя $\tilde{\mu}_a$ и $\tilde{w}$ как соответствующие конечные преобразования суперполей μ_a и w при действии S -суперсимметрии с суперполем $-\psi^a(x, \theta)$, взятым в качестве параметра супертрансляции η^a :

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}_a &= \mu_a - \psi_a \left(1 - \frac{i}{2} D^2 w\right) - \frac{i}{2} \psi^b \partial_{ab} w - \frac{1}{4} \psi^2 \partial_{ab} \mu^b, \\ \tilde{w} &= w + i \psi^a \mu_a - \frac{i}{2} \psi^2 \left(1 - \frac{i}{2} D^2 w\right).\end{aligned}$$

Эти величины преобразуются однородно относительно действия всех генераторов $N = 2$, $d = 3$ суперсимметрии и тем самым могут быть ковариантно положены равными нулю, $\tilde{\mu}_a = \tilde{w} = 0$. Из этих ковариантных связей получается соотношение эквивалентности между ψ^a и μ^a

$$\psi^a = \frac{\mu^a}{1 - \frac{i}{2} D^2 w},$$

равно как и соотношение

$$w = -\frac{i}{2} \frac{\mu^2}{1 - \frac{i}{2} D^2 w}.$$

Это в точности уравнения, выведенные в работе [7] (с точностью до перенормировки w). Теперь можно воспользоваться этими уравнениями, для того чтобы выразить w в терминах либо ψ^a , либо μ^a :

$$w = -\frac{i}{2} \frac{\psi^2}{1 + \frac{1}{4} D^2 \psi^2} = -\frac{i \mu^2}{1 + \sqrt{1 - D^2 \mu^2}}. \quad (3.7)$$

Это составное суперполе и есть лагранжева плотность соответствующего инвариантного голдстоуновского действия

$$S \sim \int d^3 x d^2 \theta w. \quad (3.8)$$

Действительно, $\delta_\eta S = 0$, поскольку интеграл $d^3 x d^2 \theta$ от вариации (3.6б) обращается в нуль вследствие тождеств Бианки (3.1).

То же самое суперполевое действие D2-браны может быть представлено в явно $N = 2$ суперсимметричном виде как интеграл по полному $N = 2$ суперпространству от лагранжевой плотности, в качестве которой выступает либо член W^2 , либо $N = 2$, $d = 3$ член Файе–Илиопулоса (как и в других случаях ЧНГС, эти два независимых инварианта сводятся друг к другу после перехода к нелинейной реализации).

4. ЗАПОЛНЯЮЩАЯ ПРОСТРАНСТВО D3-БРАНА

Последний пример – заполняющая пространство D3-брана в размерности $d = 4$. Эта система отвечает ЧНГС $N = 2 \rightarrow N = 1$ в $d = 4$ с нелинейным обобщением $N = 1$, $d = 4$ векторного мультиплета в качестве голдстоуновского мультиплета [5], [6]. Суперполевое действие вне массовой поверхности для данной системы было построено в работах [5], [21]. Следуя [11], мы объясним, как соответствующие динамические уравнения могут быть выведены непосредственно из формализма нелинейных реализаций в применении к рассматриваемому варианту ЧНГС, в тесной аналогии с другими примерами, обсуждаемыми в статье. Новый результат состоит в демонстрации того факта, что универсальная процедура построения действий голдстоуновских суперполей, использованная в предыдущих примерах, применима и к данному случаю. С ее помощью удастся восстановить действие из работы [5] и установить прямую связь между подходом работ [5], [6] и стандартным описанием ЧНГС в методе нелинейных реализаций.

4.1. Суперполевые уравнения движения D3-браны в подходе нелинейных реализаций. Нашим отправным пунктом будет $N = 2$, $d = 4$ супералгебра Пуанкаре без центральных зарядов:

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot{\alpha}}\} = 2P_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \{S_\alpha, \bar{S}_{\dot{\alpha}}\} = 2P_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

Предполагая, что S_α - и $\bar{S}_{\dot{\alpha}}$ -суперсимметрии спонтанно нарушены, необходимо ввести голдстоуновские суперполя $\psi^\alpha(x, \theta, \bar{\theta})$ и $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}(x, \theta, \bar{\theta})$ как параметры факторпространства

$$g = e^{ix^{\alpha\dot{\alpha}}P_{\alpha\dot{\alpha}}} e^{i\theta^\alpha Q_\alpha + i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}} \bar{Q}^{\dot{\alpha}}} e^{i\psi^\alpha S_\alpha + i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \bar{S}^{\dot{\alpha}}}.$$

Ковариантные производные определяются по соответствующим формам Картана:

$$\mathcal{D}_\alpha = D_\alpha - i(\bar{\psi}^{\dot{\beta}} D_\alpha \psi^\beta + \psi^\beta D_\alpha \bar{\psi}^{\dot{\beta}}) \mathcal{D}_{\beta\dot{\beta}}, \quad \mathcal{D}_{\alpha\dot{\alpha}} = (E^{-1})_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}} \partial_{\beta\dot{\beta}}, \quad (4.1)$$

где

$$D_\alpha = \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}},$$

$$E_{\alpha\dot{\alpha}}^{\beta\dot{\beta}} = \delta_\alpha^\beta \delta_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} - i\psi^\beta \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}} - i\bar{\psi}^{\dot{\beta}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \psi^\beta.$$

Теперь можно перейти к ковариантной версии связей на ψ^α и $\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}$, которая задает как супербранное обобщение $N = 1$, $d = 4$ векторного мультиплета, так и ковариантные уравнения движения для этой системы. Эта система уравнений представляет собой прямую ковариантизацию условий неприводимости и уравнения движения для свободного максвелловского $N = 1$, $d = 4$ суперполя (суперполевой ковариантной напряженности):

$$\bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \psi_\alpha = 0, \quad \mathcal{D}_\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = 0, \quad (4.2a)$$

$$\mathcal{D}^\alpha \psi_\alpha = 0, \quad \bar{\mathcal{D}}_{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} = 0. \quad (4.2b)$$

Уравнения (4.2а) представляют собой ковариантизацию плоского $N = 1$ условия киральности, а (4.2б) обобщают тождество Бианки и уравнение движения максвелловского $N = 1$ суперполя. Как обсуждалось в работе [11], этот набор суперполевых уравнений самосогласован и одновременно совместен с алгеброй ковариантных производных (4.1). Для физических бозонных компонент суперполей ψ и $\bar{\psi}$,

$$V^{\alpha\beta} \equiv \mathcal{D}^\alpha \psi^\beta|_{\theta=0}, \quad \bar{V}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} \equiv \bar{\mathcal{D}}^{\dot{\alpha}} \bar{\psi}^{\dot{\beta}}|_{\theta=0},$$

суперполевые уравнения в пределе нулевых фермионов приводят к следующим уравнениям:

$$\partial_{\alpha\dot{\alpha}} V^{\alpha\beta} - V_\alpha^\gamma \bar{V}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \partial_{\gamma\dot{\gamma}} V^{\alpha\beta} = 0, \quad \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{V}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} - V_\alpha^\gamma \bar{V}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\gamma}} \partial_{\gamma\dot{\gamma}} \bar{V}^{\dot{\alpha}\dot{\beta}} = 0. \quad (4.3)$$

В работе [11] было показано, что эти уравнения, как и аналогичные уравнения D2-браны (см. (3.4)), эквивалентны стандартному уравнению движения $d = 4$ теории БИ и тождеству Бианки для ковариантной напряженности поля Максвелла.

На суперполевым уровне переопределение полей, которое преобразует уравнения БИ из “скрытой” формы (4.3) к “каноническому” виду, отвечает переходу от нелинейных голдстоуновских фермионов ψ_α и $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ к стандартным максвелловским суперполевым напряженностям W_α и $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$. Нелинейное действие в работах [5], [6], [21] было построено в терминах суперполей W_α и $\bar{W}_{\dot{\alpha}}$. Преимущество эквивалентной формы записи (4.2) уравнений движения и тождеств Бианки через ковариантные величины состоит в том, что она делает вторую (“скрытую”) суперсимметрию данной системы явной.

4.2. Линейная и нелинейная реализации $N = 2 \rightarrow N = 1$ ЧНГС. Установим теперь точное соответствие между этими двумя реализациями ЧНГС и воспроизведем предложенное в работах [5], [6], [21] суперсимметричное действие БИ с помощью универсального метода, основанного на связи линейных и нелинейных реализаций ЧНГС и уже использованного выше.

Начнем с $N = 2$, $d = 4$ мультиплета Голдстоуна–Максвелла [5], [14], [15]. В $N = 2$ суперпространстве $(x^{\alpha\dot{\alpha}}, \theta_i^\alpha, \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i})$ этот мультиплет задается следующей деформацией [15] стандартных связей для максвелловского $N = 2$ суперполя:

$$D^{ik}W - \bar{D}^{ik}\bar{W} = iM^{ik}, \quad (4.4a)$$

$$D_\alpha^i \bar{W} = \bar{D}_{\dot{\alpha}i} W = 0, \quad (4.4b)$$

где

$$D_\alpha^i = \frac{\partial}{\partial \theta_i^\alpha} - i\bar{\theta}^{\dot{\alpha}i} \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad \bar{D}_{\dot{\alpha}i} = -\frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}i}} + i\theta_i^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}}, \quad D^{ik} = D^{\alpha i} D_\alpha^k, \quad \bar{D}^{ik} = \bar{D}_{\dot{\alpha}i} \bar{D}^{\dot{\alpha}k},$$

$M^{ik} = M^{ki}$ – триплет констант, который явно нарушает группу автоморфизмов $N = 2$ суперсимметрии $SU(2)_A$ до подгруппы $U(1)_A$ и удовлетворяет условию псевдовещественности

$$\overline{M^{ik}} = \epsilon_{in} \epsilon_{km} M^{nm}.$$

На компонентном языке деформация (4.4a) сводится к появлению постоянной мнимой добавки $\sim M^{ik}$ к изотриплету вспомогательных полей, входящих в $N = 2$ максвелловский мультиплет.

Перейдем теперь к $N = 1$ суперполевому описанию, переопределив грассмановы координаты и спинорные производные следующим образом:

$$\theta_1^\alpha \equiv \theta^\alpha, \quad \theta_2^\alpha \equiv \zeta^\alpha, \quad D_\alpha^1 \equiv D_\alpha, \quad D_\alpha^2 \equiv D_\alpha^\zeta.$$

Чтобы обеспечить спонтанное нарушение S -суперсимметрии вне массовой поверхности (эта симметрия действует как ζ -суперсдвиги) при ненарушенной Q -суперсимметрии, следует выбрать следующую “систему отсчета” по отношению к явно нарушенной группе $SU(2)_A$:

$$M^{12} = 0, \quad M^{11} = M^{22} = m,$$

где m – вещественная константа. Как и в случае D2-браны, эта константа фиксирована с точностью до масштабных преобразований суперполей W . Удобно выбрать $m = -2$. Также удобно выбрать такой базис в $N = 2$ суперпространстве, в котором киральность по отношению к переменной ζ^α становится явной:

$$\bar{D}_\alpha^\zeta = -\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}}, \quad D_\alpha^\zeta = \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} - 2i\bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}.$$

В этом базисе связи (4.4) приводят к следующей структуре суперполя $W(x, \theta, \zeta)$:

$$W = i\phi + i\zeta^\alpha W_\alpha - i\frac{1}{2}\zeta^2 \left(1 + \frac{1}{2}\bar{D}^2\bar{\phi}\right), \quad (4.5)$$

где ϕ и W_α – киральные $N = 1$ суперполя, $\bar{D}_\alpha\phi = \bar{D}_\alpha W_\alpha = 0$, а фермионное суперполе W_α удовлетворяет тождеству Бианки, характерному для $N = 1$ максвелловского суперполя:

$$D^\alpha W_\alpha + \bar{D}_{\dot{\alpha}}\bar{W}^{\dot{\alpha}} = 0.$$

Выбор числовых множителей в (4.5) обусловлен удобством дальнейших вычислений.

Преобразования S -суперсимметрии для $N = 2$ суперполя W

$$\delta_\eta W = -\left[\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial \zeta^\alpha} + \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}^{\dot{\alpha}}} + 2i\zeta^\alpha \partial_{\alpha\dot{\alpha}}\right)\right] W$$

приводят к следующим преобразованиям для его $N = 1$ суперполевых составляющих ϕ и W_α :

$$\begin{aligned} \delta_\eta \phi &= -(\eta W), & \delta_\eta \bar{\phi} &= -(\bar{W}\bar{\eta}), \\ \delta_\eta W_\alpha &= \eta_\alpha \left(1 + \frac{1}{2}\bar{D}^2\bar{\phi}\right) + 2i\bar{\eta}^{\dot{\alpha}}\partial_{\alpha\dot{\alpha}}\phi, & \delta_\eta \bar{W}_{\dot{\alpha}} &= \overline{(\delta_\eta W_\alpha)}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Суперполе W_α при преобразованиях S -суперсимметрии претерпевает неоднородный сдвиг, пропорциональный η_α (и параметру нарушения $SU(2)_A$ -симметрии), а потому представляет собой голдстоуновский фермион линейной реализации для рассматриваемого $N = 2 \rightarrow N = 1$, $d = 4$ сценария ЧНГС (т.е. это суперполе есть $N = 1$ суперполе Голдстоуна–Максвелла).

Теперь можно воспользоваться алгоритмическим процессом перехода к соответствующей нелинейной реализации, уже объясненным на примерах предыдущих разделов. Построим для этого конечные η -преобразования суперполей ϕ и W_α , начиная с инфинитезимальных преобразований (4.6),

$$\{\phi(\eta), W_\alpha(\eta)\} = \left(1 + \delta_\eta + \frac{1}{2}\delta_\eta^2 + \frac{1}{3!}\delta_\eta^3 + \frac{1}{4!}\delta_\eta^4\right) \{\phi, W_\alpha\},$$

затем перенесем параметры $\eta_\alpha, \bar{\eta}_{\dot{\alpha}}$ налево и заменим их голдстоуновскими фермионами из исходной нелинейной реализации: $\eta_\alpha \rightarrow -\psi_\alpha$, $\bar{\eta}_{\dot{\alpha}} \rightarrow -\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$. Прямым вычислением можно проверить, что объекты $\tilde{\phi} \equiv \phi(-\psi)$, $\tilde{W}_\alpha \equiv W_\alpha(-\psi)$ преобразуются однородно (хотя и нелинейно) при η -преобразованиях,

$$\delta_\eta \{\tilde{\phi}, \tilde{W}_\alpha\} = i(\psi^\alpha \bar{\eta}^{\dot{\alpha}} - \eta^\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}}) \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \{\tilde{\phi}, \tilde{W}_\alpha\},$$

и ведут себя как обыкновенные $N = 1$ суперполя относительно ненарушенных ϵ -суперсдвигов, действующих в $N = 1$ суперпространстве $(x, \theta, \bar{\theta})$. Таким образом, можно наложить ковариантные связи

$$\tilde{\phi} = \tilde{W}_\alpha = 0.$$

Явные соотношения между ϕ, W_α и ψ_α , задаваемые этими связями, имеют вид

$$\phi = -\frac{1}{2}\psi^2 \left(1 + \frac{1}{2}\bar{D}^2 \bar{\phi}\right) - i\psi^\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \phi - i\psi^2 \bar{\psi}_{\dot{\alpha}} \partial^{\dot{\alpha}\beta} W_\beta - \frac{3}{8}\psi^4 \square \phi, \quad (4.7)$$

$$W_\alpha = \psi_\alpha \left(1 + \frac{1}{2}\bar{D}^2 \bar{\phi}\right) + 2i\bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \phi + i(\psi_\alpha \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\beta\dot{\alpha}} W^\beta + \psi_\beta \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} W^\beta) + \\ + \frac{1}{2} \left(\bar{\psi}^2 \psi_\alpha \square \phi - \frac{i}{2}\psi^2 \bar{\psi}^{\dot{\alpha}} \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \bar{D}^2 \bar{\phi}\right) - \frac{1}{8}\psi^4 \square W_\alpha, \quad \square \equiv \partial_{\alpha\dot{\alpha}} \partial^{\dot{\alpha}\alpha}. \quad (4.8)$$

Эти уравнения выглядят гораздо сложнее, чем в предшествующих примерах, тем не менее их можно решить, следуя тому же общему алгоритму. Используем сначала соотношение (4.8) (и сопряженное ему), для того чтобы выразить ψ_α и $\bar{\psi}$ через $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$ и их x -производные, а затем подставим полученные выражения в уравнение (4.7) и сопряженное ему, получив таким образом ковариантные соотношения между $\phi, \bar{\phi}$ и $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$. Эти соотношения, в свою очередь, можно использовать, для того чтобы выразить $\phi, \bar{\phi}$ через $W_\alpha, \bar{W}_{\dot{\alpha}}$ (или через $\psi_\alpha, \bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$ ввиду соотношения эквивалентности между этими

двумя видами голдстоуновских фермионов). Технически более простой способ получения окончательных соотношений состоит в следующем. Выражаем W^2 из (4.8) и в полученном выражении

$$W^2 = \psi^2 \left(1 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \bar{\phi} \right)^2 + \dots$$

исключаем все x -производные суперполей ϕ и W_α (обозначенные многоточием) в терминах ψ_α , используя свойства нильпотентности ψ_α и $\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}$, а также редукционные формулы типа

$$\bar{\psi}^2 (\partial \phi \cdot \partial \phi) = -\frac{1}{2} \psi^4 (\partial \psi^\alpha \cdot \partial \psi_\alpha) \left(1 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \bar{\phi} \right)^2, \quad \psi^4 \square \phi = -\psi^4 (\partial \psi^\alpha \cdot \partial \psi_\alpha) \left(1 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \bar{\phi} \right),$$

которые следуют из (4.7) и (4.8). Та же процедура применяется к аналогичным членам в формуле (4.7). На следующем этапе подставляем $\psi^2 = W^2 (1 + \bar{D}^2 \bar{\phi} / 2)^{-2} + \dots$ в выражение (4.7). Все “лишние” члены взаимно сокращаются, и в итоге получаются простые соотношения

$$\phi = -\frac{1}{2} \frac{W^2}{1 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \bar{\phi}}, \quad \bar{\phi} = -\frac{1}{2} \frac{\bar{W}^2}{1 + \frac{1}{2} D^2 \phi}, \quad (4.9)$$

которые совпадают с выражениями, постулированными в работе [5] и выведенными из условия нильпотентности в работе [6]. Таким образом, показано, что те же самые соотношения можно получить, применяя общую процедуру к данному случаю. Такой способ вывода предпочтительнее, поскольку он позволяет установить прямую связь с “канонической” нелинейной реализацией через уравнения (4.7) и (4.8). В частности, отметим соотношение

$$\psi^4 = \psi^2 \bar{\psi}^2 = W^2 \bar{W}^2 \left[\left(1 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \bar{\phi} \right) \left(1 + \frac{1}{2} D^2 \phi \right) \right]^{-2}.$$

Как было показано в работах [5], [6], киральное суперполе ϕ представляет собой лагранжеву плотность голдстоуновского суперполя, отвечающего ЧНГС $N = 2 \rightarrow N = 1$ (в $N = 2$ суперполевой формулировке эта плотность есть член Файе–Илиопулоса). Соответствующая теория описывает $N = 1$ суперрасширение $d = 4$ теории БИ со второй скрытой $N = 1$ суперсимметрией или, что эквивалентно, заполняющую пространство D3-брану в фиксированной (статической) калибровке и на плоском фоне. Для полноты картины приведем решение уравнения (4.9) (см. [5]):

$$\phi = -\frac{1}{2} \left\{ W^2 + \frac{1}{2} \bar{D}^2 \frac{W^2 \bar{W}^2}{1 - \frac{1}{2} A + \sqrt{1 - A + \frac{1}{4} B^2}} \right\}, \quad (4.10)$$

где

$$A \equiv \frac{1}{2} (D^2 W^2 + \bar{D}^2 \bar{W}^2), \quad B \equiv \frac{1}{2} (D^2 W^2 - \bar{D}^2 \bar{W}^2).$$

В принципе, используя явные соотношения (4.7) и (4.8), можно непосредственно проверить (как в п. 2.2), что уравнения движения, отвечающие лагранжиану (4.10), эквивалентны уравнениям (4.2), полученным в рамках исходной нелинейной реализации ЧНГС $N = 2 \rightarrow N = 1$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В статье был дан краткий обзор характерных черт подхода к супербранам, основанного на концепции ЧНГС, и был представлен ряд новых результатов в развитие этого подхода. В частности, было показано, что метод построения действий для голдстоуновских суперполей, основанный на общей связи линейных и нелинейных реализаций ЧНГС [17], [18], [26], успешно применим не только в ранее известных простых примерах [17], [18], но и в более сложных и содержательных моделях, включая заполняющую пространство D3-брану ($N = 2 \rightarrow N = 1$ теория БИ). В этом обзоре из-за недостатка места пришлось опустить обсуждение таких интересных случаев, как $N = 4 \rightarrow N = 2$ и $N = 8 \rightarrow N = 4$ теории БИ (отвечающие D3- и D6-супербранам в размерностях $D = 6$ и $D = 10$) [12], [13]. Эти теории предоставляют новые возможности для применения техники, использованной в данной работе. Желательно также достичь полного понимания взаимосвязи подхода ЧНГС и подхода, основанного на идее супервложений [29]. В недавних работах [30]–[32] ЧНГС-действия для $N = 1$, $D = 4$ супермембраны (2.9), (2.10) и для D2-супербраны (3.7), (3.8), впервые построенные в работе [7], были переоткрыты в рамках подхода супервложений, а также была предпринята попытка [5] вывести подобным образом ЧНГС-действие для D3-браны. Было бы важно понять линейные реализации ЧНГС и их связь с нелинейными реализациями с точки зрения теории супервложений.

Благодарности. Автор признателен С. Беллуччи и С. Кривоносу, в сотрудничестве с которыми были получены некоторые из результатов, обсуждавшихся в данной статье. Автор благодарит их, а также Ф. Дельдюка, А. Капустникова, О. Лехтенфельда, Д. Сорокина, К. Стелла и Б. Зупника за многочисленные полезные обсуждения. Автор благодарен организаторам семинара “Классические и квантовые интегрируемые системы” за приглашение выступить и за теплое гостеприимство.

Работа была частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (грант № 99-02-18417), фондом RFBR–CNRS (грант № 98-02-22034) и NATO (грант № PST.CLG 974874).

Список литературы

- [1] *J. Bagger, J. Wess.* Phys. Lett. B. 1984. V. 138. P. 105.
- [2] *J. Hughes, J. Liu, J. Polchinski.* Phys. Lett. B. 1986. V. 180. P. 370; *J. Hughes, J. Polchinski.* Nucl. Phys. B. 1986. V. 278. P. 147.
- [3] *A. Achucarro, J. Gauntlett, K. Itoh, P. K. Townsend.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 314. P. 129.
- [4] *J. Bagger, A. Galperin.* Phys. Lett. B. 1994. V. 336. P. 25; 1997. V. 412. P. 296.
- [5] *J. Bagger, A. Galperin.* Phys. Rev. D. 1997. V. 55. P. 1091.
- [6] *M. Roček, A. Tseytlin.* Phys. Rev. D. 1999. V. 59. P. 106001.
- [7] *E. Ivanov, S. Krivonos.* Phys. Lett. B. 1999. V. 453. P. 237.
- [8] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Phys. Lett. B. 1999. V. 460. P. 348.
- [9] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Fortschr. Phys. 2000. V. 48. P. 19.
- [10] *P. West.* Automorphisms, nonlinear realizations, and branes. hep-th/0001216.
- [11] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Phys. Lett. B. 2000. V. 482. P. 233.

- [12] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Phys. Lett. B. 2001. V. 502. P. 279.
- [13] *S. Bellucci, E. Ivanov, S. Krivonos.* Towards the complete $N = 2$ superfield Born-Infeld action with partially broken $N = 4$ supersymmetry. hep-th/0101195.
- [14] *I. Antoniadis, H. Partouche, T. R. Taylor.* Phys. Lett. B. 1996. V. 372. P. 83.
- [15] *Е. А. Иванов, Б. М. Зупник.* ЯФ. 1999. Т. 62. № 6. С. 1110.
- [16] *Б. М. Зупник.* Phys. Lett. B. 1999. V. 461. P. 203; *Б. М. Зупник.* ТМФ. 2000. Т. 123. № 1. С. 57.
- [17] *F. Delduc, E. Ivanov, S. Krivonos.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 576. P. 196.
- [18] *E. Ivanov, S. Krivonos, O. Lechtenfeld, B. Zupnik.* Nucl. Phys. B. 2001. V. 600. P. 235.
- [19] *A. Kapustnikov, A. Shcherbakov.* Linear and nonlinear realizations of superbranes. hep-th/01-04196.
- [20] *A. A. Tseytlin.* Born-Infeld action, supersymmetry and string theory. hep-th/9908105.
- [21] *S. Cecotti, S. Ferrara.* Phys. Lett. B. 1987. V. 187. P. 335.
- [22] *S. Ketov.* Mod. Phys. Lett. A. 1999. V. 14. P. 501; *Class. Q. Grav.* 2000. V. 17. P. L91.
- [23] *S. M. Kuzenko, S. Theisen.* Fortsch. Phys. 2001. V. 49. P. 273; *JHEP.* 2000. V. 0003. P. 034.
- [24] *M. Aganagic, C. Popescu, J. H. Schwarz.* Nucl. Phys. B. 1997. V. 495. P. 99.
- [25] *S. Coleman, J. Wess, B. Zumino.* Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 2239; *C. Callan, S. Coleman, J. Wess, B. Zumino.* Phys. Rev. 1969. V. 177. P. 2247; *Д. В. Волков.* ЭЧАЯ. 1973. Т. 4. С. 3; *V. I. Ogievetsky.* Acta Univ. Wratislaviensis (Wroclaw). 1974. V. 207. P. 227.
- [26] *E. Ivanov, A. Kapustnikov.* J. Phys. A. 1978. V. 11. P. 2375; *Nucl. Phys. B.* 1990. V. 333. P. 439.
- [27] *Е. А. Иванов, В. И. Озиевецкий.* ТМФ. 1975. Т. 25. № 2. С. 164.
- [28] *E. A. Ivanov, S. O. Krivonos, V. M. Leviant.* J. Phys. A. 1989. V. 22. P. 4201.
- [29] *D. Sorokin.* Phys. Rep. 2000. V. 329. P. 1.
- [30] *P. Pasti, D. Sorokin, M. Tonin.* Nucl. Phys. B. 2000. V. 591. P. 109; Geometrical aspects of superbrane dynamics. hep-th/0011020.
- [31] *I. Bando, P. Pasti, A. Pokotilov, D. Sorokin, M. Tonin.* Space filling Dirichlet 3-brane in $N = 2$, $D = 4$ superspace. hep-th/0103152.
- [32] *J. M. Drummond, P. S. Howe.* Codimension zero superembeddings. hep-th/0103191.