Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Исаев, О. В. Огиевецкий, БРСТ-оператор для квантовых алгебр Ли и дифференциальное исчисление на квантовых группах, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 298–316

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf537>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 17:57:01

БРСТ-ОПЕРАТОР ДЛЯ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР ЛИ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ НА КВАНТОВЫХ ГРУППАХ

Для алгебры Хопфа $\mathcal{A}$ определена структура дифференциальных комплексов на двух дуальных внешних алгебрах Хопфа: 1) внешнем расширении $\mathcal{A}$ и 2) внешнем расширении дуальной алгебры $\mathcal{A}^*$. Дубль Гейзенберга этих двух внешних алгебр Хопфа определяет дифференциальную алгебру для дифференциального исчисления Картана на алгебре $\mathcal{A}$. Первый дифференциальный комплекс – это аналог комплекса де Рама. В случае, когда $\mathcal{A}^*$ является универсальной обертывающей (супер)алгебры Ли, второй комплекс совпадает со стандартным комплексом. Дифференциал реализуется как (анти)коммутатор с БРСТ-оператором Q . Приведено рекуррентное соотношение, которое однозначно определяет оператор Q . Для случая квантовой алгебры Ли $U_q(gl(N))$ явно построены БРСТ- и анти-БРСТ-операторы и сформулирована теорема о разложении Ходжа.

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория биковариантного дифференциального исчисления на алгебрах Хопфа $\mathcal{A}$ была разработана Вороновичем [1] (в качестве обзоров мы рекомендуем [2]–[4]) на основе аксиоматики некоммутативной дифференциальной геометрии, предложенной Конном [5]. Затем в [6], [7] было показано, что теория Вороновича применима для описания дифференциальных исчислений на квантовых аналогах некоторых групп Ли и может быть адаптирована для R -матричного формализма, предложенного в работе [8]. Специальный пример $\text{Fun}(GL_q(N))$ детально рассматривался в [6], [9]–[11] (см. также [4] и ссылки, приведенные в этом обзоре).

В работах [4], [6], [11] было установлено, что $GL_q(N)$ -дифференциальная алгебра есть алгебра Пуанкаре–Биркгофа–Витта (ПБВ) и, следовательно, действительно описывает квантовую деформацию классической дифференциальной алгебры на $GL(N)$.

*Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия.

E-mail: isaevap@thsun1.jinr.ru

†Center of Theoretical Physics, Luminy, Marseille, France; Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: oleg@cpt.univ-mrs.fr

Дифференциальная алгебра ПБВ-типа на $SL_q(N)$ была построена в работе [12] (см. также [13]).

Однако дальнейший анализ (см. [14]) показал, что биковариантные дифференциальные алгебры [7], [15] исчисления Вороновича на $\text{Fun}(SO_q(N))$ и $\text{Fun}(Sp_q(2n))$ (в действительности, их биковариантные подалгебры дифференциальных 1-форм) имеют “неправильные” размерности, т.е. не являются ПБВ-подалгебрами. Таким образом, эти некоммутативные алгебры не могут интерпретироваться как квантовые деформации соответствующих классических дифференциальных алгебр.

В данной статье мы связываем теорию Вороновича с деформацией БРСТ-теории (обзор по БРСТ-теории см. в [16]; обсуждение связи БРСТ-теории с теорией когомологий алгебр Ли можно найти в [17], [18]). Эта связь уже упоминалась в [19], [20] в контексте обсуждения так называемых “квантово-групповых калибровочных теорий” (о квантово-групповых калибровочных теориях и соответствующей некоммутативной геометрии см. [21], а также ссылки, приведенные там). Главная идея заключается в том, что в теории Вороновича внешний дифференциал d , действующий на внешнем расширении алгебры Хопфа $\mathcal{A}$, должен генерироваться нильпотентным оператором, представляющим собой не что иное, как БРСТ-заряд, связанный с деформированной алгеброй векторных полей на $\mathcal{A}$. Построение явной формулы для этого БРСТ-оператора и есть главная цель данной статьи.

Во втором разделе мы вводим понятие квантовой алгебры Ли. В третьем разделе собраны результаты о картановском дифференциальном исчислении на алгебрах Хопфа (это исчисление есть расширение дифференциального исчисления Вороновича) и показано, как квантовые алгебры Ли естественно возникают в рамках этих исчислений. БРСТ-оператор для квантовых алгебр Ли строится в разделе 4. В разделе 5 мы детально рассматриваем специальный случай квантовой алгебры Ли $U_q(gl(N))$. В этом случае нам удастся явно построить БРСТ- и анти-БРСТ-операторы и сформулировать теорему о разложении Ходжа.

2. КВАНТОВЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Квантовая алгебра Ли (см. [1], [2], [19], [22]) определяется двумя тензорами $-C_{ij}^k$ и σ_{ij}^{mk} (индексы принадлежат некоторому множеству $\mathcal{N}$, скажем $\mathcal{N} = \{1, \dots, N\}$). По определению матрица σ_{ij}^{mk} имеет собственное значение 1; требуется, чтобы $(P_{(1)})_{ij}^{mk} \times C_{mk}^n = 0$, где $P_{(1)}$ — проектор на подпространство собственных векторов оператора σ , отвечающих собственному значению 1.

По определению квантовая алгебра Ли порождается элементами χ_i , $i = 1, \dots, N$, которые удовлетворяют соотношениям

$$\chi_i \chi_j - \sigma_{ij}^{mk} \chi_m \chi_k = C_{ij}^k \chi_k. \quad (1)$$

Здесь структурные константы C_{ij}^k подчиняются условиям

$$C_{ni}^p C_{pj}^l = \sigma_{ij}^{mk} C_{nm}^p C_{pk}^l + C_{ij}^p C_{np}^l \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow C_{|12\rangle}^{\langle 1|} C_{|13\rangle}^{\langle 4|} = \sigma_{23} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} C_{|13\rangle}^{\langle 4|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|} C_{|13\rangle}^{\langle 4|}, \quad (2)$$

$$C_{ni}^k \sigma_{kq}^{pm} = \sigma_{iq}^{sj} \sigma_{ns}^{pk} C_{kj}^m \Leftrightarrow C_{|12\rangle}^{\langle 1|} \sigma_{13} = \sigma_{23} \sigma_{12} C_{|23\rangle}^{\langle 3|}, \quad (3)$$

$$(\sigma_{im}^{pj} C_{qp}^n + \delta_q^n C_{im}^j) \sigma_{nj}^{ks} = \sigma_{qi}^{jn} (\sigma_{nm}^{ps} C_{jp}^k + \delta_j^k C_{nm}^s) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|}) \sigma_{13} = \sigma_{12} (\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|}). \quad (4)$$

Матрица σ_{ij}^{mk} удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера

$$\sigma_{i_1 i_2}^{j_1 j_2} \sigma_{j_2 i_3}^{n_2 k_3} \sigma_{j_1 n_2}^{k_1 k_2} = \sigma_{i_2 i_3}^{j_2 j_3} \sigma_{i_1 j_2}^{k_1 n_2} \sigma_{n_2 j_3}^{k_2 k_3} \Leftrightarrow \sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{12} = \sigma_{23} \sigma_{12} \sigma_{23}. \quad (5)$$

В правых частях выражений (2)–(5) мы использовали матричные обозначения Фаддеева–Решетихина–Тахтаджяна [8]; индексы $\{1, 2, 3, \dots\}$ – номера векторных пространств, например $f_1 = f_{j_1}^{i_1}$ обозначает матрицу, которая действует в первом векторном пространстве. В добавление к этому мы используем “входящие” и “выходящие” индексы, например $\Omega^{\langle 1|} = \Omega^{i_1}$ и $\gamma_{|1\rangle} = \gamma_{j_1}$ обозначают ковектор с одним “выходящим” индексом и вектор с одним “входящим” индексом, соответственно. Таким образом, в этих обозначениях матрица f_1 может быть записана в виде $f_1 = f_{|1\rangle}^{\langle 1|}$.

Заметим, что соотношения (2)–(5) могут быть оправданы, если мы рассмотрим моном $\chi_{|1\rangle} \chi_{|2\rangle} \chi_{|3\rangle}$ третьей степени и переупорядочим его двумя разными способами, используя определяющие соотношения (1). Требование совпадения результатов этих двух переупорядочений дает соотношение

$$0 = (\sigma_{12} \sigma_{23} \sigma_{12} - \sigma_{23} \sigma_{12} \sigma_{23}) \chi_{|1\rangle} \chi_{|2\rangle} \chi_{|3\rangle} + \\ + [(\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|}) \sigma_{13} - \sigma_{12} (\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|})] \chi_{|1\rangle} \chi_{|3\rangle} - \\ - [C_{|12\rangle}^{\langle 1|} \sigma_{13} - \sigma_{23} \sigma_{12} C_{|23\rangle}^{\langle 3|}] \chi_{|1\rangle} \chi_{|3\rangle} - \\ - ((1 - \sigma_{23}) C_{|12\rangle}^{\langle 1|} + C_{|23\rangle}^{\langle 3|}) C_{|13\rangle}^{\langle 4|} \chi_{|4\rangle}. \quad (6)$$

Это действительно тождество: кубический член исчезает в силу (5), квадратичные члены обращаются в нуль вследствие (4) и (3), а последний член исчезает благодаря тождеству Якоби (2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Заметим, что для получения тождества (6) не обязательно в точности требовать выполнения соотношений (3) и (4), т.к. только их комбинация входит в (6). Для того чтобы получить соотношения (3) и (4) как условия совместности, необходимо рассмотреть следующую ситуацию. Для каждого целого M пусть $\chi_i^{(M)}$ будет копией генераторов χ_i . Соотношения между различными копиями зададим в виде

$$\chi_{|1\rangle}^{(K)} \chi_{|2\rangle}^{(M)} = \sigma_{12} \chi_{|1\rangle}^{(M)} \chi_{|2\rangle}^{(K)} + C_{|12\rangle}^{\langle 3|} \chi_{|3\rangle}^{(K)} \quad \text{для } K < M. \quad (7)$$

Тогда, упорядочивая двумя различными способами выражение $\chi_{|1\rangle}^{(L)} \chi_{|2\rangle}^{(M)} \chi_{|3\rangle}^{(K)}$ с $L < M < K$, получим уравнение (5) при кубических членах по χ , а при членах более низкого порядка возникает тождество

$$\begin{aligned} & [(\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{[1]} + C_{|23\rangle}^{[3]}) \sigma_{13} - \sigma_{12} (\sigma_{23} C_{|12\rangle}^{[1]} + C_{|23\rangle}^{[3]})] \chi_{|1\rangle}^{(M)} \chi_{|3\rangle}^{(L)} - \\ & - [C_{|12\rangle}^{[1]} \sigma_{13} - \sigma_{23} \sigma_{12} C_{|23\rangle}^{[3]}] \chi_{|1\rangle}^{(K)} \chi_{|3\rangle}^{(L)} - \\ & - ((1 - \sigma_{23}) C_{|12\rangle}^{[1]} - C_{|23\rangle}^{[3]}) C_{|13\rangle}^{[4]} \chi_{|4\rangle}^{(L)} = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Это тождество полностью эквивалентно набору соотношений (2)–(4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Тождество Якоби (2) обеспечивает существование присоединенного представления, в котором генератор χ_i реализуется матрицей $(\text{ad}(\chi_i))_k^j = C_{ki}^j$. Кроме того, каждая квантовая алгебра Ли обладает тривиальным одномерным представлением, в котором каждый генератор χ_i действует как ноль.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Квантовые алгебры Ли с определяющими соотношениями (1)–(5) обобщают обычные (супер)алгебры Ли. В недеформированном случае, когда $\sigma_{ij}^{mk} = (-1)^{(m)(k)} \delta_j^m \delta_i^k$ – матрица суперперестановки (здесь $(m) = 0, 1 \pmod{2}$ обозначает четность генератора χ_m ; в этом случае (5) выполняется автоматически и $\sigma^2 = 1$), уравнения (1) и (2) соответственно совпадают с определяющими соотношениями и тождествами Якоби для (супер)алгебр Ли. Наконец, уравнение (3) эквивалентно условию $\mathbb{Z}_2$ -однородности: $C_{jk}^i = 0$ при $(i) \neq (j) + (k)$. Уравнение (4) следует из (3).

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В [19] было замечено, что соотношения (2)–(5) могут быть записаны как уравнения Янга–Бакстера для матрицы S_{CD}^{AB} , где заглавные латинские индексы $A, B, \dots$ принадлежат набору $0 \cup \mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N\}$ (у матрицы σ_{kl}^{ij} индексы принадлежат набору $\mathcal{N}$). Матрица S определяется соотношениями

$$S_{kl}^{ij} = \sigma_{kl}^{ij}, \quad S_{kl}^{0j} = C_{kl}^j, \quad S_{B0}^{0A} = \delta_B^A, \quad S_{0B}^{A0} = \delta_B^A, \quad (9)$$

а остальные компоненты S – нули.

3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ КАРТАНА НА АЛГЕБРАХ ХОПФА

В этом разделе мы показываем, что квантовые алгебры Ли (1) естественно возникают (как квантовые аналоги векторных полей) в контексте биковариантного дифференциального исчисления на алгебрах Хопфа.

3.1. Внешние алгебры Хопфа. Пусть $\mathcal{A}(\Delta, \epsilon, S)$ – алгебра Хопфа и $\mathcal{A}^*$ – дуальная к $\mathcal{A}$ алгебра Хопфа. Коумножение, а также левое и правое $\mathcal{A}$ -кодействия на $\mathcal{A}$ имеют вид

$$\Delta(a) = a_{(1)} \otimes a_{(2)} \equiv \Delta_{L,R}(a), \quad a \in \mathcal{A}. \quad (10)$$

Здесь для коумножения использована стандартная запись Свидлера. Над алгеброй $\mathcal{A}$ можно определить (см. [1]) биковариантный бимодуль (бимодуль Хопфа) $\Gamma^{(1)}$ как линейное пространство с левоинвариантными базисными элементами $\{\omega^i\}$ такими, что левое и правое $\mathcal{A}$ -кодействия на $\Gamma^{(1)}$ имеют вид

$$\Delta_L(\omega^i) = 1 \otimes \omega^i, \quad \Delta_R(\omega^i) = \omega^j \otimes r_j^i, \quad (11)$$

где $r_j^i \in \mathcal{A}$. Так как любой левоинвариантный элемент в $\Gamma^{(1)}$ может быть записан как линейная комбинация базисных элементов $\{\omega^i\}$, то справедливо разложение $S(a_{(1)}) \times \omega^i a_{(2)} = f_j^i(a) \omega^j$, которое переписывается в виде коммутационного соотношения элементов $a \in \mathcal{A}$ с элементами $\omega^i \in \Gamma^{(1)}$:

$$\omega^i a = (f_j^i \triangleright a) \omega^j = a_{(1)} f_j^i(a_{(2)}) \omega^j, \quad (12)$$

где $f_j^i \in \mathcal{A}^*$. Ковариантность (12) по отношению к правому $\mathcal{A}$ -кодействию (10), (11) приводит к основному соотношению на элементы f и r :

$$(f_i^j \triangleright a) r_k^i = r_i^j (a \triangleleft f_k^i) \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (13)$$

Как было показано в [23] (более детальное рассмотрение проведено в [3]), можно расширить алгебру Хопфа $\mathcal{A}$ до внешней алгебры Хопфа $\Gamma^\wedge = \{\mathcal{A} \oplus \Gamma^{(1)} \oplus \Gamma^{(2)} \oplus \dots\}$ с помощью определения Вороновича для ковариантного внешнего произведения

$$\omega^i \wedge \omega^j = \omega^i \otimes \omega^j - \omega^k \otimes \omega^l \sigma_{kl}^{ij} \Rightarrow \omega^{\langle 1|} \wedge \omega^{\langle 2|} = \omega^{\langle 1|} \otimes \omega^{\langle 2|} (1 - \sigma)_{12}, \quad (14)$$

где матрица $\sigma_{kl}^{ij} = f_l^i(r_k^j)$ (аналог матрицы перестановки) удовлетворяет уравнению Янга–Бакстера (5), которое следует из (13), если положить $a = r_n^m$ и затем вычислить спаривание с f_p^l (при этом необходимо воспользоваться явными выражениями для $\Delta(f_j^i)$ и $\Delta(r_j^i)$, см. ниже).

Обобщение внешнего произведения (14) на случай произведения n 1-форм дается формулой

$$\omega^{\langle 1|} \wedge \omega^{\langle 2|} \wedge \dots \wedge \omega^{\langle n|} = \omega^{\langle 1|} \otimes \omega^{\langle 2|} \otimes \dots \otimes \omega^{\langle n|} A_{1 \rightarrow n}. \quad (15)$$

Здесь матричный оператор $A_{1 \rightarrow n}$ – аналог антисимметризатора в n пространствах. Этот оператор определяется индуктивно (см., например, [24]):

$$A_{1 \rightarrow n} = \left(1 - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \sigma_{k \rightarrow n} \right) A_{1 \rightarrow n-1} = \left(1 - \sum_{k=2}^n (-1)^k \sigma_{k \leftarrow 1} \right) A_{2 \rightarrow n}, \quad (16)$$

где $\sigma_{n \leftarrow k} = \sigma_{n-1 \ n} \dots \sigma_{k+1 \ k+2} \sigma_{k \ k+1}$, $\sigma_{k \rightarrow n} = \sigma_{k \ k+1} \sigma_{k+1 \ k+2} \dots \sigma_{n-1 \ n}$ ($n > k$). Если последовательность операторов $A_{1 \rightarrow n}$ обрывается на шаге $n = h+1$ ($A_{1 \rightarrow n} = 0$ для любого $n > h$), то число h называется высотой матрицы σ_{12} .

Расширение коумножения (10) на всю внешнюю алгебру $\Gamma^\wedge$ определяется формулами [23]

$$\Delta(\omega^i) \equiv \Delta_L(\omega^i) + \Delta_R(\omega^i) = 1 \otimes \omega^i + \omega^j \otimes r_j^i, \quad (17)$$

$$\Delta(\omega a) = \Delta(\omega)\Delta(a), \quad \Delta(a\omega) = \Delta(a)\Delta(\omega), \quad (18)$$

где $\otimes$ – градуированное тензорное произведение, а градуировка фиксируется соотношениями: $\deg(\omega) = n$ для $\omega \in \Gamma^{(n)}$. Условие ассоциативности для ωab по отношению к коммутационному соотношению (12) и условие коассоциативности для (17) приводят к формулам коумножений для элементов f_j^i и r_j^i :

$$\Delta(f_j^i) = f_k^i \otimes f_j^k, \quad \Delta(r_j^i) = r_j^k \otimes r_k^i. \quad (19)$$

Другие структурные отображения для f , r и ω получаются из (17), (19):

$$\begin{aligned} \epsilon(r_j^i) &= \delta_j^i = \epsilon(f_j^i), & S(f_k^i)f_j^k &= \delta_j^i = S(r_j^k)r_k^i, \\ \epsilon(\omega^i) &= 0, & S(\omega^i) &= -\omega^j S(r_j^i). \end{aligned} \quad (20)$$

Резюмируя этот пункт, подчеркнем, что знание двух наборов элементов $\{r_j^i\} \in \mathcal{A}$ и $\{f_j^i\} \in \mathcal{A}^*$, которые удовлетворяют (13), достаточно для того, чтобы построить биковариантный бимодуль над $\mathcal{A}$ и затем расширить $\mathcal{A}$ до внешней алгебры Хопфа $\Gamma^\wedge$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пространство $\Gamma^{(k)}$ – это подпространство в $\omega^{\otimes k}$, натянутое на тензоры a , имеющие вид

$$a = \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_k} A_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} a_{j_1 \dots j_k}. \quad (21)$$

Формула $A_{1\dots k} f_1 \dots f_k = f_1 \dots f_k A_{1\dots k}$ предполагает, что умножение элементов из $\Gamma^{(k)}$ и из $\mathcal{A}$ совместно с коммутационным соотношением (12). Для двух заданных форм $a \in \Gamma^{(k)}$ (как в (21)) и $b \in \Gamma^{(l)}$ (с коэффициентами $b_{j_1 \dots j_l}$) определим их внешнее произведение $a \wedge b \in \Gamma^{(k+l)}$ как

$$a \wedge b = \omega^{i_1} \otimes \dots \otimes \omega^{i_{k+l}} A_{i_1 \dots i_{k+l}}^{j_1 \dots j_{k+l}} c_{j_1 \dots j_{k+l}}, \quad (22)$$

где

$$c_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_l} = a_{i_1 \dots i_k} b_{j_1 \dots j_l}. \quad (23)$$

Определение (22), (23) внешнего произведения дифференциальных форм самосогласованно. Действительно, можно изменить a , добавив такое δa , что $A_{1\dots k} \delta a = 0$. Тогда $A_{1\dots k+l} \delta a \wedge b = 0$, т.к. $A_{1\dots k+l}$ (в силу (16)) пропорционально $A_{1\dots k}$, т.е. $A_{1\dots k+l} = Z \cdot A_{1\dots k}$ для некоторого Z . Прямая проверка показывает, что это тензорное произведение ассоциативно.

3.2. Дуальная внешняя алгебра Хопфа. По аналогии с конструкцией предыдущего пункта можно определить биковариантный бимодуль $\Gamma^{(1)*}$ и соответствующую внешнюю алгебру Хопфа над дуальной алгеброй $\mathcal{A}^*$ ($\Delta(h) = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, $h \in \mathcal{A}^*$), вводя два набора элементов $\{\bar{r}_j^i\} \in \mathcal{A}$ и $\{\bar{f}_j^i\} \in \mathcal{A}^*$ таких, что (ср. с (12), (17), (20))

$$\gamma_i h = (\bar{r}_i^j \triangleright h) \gamma_j = h_{(1)} \langle h_{(2)}, \bar{r}_i^j \rangle \gamma_j, \quad (24)$$

$$\Delta(\gamma_i) = 1 \otimes \gamma_i + \gamma_j \otimes \bar{f}_i^j, \quad (25)$$

$$\epsilon(\gamma_i) = 0, \quad S(\gamma_i) = -\gamma_j S(\bar{f}_i^j) \Rightarrow S^{-1}(\gamma_i) = -S^{-1}(\bar{f}_i^j) \gamma_j, \quad (26)$$

где $\langle h, a \rangle = h(a)$ – дуальное спаривание для алгебр Хопфа $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}^*$, а элементы $\{\gamma_i\}$ формируют левоинвариантный базис для бимодуля $\Gamma^{(1)*}$. Как и выше, мы получаем из $\Delta(\gamma_i h) = \Delta(\gamma_i) \Delta(h)$ соотношение (ср. с (13))

$$(\bar{r}_i^j \triangleright h) \bar{f}_j^k = \bar{f}_i^j (h \triangleleft \bar{r}_j^k) \quad \forall h \in \mathcal{A}^*, \quad (27)$$

а внешнее произведение во внешней алгебре Хопфа $\Gamma^{\wedge*} = \mathcal{A}^* \oplus \Gamma^{(1)*} \oplus \Gamma^{(2)*} \oplus \dots$ (с градуировкой $\deg(\gamma) = -n$ для $\gamma \in \Gamma^{(n)*}$) определяется по формулам

$$\gamma_i \wedge \gamma_j = \gamma_i \otimes \gamma_j - \bar{\sigma}_{ij}^{kl} \gamma_k \otimes \gamma_l, \quad \bar{\sigma}_{ij}^{kl} \equiv \bar{r}_i^l (\bar{f}_j^k). \quad (28)$$

Рассмотрим специальный случай, когда $\dim(\Gamma^{(1)}) = \dim(\Gamma^{(1)*})$, и сформулируем условия, при которых внешние алгебры Хопфа $\Gamma^\wedge$ и $\Gamma^{\wedge*}$ дуальны друг к другу. Спаривание алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ можно расширить до невырожденного спаривания внешних алгебр $\Gamma^\wedge$ и $\Gamma^{\wedge*}$:

$$\langle \gamma_i, \omega^j \rangle = \delta_i^j, \quad \langle \Gamma^{(n)*}, \Gamma^{(m)} \rangle \sim \delta^{nm}. \quad (29)$$

Это спаривание согласовано с градуировкой. Соотношения (17), (25) и (29) приводят к уравнению

$$\langle h \gamma_i, a \omega^j \rangle = \langle h, a \rangle \delta_i^j, \quad h \in \mathcal{A}^*, \quad a \in \mathcal{A}. \quad (30)$$

Теперь ясно, что уравнения (29) и (30) связывают наборы элементов $\{r, f\}$ с $\{\bar{r}, \bar{f}\}$. Действительно, с одной стороны, $\langle \gamma_i, \omega^k a \rangle = \langle \Delta(\gamma_i), \omega^k \otimes a \rangle = \bar{f}_i^k(a)$, $\forall a$, а с другой стороны, выводим $\langle \gamma_i, \omega^k a \rangle = \langle \gamma_i, (f_j^k \triangleright a) \omega^j \rangle = f_i^k(a)$ и, следовательно, $\bar{f}_i^k = f_i^k$. Рассматривая спаривание $\langle \gamma_i h, \omega^k \rangle$, мы получаем $\bar{r}_i^k = r_i^k$ и, таким образом, $\bar{\sigma}_{kl}^{ij} = \sigma_{kl}^{ij}$. Это ведет к определению внешнего произведения n элементов γ_i в виде (см. (28)):

$$\gamma_{|1} \wedge \gamma_{|2} \wedge \dots \wedge \gamma_{|n} = A_{1 \rightarrow n} \gamma_{|1} \otimes \gamma_{|2} \otimes \dots \otimes \gamma_{|n}, \quad (31)$$

где операторы $A_{1 \rightarrow n}$ те же самые, что и в (16).

3.3. Дифференциал d и алгебра векторных полей. Предположим, что существует дифференциальное отображение $d: \Gamma^{(n)} \rightarrow \Gamma^{(n+1)}$ ($\Gamma^{(0)} = \mathcal{A}$), квадрат которого равен нулю и которое удовлетворяет правилу Лейбница ($\omega, \omega_i \in \Gamma^\wedge$):

$$d^2(\omega) = 0, \quad d(\omega_1 \omega_2) = d(\omega_1) \omega_2 + (-1)^{\deg(\omega_1)} \omega_1 d(\omega_2). \quad (32)$$

Как было показано в [1], левые и правые кодействия

$$\Delta_L(d(a)) = a_{(1)} \otimes d(a_{(2)}), \quad \Delta_R(d(a)) = d(a_{(1)}) \otimes a_{(2)}$$

совместны с определением биковариантного бимодуля $\Gamma^{(1)}$. Из (17) мы получаем “правило Лейбница” для коумножения:

$$\Delta(d(a)) = (d \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d) \Delta(a) \Rightarrow \Delta d = (d \otimes \text{id} + \text{id} \otimes d) \Delta. \quad (33)$$

Это “правило Лейбница” может быть расширено на всю внешнюю алгебру $\Gamma^\wedge$ (напомним, что $\otimes$ – градуированное тензорное произведение). Так как 1-форма

$$\omega = S(a_{(1)}) da_{(2)} \in \Gamma^{(1)} \quad \forall a \in \mathcal{A}$$

левоинвариантна, то она раскладывается по левоинвариантному базису $\{\omega^i\}$:

$$S(a_{(1)}) da_{(2)} = \sum_i \chi_i(a) \omega^i \Rightarrow d(a) = (\chi_i \triangleright a) \omega^i, \quad (34)$$

где $\chi_i(a)$ – некоторые коэффициенты и $\chi_i \in \mathcal{A}^*$. Применение правил Лейбница (32) и (33) к уравнению (34) дает

$$\Delta(\chi_i) = \chi_j \otimes f_i^j + 1 \otimes \chi_i, \quad (35)$$

$$a \triangleleft \chi_i = (\chi_j \triangleright a) r_i^j. \quad (36)$$

Уравнения (34) и (35) приводят к определениям антипода и коединицы для элементов χ_i :

$$\chi_i(I) = \epsilon(\chi_i) = 0, \quad S(\chi_i) = -\chi_j S(f_i^j) \Rightarrow \chi_i = -S(\chi_j) f_i^j. \quad (37)$$

В соответствии с [1] элементы χ_i интерпретируются как векторные поля над алгеброй Хопфа $\mathcal{A}$.

Коммутационные соотношения для элементов χ_i с произвольными $h \in \mathcal{A}^*$

$$\chi_i h = (r_i^k \triangleright h) \chi_k \quad (38)$$

можно получить из требования невырожденности спаривания алгебр $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Действительно, из (36) следует

$$\langle \chi_i h, a \rangle = \langle h, a \triangleleft \chi_i \rangle = \langle h, (\chi_k \triangleright a) r_i^k \rangle = \langle (r_i^k \triangleright h) \chi_k, a \rangle,$$

и так как элемент $a \in \mathcal{A}$ произволен, получаем коммутационные соотношения (38). Уравнения (38) для $h = \chi_j$ дают определяющие соотношения (1) для элементов χ_i :

$$\chi_i \chi_j = (r_i^k \triangleright \chi_j) \chi_k = \sigma_{ij}^{mk} \chi_m \chi_k + C_{ij}^k \chi_k, \quad C_{ij}^k = \langle \chi_j, r_i^k \rangle. \quad (39)$$

Тождества Якоби (2) для структурных констант C_{jk}^i могут быть получены в результате спаривания уравнения (39) с r_n^l . В качестве другого приложения (36) отметим, что, полагая $a = r_j^i$, можно вывести соотношение

$$C_{ni}^k r_k^m = r_n^k r_i^j C_{kj}^m \Leftrightarrow C_{|12}^{(3)} r_3 = r_1 r_2 C_{|12}^{(3)}, \quad (40)$$

которое приводит к (3) при спаривании с f_q^p . Уравнения (40) можно рассматривать как условия инвариантности структурных констант C_{ni}^k относительно вращений матрицами r_j^i .

Уравнения (27), где $\bar{r}_j^i = r_j^i$ и $\bar{f}_j^i = f_j^i$, для $h = f_n^m$ и $h = \chi_n$ приводят к равенствам

$$\sigma_{12} f_1 f_2 = f_1 f_2 \sigma_{12}, \quad (41)$$

$$(\sigma_{im}^{pj} \chi_p + C_{im}^j) f_j^k = f_i^j f_m^p C_{jp}^k + f_i^k \chi_m, \quad (42)$$

и спаривание (41) и (42) с r_q^s воспроизводит (5) и (4).

Введем теперь набор элементов $a^i \in \mathcal{A}$ таких, что $\langle \chi_i, a^j \rangle = \delta_i^j$. По определению мы имеем $S(a_{(1)}^j) d(a_{(2)}^j) = \omega^j$ и $\epsilon(a^i) = 0$ [1].

Уравнение Маурера–Картана отражает тот факт, что $d^2(a) = 0$. Это уравнение может быть выведено следующим образом:

$$\begin{aligned} d\omega^k &= d(S(a_{(1)}^k) d(a_{(2)}^k)) = -S(a_{(1)}^k) d(a_{(2)}^k) S(a_{(3)}^k) d(a_{(4)}^k) = \\ &= -\chi_i(a_{(1)}^k) \chi_j(a_{(2)}^k) \omega^i \wedge \omega^j = -t_{ij}^k \omega^i \wedge \omega^j = -C_{ij}^k \omega^i \otimes \omega^j, \end{aligned} \quad (43)$$

где $t_{mn}^i \equiv \langle \chi_m \chi_n, a^i \rangle$ и мы воспользовались соотношениями

$$C_{jk}^i = (1 - \sigma)_{jk}^{mn} t_{mn}^i, \quad (44)$$

которые могут быть получены спариванием (39) с a^k .

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Применяя Δ_R к первому соотношению из (34), получаем

$$\chi_i(a_{(2)}) \omega^i \otimes S(a_{(1)}) a_{(3)} = \chi_i(a) \omega^j \otimes r_j^i,$$

в результате элементы r_j^i выражаются через генераторы a^i :

$$\chi_i(a) r_j^i = S(a_{(1)}) \chi_j(a_{(2)}) a_{(3)} \Rightarrow r_j^i = S(a_{(1)}^i) \chi_j(a_{(2)}^i) a_{(3)}^i.$$

С другой стороны, $\chi_i(a^j a) = f_i^j(a) \forall a \in \mathcal{A}$ и, следовательно, элементы r_j^i и f_j^i (которые полностью определяют $\mathcal{A}$ -биковариантный бимодуль) фиксируются элементами $a^i \in \mathcal{A}$ и $\chi_i \in \mathcal{A}^*$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для дальнейшего рассмотрения удобно ввести слегка измененный базис векторных полей $\tilde{\chi}_i$ с помощью формулы $d(a) = \omega^i(\tilde{\chi}_i \triangleright a)$ [25]. Из сравнения этой формулы с (34) следуют соотношения $\chi_i = f_i^j \tilde{\chi}_j \Rightarrow \tilde{\chi}_j = S^{-1}(f_j^i) \chi_i$, и из (35), (37) мы получаем

$$\tilde{\chi}_i = -S^{-1}(\chi_i) \Rightarrow \Delta(\tilde{\chi}_i) = \tilde{\chi}_i \otimes 1 + S^{-1}(f_i^j) \otimes \tilde{\chi}_j.$$

Применяя S^{-1} к (38), выводим

$$h\tilde{\chi}_i = \tilde{\chi}_j \langle h_{(1)}, S(r_i^j) \rangle h_{(2)}. \quad (45)$$

3.4. Дубль Гейзенберга $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ и исчисление Картана. Дифференциальная алгебра для исчисления Картана должна строиться [4], [25], [26] как дубль Гейзенберга $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ алгебр $\Gamma^\wedge$ и $\Gamma^{\wedge*}$. Действие d на элементы дубля Гейзенберга $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ также должно быть продолжено.

Прежде всего мы напомним, что дубль Гейзенберга $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ есть ассоциативная алгебра, которая является произведением двух дуальных алгебр $\Gamma^\wedge, \Gamma^{\wedge*}$ с нетривиальным $\mathbb{Z}_2$ -градуированным правилом кросс-произведения

$$\gamma\omega = (\gamma_{(1)} \triangleright \omega) \gamma_{(2)} = (-1)^{\deg(\gamma_{(1)}) \cdot \deg(\omega_{(2)})} \omega_{(1)} \langle \gamma_{(1)}, \omega_{(2)} \rangle \gamma_{(2)}, \quad (46)$$

где $\omega \in \Gamma^\wedge$ и $\gamma \in \Gamma^{\wedge*}$. Это правило определяет коммутационные соотношения между элементами из $\Gamma^\wedge$ и элементами из $\Gamma^{\wedge*}$.

Несмотря на то что $\Gamma^\wedge$ и $\Gamma^{\wedge*}$ – алгебры Хопфа, их дубль Гейзенберга $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ не является алгеброй Хопфа. Однако $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ все еще обладает некоторыми свойствами ковариантного комодуля. Определим правое $\mathcal{A}$ -кодействие и левое $\mathcal{A}^*$ -кодействие на алгебру $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$, которые сохраняют алгебраическую структуру $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$. Обозначим через $\{e^\alpha\}$ и $\{e_\alpha\}$ базисные элементы в $\mathcal{A}^*$ и $\mathcal{A}$, соответственно. Правое $\mathcal{A}$ -кодействие и левое $\mathcal{A}^*$ -кодействие на $z \in \Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ определяются следующим образом:

$$\Delta_R(z) = C(z \otimes 1)C^{-1}, \quad \Delta_L(z) = C^{-1}(1 \otimes z)C, \quad C \equiv e^\alpha \otimes e_\alpha. \quad (47)$$

Аксиомы

$$\begin{aligned} (\text{id} \otimes \Delta)\Delta_R &= (\Delta_R \otimes \text{id})\Delta_R, & (\text{id} \otimes \Delta_L)\Delta_L &= (\Delta \otimes \text{id})\Delta_L, \\ (\text{id} \otimes \Delta_R)\Delta_L(z) &= C_{13}^{-1}(\Delta_L \otimes \text{id})\Delta_R(z)C_{13} \end{aligned}$$

могут быть проверены непосредственно с использованием пентагонального тождества [27] для C

$$C_{12}C_{13}C_{23} = C_{23}C_{12}.$$

Ясно, что кодействия (47) – ковариантные преобразования (гомоморфизмы) алгебры $\Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$. Элемент, обратный к каноническому элементу C , дается формулой

$$C^{-1} = S(e^\alpha) \otimes e_\alpha = e^\alpha \otimes S(e_\alpha),$$

и кодействие Δ_R (47) переписывается в виде

$$\Delta_R(z) = (e_{(1)}^\gamma z S(e_{(2)}^\gamma)) \otimes e_\gamma. \quad (48)$$

В частности, для $y \in \mathcal{A}^*$ имеем

$$\Delta_R(y) = y_{(1)} \otimes y'_{(2)} = (e_{(1)}^\gamma y S(e_{(2)}^\gamma)) \otimes e_\gamma. \quad (49)$$

Спаривая второй фактор из (49) с произвольным $x \in \mathcal{A}^*$, выводим соотношение

$$y_{(1)} \langle x, y'_{(2)} \rangle = x_{(1)} y S(x_{(2)}),$$

которое эквивалентно коммутационным соотношениям для $x, y \in \mathcal{A}^*$:

$$xy = y_{(1)} \langle x_{(1)}, y'_{(2)} \rangle x_{(2)}, \quad (50)$$

где $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$. Обратное утверждение (что можно получить (49) из (50)) также справедливо. Сравнивая коммутационные соотношения (50) с уравнениями (45), можно найти в качестве примера правое кодействие Δ_R на $\tilde{\chi}_i$ (49):

$$\Delta_R(\tilde{\chi}_i) = \tilde{\chi}_j \otimes S(r_i^j), \quad \Delta_R(\tilde{\gamma}_i) = \tilde{\gamma}_j \otimes S(r_i^j). \quad (51)$$

В заключение этого раздела мы приведем кросс-коммутационные соотношения (см. (46)), которые понадобятся нам ниже:

$$[\chi_i, \omega^j]_- = C_{lk}^j \omega^l f_i^k, \quad [\gamma_i, \omega^j]_+ = f_i^j, \quad [\gamma_i, a] = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}. \quad (52)$$

4. БРСТ-ОПЕРАТОР ДЛЯ КВАНТОВЫХ АЛГЕБР ЛИ

В этом разделе мы найдем биинвариантный элемент $Q \in \Gamma^\wedge \bowtie \Gamma^{\wedge*}$ (БРСТ-оператор), который генерирует дифференциал d :

$$d\omega = [Q, \omega]_\pm \quad \forall \omega \in \Gamma^\wedge. \quad (53)$$

Оператор Q должен иметь градуировку 1 и удовлетворять условию $Q \wedge Q = 0$.

Прежде всего мы изменим базис дифференциальных форм $\{\omega^i\}$ и рассмотрим новые базисные элементы $\Omega^i = \omega^j S^{-1}(f_j^i)$, которые удобны в силу соотношений

$$[\Omega^i, a] = 0 \quad \forall a \in \mathcal{A}.$$

Для Ω^i также справедливы (см. (52)) равенства

$$\chi_{|2}\Omega^{\langle 2|} = \Omega^{\langle 1|}(\sigma_{12}\chi_{|1}\rangle + C_{|12}^{\langle 2|}), \quad \gamma_{|2}\Omega^{\langle 2|} = -\Omega^{\langle 1|}\sigma_{12}^{-1}\gamma_{|1}\rangle + I_2, \quad (54)$$

а определение внешнего произведения для r переменных Ω^i дается формулой

$$\Omega^{\langle r|} \dots \Omega^{\langle 1|} = \Omega^{\langle r|} \otimes \dots \otimes \Omega^{\langle 1|} A_{1 \rightarrow r}.$$

Теперь мы сформулируем главный результат данной статьи (см. также [28]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. БРСТ-оператор Q для квантовой алгебры (1), который генерирует дифференциал (53), имеет следующий вид:

$$Q = \Omega^i \chi_i + \sum_{r=1}^{h-1} Q_{(r)}, \quad (55)$$

где h – высота оператора σ_{12} (см. (16)). Здесь операторы $Q_{(r)}$ определяются как

$$Q_{(r)} = \Omega^{\langle r+1|} \Omega^{\langle r|} \dots \Omega^{\langle 1|} X_{|1\dots r+1\rangle}^{\langle \tilde{1}\dots\tilde{r}|} \gamma_{|\tilde{1}\rangle} \dots \gamma_{|\tilde{r}\rangle} \quad (56)$$

(подразумевается внешнее произведение); $X_{|1\dots r+1\rangle}^{\langle 1\dots r|}$ – тензоры, которые удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$A_{1\rightarrow r+1} X_{|1\dots r+1\rangle}^{\langle 1\dots r|} A_{1\rightarrow r} = A_{1\rightarrow r+1} ((-1)^r \sigma_{r+1\leftarrow 1} - \mathbf{1}) X_{|2\dots r+1\rangle}^{\langle 2\dots r|} A_{2\rightarrow r}, \quad (57)$$

с начальным условием $A_{12} X_{|12\rangle}^{\langle 0|} = -C_{|12\rangle}^{\langle 0|}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы должны проверить условия $[Q, a] = da$ ($\forall a \in \mathcal{A}$) и $[Q, \omega^i]_+ = d\omega^i$ ($\forall \omega^i \in \Gamma^{(1)}$), а также тождество $Q^2 = 0$. Условие $[Q, a] = da$ ($\forall a \in \mathcal{A}$) непосредственно следует из того, что Ω^i и γ_i коммутируют со всеми $a \in \mathcal{A}$. Таким образом, нам необходимо доказать $[\Omega^i \chi_i, a] = da$, что сразу следует из соотношений (34). Другие условия справедливы только при выполнении рекуррентных соотношений (57). Мы дадим полное доказательство этого утверждения в последующих работах.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Первое слагаемое $\Omega^i \chi_i = \omega^i \tilde{\chi}_i$ в (55) – биинвариантный элемент (см. (11), (51)). Можно доказать, что все другие члены $Q_{(r)}$ также биинвариантны.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для произвольных σ_{kl}^{ij} и C_{jk}^i довольно трудно разрешить явно уравнения (57). Однако в случае $\sigma^2 = \mathbf{1}$ главные уравнения (57) становятся проще и полное решение для Q может быть найдено. Действительно, соотношение (57) для $r = 2$ дает

$$A_{1\rightarrow 3} X_{|123\rangle}^{\langle 12|} (\mathbf{1} - \sigma_{12}) = A_{1\rightarrow 3} (\sigma_{23} \sigma_{12} - \mathbf{1}) X_{|23\rangle}^{\langle 2|}. \quad (58)$$

Для $\sigma^2 = \mathbf{1}$ мы имеем $A_{1\rightarrow 3} (\sigma_{23} \sigma_{12} - \mathbf{1}) = 0$ и, следовательно, $Q_{(r)} = 0$ при $r \geq 2$. Следовательно, БРСТ-оператор (55) имеет знакомую форму

$$Q = \Omega^{\langle 1|} \chi_{|1\rangle} - \Omega^{\langle 2|} \otimes \Omega^{\langle 1|} C_{|12\rangle}^{\langle 1|} \gamma_{|1\rangle}.$$

В общем случае при $\sigma^2 \neq \mathbf{1}$ число слагаемых в сумме (55) ограничивается только высотой h оператора σ .

Ниже мы получим явный вид оператора Q для случая стандартной квантовой деформации $\mathcal{A}^* = U_q(gl(N))$ универсальной обертывающей алгебры Ли $gl(N)$ (в этом случае $\sigma^2 \neq \mathbf{1}$).

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Здесь мы приведем явные выражения для первых двух коэффициентов $X_{|123\rangle}^{\langle 12|}$ и $X_{|1234\rangle}^{\langle 123|}$. Подстановка начального условия $A_{12}X_{|12\rangle}^{\langle 0|} = -C_{|12\rangle}^{\langle 0|}$ в (58) дает

$$A_{123}X_{|123\rangle}^{\langle 12|}A_{12} = [C_2 + \sigma_1\sigma_2C_1\delta_3]A_{12}, \quad (59)$$

где мы использовали сжатые обозначения

$$\sigma_n = \sigma_{n\ n+1}, \quad C_n = C_{|n\ n+1\rangle}, \quad \delta_n = \delta_{|n\rangle}^{\langle n-1|}. \quad (60)$$

Аналогичная формула для коэффициента $X_{|1234\rangle}^{\langle 123|}$ имеет вид

$$A_{1234}X_{|1234\rangle}^{\langle 123|}A_{123} = [(C_3 + \sigma_2\sigma_3C_2\delta_4) - \sigma_1\sigma_2\sigma_3(C_2 + \sigma_1\sigma_2C_1\delta_3)\delta_4]A_{123}. \quad (61)$$

Для вывода (59) и (61) удобно переписать уравнения (2)–(5) в виде (см. обозначения (60)):

$$\begin{aligned} C_1\delta_3C_1 &= \sigma_2C_1\delta_3C_1 + C_2C_1, & C_1\delta_3\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1C_2, \\ (\sigma_2C_1\delta_3 + C_2)\sigma_1 &= \sigma_1(\sigma_2C_1\delta_3 + C_2), & \sigma_1\sigma_2\sigma_1 &= \sigma_2\sigma_1\sigma_2. \end{aligned}$$

5. БРСТ- И АНТИ-БРСТ-ОПЕРАТОРЫ ДЛЯ КВАНТОВОЙ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ $U_q(gl(N))$

5.1. БРСТ-оператор для $U_q(gl(N))$. Квантовая алгебра $U_q(gl(N))$ определяется (как алгебра Хопфа) соотношениями [8]

$$\widehat{R}L_2^\pm L_1^\pm = L_2^\pm L_1^\pm \widehat{R}, \quad \widehat{R}L_2^+ L_1^- = L_2^- L_1^+ \widehat{R}, \quad (62)$$

$$\Delta(L^\pm) = L^\pm \otimes L^\pm, \quad \varepsilon(L^\pm) = \mathbf{1}, \quad S(L^\pm) = (L^\pm)^{-1}, \quad (63)$$

где элементы $(N \times N)$ -матриц $(L^\pm)_j^i$ – генераторы алгебры $U_q(gl(N))$; матрицы L^+ и L^- соответственно верхне- и нижнетреугольные, а их диагональные элементы связаны соотношениями $(L^+)_i^i(L^-)_i^i = 1$ для всех i . Матрица $\widehat{R}$ определяется как $\widehat{R} = \widehat{R}_{12} = P_{12}R_{12}$ (P_{12} – матрица перестановки), а матрица R_{12} обозначает стандартную R -матрицу Дринфельда–Джимбо для $GL_q(N)$:

$$R_{12} = R_{j_1, j_2}^{i_1, i_2} = \delta_{j_1}^{i_1} \delta_{j_2}^{i_2} (1 + (q - 1)\delta^{i_1 i_2}) + (q - q^{-1})\delta_{j_2}^{i_1} \delta_{j_1}^{i_2} \Theta_{i_1 i_2}, \quad (64)$$

где

$$\Theta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{при } i > j, \\ 0 & \text{при } i \leq j. \end{cases}$$

Эта R -матрица удовлетворяет условию Гекке $\widehat{R}^2 = \lambda \widehat{R} + \mathbf{1}$, где $\lambda = (q - q^{-1})$ и q – параметр деформации.

Образующие алгебры $\mathcal{A}^*$ определяются по формулам [4], [7], [25]

$$\chi_k^l = \frac{1}{\lambda} [(D^{-1})_k^l - (D^{-1})_i^j f_{kj}^{li}]. \quad (65)$$

Здесь $f_{kj}^{li} = L^{-i}_k S(L^+_{ij})$, а числовая матрица D может быть найдена с помощью соотношений

$$\text{Tr}_2 \hat{R}_{12} \Psi_{23} = P_{13} = \text{Tr}_2 \Psi_{12} \hat{R}_{23}, \quad D_1 = \text{Tr}_2 \Psi_{12} \Rightarrow \text{Tr}_1 (D_1^{-1} \hat{R}^{-1}) = \mathbf{1}_2,$$

где Tr_1 и Tr_2 обозначают следы по первому и второму пространствам.

В рассматриваемом случае R -матрицы (64) для $GL_q(N)$ явное выражение для матрицы D имеет вид

$$(D^{-1})_j^i = q^{2(N-i)+1} \delta_j^i, \quad \text{Tr}(D^{-1} \mathbf{1}) = \frac{q^{2N} - 1}{q - q^{-1}}. \quad (66)$$

Удобно записать коммутационные соотношения для $GL_q(N)$ -дифференциальной алгебры в терминах генераторов

$$\begin{aligned} L_j^i &= (L^+)_k^i S((L^-)_j^k) = \delta_j^i - \lambda S^{-1}(\chi_k^i) D_j^k, \\ J_n^i &= -S^{-1}(f_{ji}^{ik}) \gamma_k^l D_n^j, \quad \omega_j^i = \Omega_m^k f_{kj}^{mi}. \end{aligned}$$

В данном случае индексы, которые использовались в предыдущих разделах, становятся парами индексов; роль элементов χ_i , γ_j и Ω^k играют образующие χ_j^i , γ_j^i и Ω_j^i , соответственно.

Коммутационные соотношения (см. [4], [10], [25]) имеют вид

$$\omega_2 \hat{R}^{-1} \omega_2 \hat{R} = -\hat{R}^{-1} \omega_2 \hat{R}^{-1} \omega_2, \quad \omega_2 \hat{R} L_2 \hat{R} = \hat{R} L_2 \hat{R} \omega_2, \quad (67)$$

$$\omega_2 \hat{R} J_2 \hat{R} + \hat{R} J_2 \hat{R} \omega_2 = -\hat{R}, \quad L_2 \hat{R} L_2 \hat{R} = \hat{R} L_2 \hat{R} L_2, \quad (68)$$

$$J_2 \hat{R} L_2 \hat{R} = \hat{R} L_2 \hat{R} J_2, \quad J_2 \hat{R} J_2 \hat{R} = -\hat{R}^{-1} J_2 \hat{R} J_2. \quad (69)$$

Для того чтобы записать всю дифференциальную алгебру над $GL_q(N)$, нам необходимо добавить образующие T_j^i квантовой группы $\text{Fun}(GL_q(N))$ с коммутационными соотношениями

$$\hat{R} T_1 T_2 = T_1 T_2 \hat{R}, \quad \omega_1 T_2 = T_2 \hat{R}^{-1} \omega_2 \hat{R}^{-1}, \quad (70)$$

$$J_1 T_2 = T_2 \hat{R} J_2 \hat{R}, \quad L_1 T_2 = T_2 \hat{R} L_2 \hat{R}. \quad (71)$$

БРСТ-оператор Q для дифференциальной алгебры (67)–(71) может быть построен с помощью формулы (55) и имеет следующий вид [28]:

$$Q = \text{Tr}_q \left(\omega \frac{L - \mathbf{1}}{\lambda} - \omega L(\omega J) + \lambda \omega L(\omega J)^2 - \lambda^2 \omega L(\omega J)^3 + \dots \right) = \quad (72)$$

$$= \text{Tr}_q \left(\omega \frac{L - \mathbf{1}}{\lambda} - \omega L(\omega J) (\mathbf{1} + \lambda \omega J)^{-1} \right) = -\frac{1}{\lambda} \text{Tr}_q(\omega) + \frac{1}{\lambda} \text{Tr}_q(\Theta), \quad (73)$$

где $\Theta = \omega L(\mathbf{1} + \lambda\omega J)^{-1}$, а $\text{Tr}_q(Y) \equiv \text{Tr}(D^{-1}Y)$ обозначает квантовый след. Сумма в уравнении (72) конечна благодаря тому факту, что мономы по ω порядка $N^2 + 1$ равны нулю (т.к. внешняя алгебра форм (67) на квантовой группе $GL_q(N)$ – это плоская деформация [6], [11] классической алгебры).

Можно непосредственно проверить, что БРСТ-оператор Q , заданный уравнением (73), удовлетворяет соотношениям

$$Q^2 = 0, \quad [Q, L] = 0, \quad (74)$$

$$[Q, T] = T\omega \equiv dT, \quad [Q, \omega]_+ = -\omega^2 \equiv d\omega, \quad (75)$$

$$[Q, J]_+ = \frac{1}{\lambda}(\mathbf{1} - L). \quad (76)$$

(Анти)коммутатор с БРСТ-оператором Q (соотношения (75)) определяет действие дифференциала на алгебре $GL_q(N)$ и ее внешнем расширении; это обеспечивает структуру комплекса де Рама $\Omega(GL_q(N))$ на подалгебре с образующими T_j^i и ω_j^i (комплекс де Рама $\Omega(GL_q(N))$ впервые рассматривался Маниным, Мальтсигиотисом и Цыганом [6]).

Соотношение (76) – аналог тождества Картана. Для того чтобы получить соотношения (74)–(76), необходимо использовать свойство инвариантности квантового следа

$$\text{Tr}_q(X)\mathbf{1}_2 = \text{Tr}_{q1}(\widehat{R}^{\pm 1}X_2\widehat{R}^{\mp 1})$$

и соотношения

$$\widehat{R}\Theta_2\widehat{R}^{-1}\omega_2 = -\omega_2\widehat{R}^{-1}\Theta_2\widehat{R}, \quad (77)$$

$$\widehat{R}\Theta_2\widehat{R}^{-1}\Theta_2 = -\Theta_2\widehat{R}^{-1}\Theta_2\widehat{R}^{-1}, \quad (78)$$

$$\widehat{R}^{-1}\Theta_2\widehat{R}L_2 = L_2\widehat{R}\Theta_2\widehat{R}^{-1}, \quad \Theta_1T_2 = T_2\widehat{R}^{-1}\Theta_2\widehat{R}, \quad (79)$$

$$J_2\widehat{R}\Theta_2\widehat{R}^{-1} + \widehat{R}^{-1}\Theta_2\widehat{R}J_2 = -L_2(\mathbf{1} + \lambda\omega J)_2^{-1}\widehat{R}^{-1}(\mathbf{1} + \lambda\omega J)_2, \quad (80)$$

которые вытекают из (67)–(71).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Оператор Q , заданный уравнением (73), имеет правильный классический предел при $q \rightarrow 1$ ($\lambda \rightarrow 0$, $L \rightarrow \mathbf{1} + \lambda\tilde{\chi}$, $\omega \rightarrow \tilde{\omega}$, $J \rightarrow -\tilde{\gamma}$):

$$Q \rightarrow Q_{\text{cl}} = \text{Tr}(\tilde{\omega}\tilde{\chi} + \tilde{\omega}^2\tilde{\gamma}) = \text{Tr}(\tilde{\omega}X - \tilde{\omega}\tilde{\gamma}\tilde{\omega}),$$

где

$$X \equiv \tilde{\chi} + \tilde{\omega}\tilde{\gamma} + \tilde{\gamma}\tilde{\omega}, \quad (81)$$

и классическая алгебра определяется соотношениями

$$[\tilde{\omega}_2, \tilde{\gamma}_1]_+ = P_{12}, \quad [\tilde{\omega}_2, \tilde{\omega}_1]_+ = 0 = [\tilde{\gamma}_2, \tilde{\gamma}_1]_+, \quad (82)$$

$$[X_2, X_1] = P_{12}(X_2 - X_1), \quad (83)$$

$$[X_2, \tilde{\omega}_1] = 0 = [X_2, \tilde{\gamma}_1]. \quad (84)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Для дифференциального комплекса $\Omega(GL_q(N))$ можно определить группы когомологий де Рама $H^p(GL_q(N))$. Квантовые аналоги образующих кольца когомологий де Рама $H^*(GL_q(N))$ могут быть выбраны следующим образом:

$$\Omega^{(n)} = \text{Tr}_q(\omega^n), \quad n = 1, 3, 5, \dots, 2N - 1. \quad (85)$$

Эти образующие удовлетворяют соотношениям [4], [12]

$$d\Omega^{(n)} = -\text{Tr}_q(\omega^{n+1}) = 0, \quad [\Omega^{(n)}, \Omega^{(k)}]_+ = 0.$$

5.2. Анти-БРСТ-оператор и квантовый лапласиан. По аналогии с тем, как мы построили явную формулу (72), (73) для БРСТ-оператора Q , для алгебры $U_q(gl(N))$ можно построить анти-БРСТ-оператор Q^* :

$$Q^* = \text{Tr}_q \left(J \frac{L^{-1} - \mathbf{1}}{\lambda} + J L^{-1} J \omega \right) = \frac{1}{\lambda} (\text{Tr}_q(\Theta^*) - \text{Tr}_q(J)), \quad (86)$$

где $\Theta^* = J L^{-1}(\mathbf{1} + \lambda J \omega)$. Оператор Q^* удовлетворяет соотношениям

$$(Q^*)^2 = 0, \quad [Q^*, L] = 0, \quad (87)$$

$$[Q^*, T] = q^{2N} T J, \quad [Q^*, J]_+ = -q^{2N} J^2, \quad (88)$$

$$[Q^*, \omega] = q^{2N} \left(W \frac{1 - L^{-1}}{\lambda} \overline{W} - \lambda \omega J^2 \omega \right). \quad (89)$$

Здесь фактор q^{2N} возникает в силу тождества (см. (66))

$$\text{Tr}_{q1}(R) = \text{Tr}_{q1}(R^{-1} + \lambda \mathbf{1}) = q^{2N} \mathbf{1}_2.$$

Для удобства мы введем новые матричные операторы [4]

$$W = (\mathbf{1} + \lambda \omega J), \quad \overline{W} = (\mathbf{1} + \lambda J \omega). \quad (90)$$

Для вывода уравнений (87)–(89) мы использовали соотношения

$$\begin{aligned} \Theta_1^* T_2 &= T_2 \hat{R} \Theta_2^* \hat{R}^{-1}, & \hat{R}^{-1} \Theta_2^* \hat{R} J_2 &= -J_2 \hat{R} \Theta_2^* \hat{R}^{-1}, \\ \hat{R} \Theta_2^* \hat{R} \Theta_2^* &= -\Theta_2^* \hat{R} \Theta_2^* \hat{R}^{-1}, & \hat{R}^{-1} \Theta_2^* \hat{R} L_2 &= L_2 \hat{R} \Theta_2^* \hat{R}^{-1}, \\ \hat{R} \Theta_2^* \hat{R}^{-1} \omega_2 &+ \omega_2 \hat{R}^{-1} \Theta_2^* \hat{R} &= -(W L^{-1} \overline{W})_2 \hat{R}. \end{aligned} \quad (91)$$

Используя уравнения (88) и (89), можно определить дуальный дифференциал d^* как (анти)коммутатор с анти-БРСТ-оператором Q^* .

Теперь мы определим токовую матрицу U_j^i :

$$U \equiv W L^{-1} \overline{W} = -q^{-2N} [\text{Tr}_q(\Theta^*), \omega]_+,$$

т.е. квантовый аналог матрицы X (см. (81)). Матрица U удовлетворяет уравнению отражения

$$\hat{R}^{-1} U_2 \hat{R}^{-1} U_2 = U_2 \hat{R}^{-1} U_2 \hat{R}^{-1}.$$

Для этой токовой матрицы справедливы коммутационные соотношения

$$\hat{R} U_2 \hat{R}^{-1} \omega_2 = \omega_2 \hat{R}^{-1} U_2 \hat{R}, \quad \hat{R}^{-1} U_2 \hat{R} J_2 = J_2 \hat{R} U_2 \hat{R}^{-1}. \quad (92)$$

Это правильные квантовые аналоги соотношений коммутативности (84) (U представляется в виде $U = \mathbf{1} + \lambda \mathbf{X}$, где $\mathbf{X} \rightarrow X$ при $q \rightarrow 1$), т.е.

$$\mathbf{X}_{|1\rangle\omega_{|2\rangle}} = \sigma_{12} \omega_{|2\rangle} \mathbf{X}_{|1\rangle}, \quad \mathbf{X}_{|1\rangle J_{|2\rangle}} = \tilde{\sigma}_{12} J_{|2\rangle} \mathbf{X}_{|1\rangle},$$

где $\sigma_{12}, \tilde{\sigma}_{12}$ — элементы алгебры кос, которые определяются соотношениями (92) и переходят в матрицу перестановки при $q = 1$. Более того, преобразование левоинвариантного тока U в правоинвариантный ток Ξ ,

$$\Xi = T W L^{-1} \overline{W} T^{-1} = T U T^{-1},$$

ведет к условиям точной коммутативности $[\Xi_2, \omega_1] = 0$, $[\Xi_2, J_1] = 0$.

Квантовый оператор Лапласа определяется следующим образом (здесь достаточно воспользоваться соотношениями (74)–(76)):

$$\Delta \equiv Q Q^* + Q^* Q = \lambda^{-2} \text{Tr}_q(L - 2 + L^{-1} \overline{W} - \lambda J L^{-1} \overline{W} \omega). \quad (93)$$

Лапласиан Δ инвариантен по отношению к БРСТ- и анти-БРСТ-операторам:

$$[Q, \Delta] = 0 = [Q^*, \Delta],$$

и обобщает квадратичный оператор Казимира для универсальной обертывающей алгебры $U_q(gl(N))$.

Принимая во внимание тождество

$$-\lambda \text{Tr}_q(J L^{-1} \overline{W} \omega) = \text{Tr}_q((q^{2N} - 1) L^{-1} \overline{W} + \lambda q^{2N} \omega J L^{-1} \overline{W}),$$

можно получить замечательное выражение для квантового лапласиана через токовую матрицу U :

$$\Delta = \frac{1}{\lambda^2} \text{Tr}_q(L + q^{2N} U - 2).$$

Теперь мы сформулируем теорему о разложении Ходжа. Рассмотрим пространство полиномов по переменным ω_j^i и T_j^i с комплексными коэффициентами $\psi_{j_1 \dots j_k}^{i_1 \dots i_k}$,

$$|\Psi\rangle = \Psi[T, \omega] = \sum_{k=0}^K \sum_{r=0}^k \text{Tr}_{1\dots k} (T_1 \dots T_r \omega_{r+1} \dots \omega_k \psi_{1\dots k})$$

(для некоторого K). Здесь случай $r = 0$ соответствует произвольному полиному по ω , который не зависит от образующих T . Векторные поля $L_j^i - \delta_j^i$ и внутренние производные J_j^i действуют слева на моном нулевого порядка $|0\rangle \equiv 1$ как операторы уничтожения:

$$(L_j^i - \delta_j^i)|0\rangle = 0, \quad J_j^i|0\rangle = 0.$$

Это определяет левое действие БРСТ-, анти-БРСТ-операторов и оператора Лапласа на произвольные полиномы $|\Psi\rangle$. Теорема о разложении формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА. *Произвольный полином $\Psi[T, \omega]$ может быть разложен в сумму БРСТ-точного, кочного и гармонического полиномов:*

$$|\Psi\rangle = Q \cdot |\chi\rangle + Q^* \cdot |\Phi\rangle + |\Omega\rangle,$$

где $\Delta|\Omega\rangle = 0$.

Доказательство этой теоремы проводится стандартным способом и аналогично доказательству теоремы о разложении для случая обычных алгебр Ли (см., например, [17], [18]).

Благодарности. Данная работа была частично поддержана грантом РФФИ № 98-01-22033 и грантом CNRS, PICS-608. Работа А.П.И. была также частично поддержана грантом РФФИ № 00-01-00299.

Список литературы

- [1] *S. L. Woronowicz.* Commun. Math. Phys. 1989. V. 122. P. 125.
- [2] *P. Aschieri, L. Castellani.* Int. J. Mod. Phys. A. 1993. V. 8. P. 1667.
- [3] *A. Klimyk and K. Schmudgen.* Quantum Groups and their Representations. Texts and Monographs in Physics. Part IV. Berlin: Springer, 1997.
- [4] *А. П. Исаев.* ЭЧАЯ. 1997. Т. 28. № 3. С. 685.
- [5] *A. Connes.* Noncommutative Geometry. New York: Academic Press, 1994.
- [6] *Ю. И. Манин.* ТМФ. 1992. Т. 92. С. 425; *G. Maltasiotis.* Commun. Math. Phys. 1993. V. 151. P. 275; *C. R. Acad. Sci.* 1990. V. 311. Sér. I. P. 831; *B. Tsygan.* Sel. Math. 1993. V. 12. P. 75.
- [7] *B. Jurco.* Lett. Math. Phys. 1991. V. 22. P. 177.
- [8] *Н. Ю. Решетихин, Л. А. Таттаджян, Л. Д. Фаддеев.* Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 178.

- [9] *A. Sudbery*. Phys. Lett. B. 1992. V. 284. P. 61; *A. P. Isaev and P. N. Pyatov*. Phys. Lett. A. 1993. V. 179. P. 81; hep-th/9211093.
- [10] *P. Schupp, P. Watts, and B. Zumino*. Lett. Math. Phys. 1992. V. 25. P. 139.
- [11] *A. P. Isaev and P. N. Pyatov*. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 2227; hep-th/9311112.
- [12] *L. D. Faddeev and P. N. Pyatov*. The differential calculus on quantum linear groups. In: Contemporary Mathematical Physics. Eds. R. L. Dobrushin et al. Providence, RI: AMS, 1996. P. 35; hep-th/9402070; *Л. Д. Фаддеев, П. Н. Пятков*. Квантование дифференциального исчисления на линейных группах. В сб.: Проблемы современной теоретической физики, 96-212. Ред. А. П. Исаев. Дубна: ОИЯИ, 1996. С. 19.
- [13] *I. Ya. Aref'eva, G. E. Arutyunov, and P. B. Medvedev*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. № 12. P. 6658.
- [14] *G. E. Arutyunov, A. P. Isaev, and Z. Popowicz*. J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 4349; q-alg/9502002.
- [15] *U. Carow-Watamura, M. Schlieker, S. Watamura, and W. Weich*. Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 605.
- [16] *M. Henneaux and C. Teitelboim*. Quantization of Gauge Systems. Princeton: Univ. Press, 1992.
- [17] *J. W. van Holten*. Nucl. Phys. B. 1990. V. 339. P. 158.
- [18] *C. Chryssomalakos, J. A. de Azcarraaga, A. J. Macfarlane, and J. C. Perez Bueno*. J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 6009.
- [19] *D. Bernard*. Prog. Theor. Phys. Suppl. 1990. V. 102. P. 49; Phys. Lett. B. 1991. V. 260. P. 389.
- [20] *S. Watamura*. Commun. Math. Phys. 1993. V. 158. P. 67.
- [21] *A. P. Isaev*. J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 6784; hep-th/9402060; Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 333; hep-th/9403154.
- [22] *S. L. Woronowicz*. Publ. RIMS Kyoto. 1987. V. 23. P. 117.
- [23] *T. Brzezinski*. Lett. Math. Phys. 1993. V. 27. P. 287.
- [24] *Д. И. Гуреевич*. Алгебра и анализ. 1990. Т. 2. № 4. С. 119.
- [25] *O. V. Radko and A. A. Vladimirov*. J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 5434.
- [26] *P. Schupp*. Cartan calculus: differential geometry for quantum groups. hep-th/9408170.
- [27] *S. Baaj, G. Skandalis*. Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. 4 série. 1993. V. 26. P. 425; *Р. М. Кашаев*. Алгебра и анализ. 1996. Т. 8. № 4. С. 63; q-alg/9503005.
- [28] *C. Burdik, A. P. Isaev, and O. V. Ogievetsky*. Standard complex for quantum Lie algebras. math.QA/0010060.