Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Мангазеев, С. М. Сергеев, Непрерывный предел модели трех τ -функций,
ТМФ, 2001, том 129, номер 2, 317–326

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf538>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:06:02

НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ МОДЕЛИ ТРЕХ τ -ФУНКЦИЙ

Представлена система интегрируемых дифференциальных уравнений второго порядка для трех полей в трехмерном пространстве-времени. Система получена как непрерывный предел дискретных уравнений для триплета τ -функций. Дается параметризация солитонных решений уравнений движения, описывается линейная задача и обосновывается интегрируемость соответствующей классической теории поля.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1]–[3] трехмерная интегрируемая модель в полностью дискретном пространстве-времени описывается в различных подходах. В частности, в работе [2] показано, что “уравнения движения” этой модели могут быть записаны как система трилинейных разностных уравнений для триплета τ -функций. Знаменитое уравнение Хироты соответствует некоторой спецификации свободных параметров триплетной системы. Солитонные же решения триплетной системы известны.

Классическая модель в полностью дискретном пространстве-времени является классическим пределом квантовой интегрируемой системы [4], алгебра наблюдаемых которой – локальная алгебра Вейля. В частности, когда вейлевский параметр $q = \sqrt{1}$ и рассматриваются унитарные представления алгебры Вейля, то квантовая интегрируемая модель эквивалентна (при выполнении некоторых дополнительных условий) известной в статистической механике модели Замолотчикова–Бажанова–Бакстера (ЗББ). Таким образом, солитонные уравнения можно рассматривать как классический предел модели ЗББ. Заметим, однако, что существует иная возможность получения классического предела модели ЗББ, описанная в работе [5], но эту возможность мы здесь не обсуждаем.

В настоящей работе мы исследуем простейший непрерывный предел триплетных разностных уравнений. Этот предел соответствует специфическому выбору дополнитель-

*Centre for Mathematics and its Applications, School of Mathematical Sciences, The Australian National University, Canberra, Australia. E-mail: vladimir@maths.anu.edu.au

†Лаборатория теоретической физики им. Н. Н. Боголюбова, Объединенный институт ядерных исследований, Дубна, Московская обл., Россия. E-mail: sergeev@thsun1.jinr.ru

ных параметров триплетных разностных уравнений, и рассматриваемый предел исключает возможность перехода к уравнениям Хироты или Кадомцева–Петвиашвили.

Пример дискретного уравнения Кортевега–де Фриза [6] показывает, что для любого разностного уравнения существует множество способов совершить переход к непрерывному пределу. В настоящей работе мы используем следующий принцип. Вид солитонных решений для системы триплетных уравнений известен. Солитонные решения разностных уравнений имеют некоторые примечательные особенности. Предельную процедуру мы выбираем так, что все эти особенности сохраняются в непрерывном пределе. Иными словами, мы фиксируем решение и восстанавливаем уравнения, которым эти решения удовлетворяют. Такой подход гарантирует, что окончательные дифференциальные уравнения движения определяют интегрируемую модель.

Данная работа устроена следующим образом. В разделе 2 дается форма исходных разностных уравнений и форма их солитонных решений. В разделе 3 определяется предельная процедура такая, что форма солитонных решений сохраняется в непрерывном пределе. Далее мы переформулируем модель в терминах более удобных переменных, определяем действие, выводим гамильтонову форму уравнений движения и описываем вспомогательную линейную задачу полученной классической теории поля.

2. ТРИПЛЕТНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этом разделе мы напомним некоторые результаты работы [2]. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ — некомпланарный базис в $\mathbb{R}^3$. Рассмотрим три функции $\tau_{1,\mathbf{x}}, \tau_{2,\mathbf{x}}$ и $\tau_{3,\mathbf{x}}$, где $\mathbf{x}$ принадлежит $\mathbb{Z}^3$ -покрытию $\mathbb{R}^3$ векторами $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

Дискретные уравнения для триплета τ -функций суть следующие три уравнения:

$$\begin{aligned} r_1 \tau_{1,\mathbf{x}+\mathbf{e}_2+\mathbf{e}_3} \tau_{2,\mathbf{x}} \tau_{3,\mathbf{x}} &= \tau_{1,\mathbf{x}} \tau_{2,\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \tau_{3,\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} + \\ &+ s_2 \tau_{1,\mathbf{x}+\mathbf{e}_2} \tau_{2,\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \tau_{3,\mathbf{x}} + s_3^{-1} \tau_{1,\mathbf{x}+\mathbf{e}_3} \tau_{2,\mathbf{x}} \tau_{3,\mathbf{x}+\mathbf{e}_2}, \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и далее мы будем выписывать только одно из трех уравнений, а обозначение “etc.” подразумевает, что два остальных уравнения могут быть получены циклическими перестановками индексов 1, 2, 3.

Мы имеем дело с однородной $\mathbb{Z}^3$ -решеткой, так что r_α и s_α — постоянные комплексные параметры. Они могут быть всегда выбраны следующим образом:

$$r_1 = 1 + s_2 + s_3^{-1}, \quad \text{etc.}, \quad (2)$$

так что $\tau_{\alpha,\mathbf{x}} \equiv 1$ — решение уравнений (1). Уравнения (1) могут быть сведены к уравнению Хироты [7] в пределе

$$\frac{1}{r_2} = \frac{1}{s_3} \ll s_1 \ll 1, \quad r_1 = s_2 r_3. \quad (3)$$

В этом пределе два уравнения из (1) приводят к отождествлению τ -функций, а третье уравнение представляет собой уравнение Хироты.

Уравнения (1) имеют солитонные решения в смысле Хироты. Определим парциальную волну как

$$W_\alpha(\mathbf{x}) = \lambda_\alpha e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{x})}, \quad (4)$$

где

$$e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{e}_1)} = \frac{\lambda_1((\lambda_1 - \lambda_3) + s_1(\lambda_1 - \lambda_2))}{\lambda_2(\lambda_1 - \lambda_3) + s_1\lambda_3(\lambda_1 - \lambda_2)}, \quad \text{etc.} \quad (5)$$

Мы будем называть величины λ_α амплитудами волны с импульсом $\mathbf{k}$. Соотношение (5) – удобная параметризация дисперсионного соотношения для амплитуд и импульсов.

Определим далее

$$d(\lambda, \lambda') = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda'_1 & \lambda'_2 & \lambda'_3 \end{vmatrix}, \quad D(\lambda, \lambda') = \frac{d(\lambda, \lambda') d(\lambda^{-1}, \lambda'^{-1})}{d(\lambda^{-1}, \lambda') d(\lambda, \lambda'^{-1})}. \quad (6)$$

Здесь аргумент λ^{-1} функции d обозначает $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}$.

n -Солитонное решение уравнений (1) описывается n триплетами $\lambda_\alpha^{(k)}$, $\alpha = 1, 2, 3$, $k = 1, \dots, n$, и имеет обычную форму Хироты: функция τ_α сконструирована с помощью парциальных волн $W_\alpha^{(k)}$, соответствующих $\lambda^{(k)}$ согласно (5), и с помощью фазовых сдвигов $D(\lambda^{(k)}, \lambda^{(m)})$, определяемых в (6).

Например, двухсолитонное решение дается выражением

$$\tau_{\alpha, \mathbf{x}} = 1 + W_\alpha(\mathbf{x}) + W'_\alpha(\mathbf{x}) + D(\lambda, \lambda') W_\alpha(\mathbf{x}) W'_\alpha(\mathbf{x}), \quad (7)$$

где W_α имеет амплитуду λ_α , а W'_α – амплитуду λ'_α .

3. НЕПРЕРЫВНЫЙ ПРЕДЕЛ

Теперь нам предстоит перейти в уравнениях (1) к непрерывному пределу. Основной принцип, который мы будем использовать, заключается в том, что конечный набор дифференциальных уравнений должен иметь *гладкие* солитонные решения.

Для простоты пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ – ортогональный базис, ϵ – длина каждого вектора $\mathbf{e}_\alpha$. Пусть x_1, x_2, x_3 – координаты в $\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{x} = x_1 \frac{\mathbf{e}_1}{\epsilon} + x_2 \frac{\mathbf{e}_2}{\epsilon} + x_3 \frac{\mathbf{e}_3}{\epsilon}. \quad (8)$$

Ниже мы будем подразумевать зависимость от координат x_1, x_2, x_3 , например

$$f_{\mathbf{x}} = f(x_1, x_2, x_3), \quad f_{\mathbf{x}+\mathbf{e}_1} = f(x_1 + \epsilon, x_2, x_3), \quad (9)$$

где $f(x_1, x_2, x_3)$ – гладкая функция.

Вернемся к солитонам, определенным в (4), (5). Формула (8) дает

$$e^{i(\mathbf{k}, \mathbf{e}_\alpha)} = e^{i\epsilon k_\alpha}, \quad (10)$$

и параметризация (5) имеет хороший предел $\epsilon \rightarrow 0$, если $s_\alpha = -1 + O(\epsilon)^1$. Такая структура s_α не допускает предела (3), т.е. заранее можно утверждать, что мы получим дифференциальные уравнения, не сводящиеся к уравнению Кадомцева–Петвиашвили.

Рассмотрим теперь разложение уравнений (1) в ряд по ϵ . Порядки ϵ^0 и ϵ^1 должны быть тривиальными, а порядок ϵ^2 должен дать искомые дифференциальные уравнения. Дополнительное условие $\tau_\alpha \equiv 1$ должно удовлетворять уравнениям (1), что эквивалентно (2) во всех порядках по ϵ . Оказывается, что без ограничения общности можно выбрать

$$s_1 = -(1 + \epsilon + O(\epsilon^2)), \quad \text{etc.} \quad (11)$$

Второй порядок разложения уравнений (1) дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \gamma_3}{\partial x_1 \partial x_2} = \\ = \left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial x_2} \right) + \left(\frac{\partial \gamma_3}{\partial x_1} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial x_1} \right) + \left(\frac{\partial \gamma_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \gamma_3}{\partial x_2} \right), \quad \text{etc.}, \end{aligned} \quad (12)$$

где

$$\gamma_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \ln \tau_\alpha. \quad (13)$$

Случай, когда $s_\alpha \neq s_\beta$, эквивалентен (11) с точностью до перемасштабирования координат.

Система дифференциальных уравнений в частных производных (12) имеет солитонные решения, описываемые формулами (13), где τ -функция дается выражением (7) или аналогичным соотношением для многосолитонной τ -функции, с тем же самым фазовым сдвигом (6), но с волнами

$$W_\alpha(\mathbf{x}) = \lambda_\alpha e^{i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)}, \quad (14)$$

где параметризация, следующая из (5) в пределе (11), выглядит как

$$ip_1 = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_1)}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_3)}, \quad \text{etc.} \quad (15)$$

Выражение (15) для импульсов параметризует следующую дисперсионную кривую для импульсов p_1, p_2, p_3 :

$$\frac{1}{p_1^2} + \frac{1}{p_2^2} + \frac{1}{p_3^2} - \frac{2}{p_1 p_2} - \frac{2}{p_2 p_3} - \frac{2}{p_3 p_1} = -1. \quad (16)$$

Физическая интерпретация формулы (16) не ясна. Заметим, что форма (16) дисперсионного соотношения означает, что не существует локального дифференциального уравнения для одной τ -функции.

¹⁾ Существует иная возможность: $\lambda_\alpha = 1 + O(\epsilon)$ с произвольным s_α , но здесь мы ее не исследуем.

Фазовый сдвиг (6), конечно же, эквивалентен обычному кросс-отношению. Если репараметризовать триплет амплитуд парциальной волны λ_α как

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{1-p}{1-q}, \quad \lambda_3 = \lambda_1 \frac{q}{p}, \quad (17)$$

так что

$$ip_1 = p - q, \quad ip_2 = \Omega(p) - \Omega(q), \quad ip_3 = \Omega^{-1}(p) - \Omega^{-1}(q), \quad (18)$$

где

$$\Omega(z) = \frac{1}{1-z}, \quad \Omega^{-1}(z) = 1 - \frac{1}{z}, \quad \Omega^{\circ 3}(z) = z, \quad (19)$$

то получим

$$D(\lambda, \lambda') = \frac{(p-p')(q-q')}{(p-q')(q-p')}. \quad (20)$$

Существование солитонных решений означает, что система (12) интегрируема. Следовательно, существует бесконечная группа симметрии уравнений (12). Полное описание этой группы не получено.

Уравнения (12) можно получить как условие совместности трех вспомогательных дифференциальных уравнений на функцию γ_0 :

$$\partial_1 \partial_2 \gamma_0 = \partial_1 (\gamma_0 - \gamma_2) \partial_2 (\gamma_1 - \gamma_0) + \frac{1}{2} \partial_1 (\gamma_0 - \gamma_2) + \frac{1}{2} \partial_2 (\gamma_1 - \gamma_0) - \frac{3}{4}, \quad \text{etc.} \quad (21)$$

Здесь и далее мы используем для краткости символ ∂_α вместо $\partial/\partial x_\alpha$. Уравнение (21) линейное по отношению к $\Psi \equiv e^{\gamma_0}$, так что это вспомогательная линейная задача. Заметим, что для данных γ_1, γ_2 и γ_3 функция γ_0 содержит один дополнительный комплексный параметр, являющийся аналогом точки на кривой (см. [3]). Например, в случае односолитонного выражения для γ_α функция γ_0 имеет следующую форму:

$$\gamma_0 = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + \ln(1 + W_0(\mathbf{x})), \quad (22)$$

где

$$b_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{(\lambda_3 - \lambda_0)(\lambda_1 - \lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{(\lambda_2 - \lambda_0)(\lambda_3 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_0)(\lambda_2 - \lambda_3)} \right), \quad \text{etc.} \quad (23)$$

Уравнения (12) и (21) выписаны для функций $\gamma_0, \dots, \gamma_3$, имеющих наиболее простую форму солитонных решений. Однако форма дифференциальных уравнений может быть слегка упрощена при использовании переменных σ_α вместо γ_α :

$$\gamma_3 = \sigma_3 + a_1 x_1 + (a_2 + 1)x_2 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3, \quad \text{etc.}, \quad (24)$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные комплексные числа, и уравнения (12) принимают вид

$$\partial_1 \partial_2 \sigma_3 = (\partial_1 \sigma_2 - \partial_1 \sigma_3)(\partial_2 \sigma_3 - \partial_2 \sigma_1), \quad \text{etc.} \quad (25)$$

Уравнения (25) являются более простой версией (12), и в дальнейшем мы будем использовать (25).

4. ЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА

Уравнения (12), так же как и (25), могут быть получены как условия совместности системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрим следующую систему вспомогательных дифференциальных уравнений:

$$\Delta_{\alpha,\beta}\Psi = 0, \quad (26)$$

где дифференциальные операторы второго порядка $\Delta_{\alpha,\beta} \equiv \Delta_{\beta,\alpha}$, $\alpha \neq \beta$ (!), имеют вид

$$\Delta_{2,3} = \partial_2\partial_3 - \pi_1\partial_2 - \phi_1\partial_3 + \pi_1\phi_1 - C_1, \quad \text{etc.} \quad (27)$$

В тензорных обозначениях соотношение (27) можно записать как

$$\Delta_{\alpha,\beta}\Psi = (\nabla_\alpha\partial_\beta - F_{\alpha,\beta})\Psi, \quad \alpha \neq \beta, \quad (28)$$

где ∇_α – ковариантная производная, ϕ_α и π_α – компоненты символа Кристоффеля, а симметрический тензор $F_{\alpha,\beta}$ выражен в терминах ϕ_α , π_α и C_α . Однако обозначения римановой геометрии не имеют здесь истинного смысла из-за ограничения $\alpha \neq \beta$, и мы приводим их только как формальные обозначения.

Условиями совместности для нашей линейной системы является следующий набор уравнений для ϕ_α , π_α , C_α :

$$\begin{aligned} \partial_1\phi_1 &= \partial_2\pi_2 = (\pi_2 - \phi_3)(\pi_3 - \phi_1) + C_3, \\ \partial_2\phi_2 &= \partial_3\pi_3 = (\pi_3 - \phi_1)(\pi_1 - \phi_2) + C_1, \\ \partial_3\phi_3 &= \partial_1\pi_1 = (\pi_1 - \phi_2)(\pi_2 - \phi_3) + C_2, \\ \partial_1C_1 &= \partial_2C_2 = \partial_3C_3. \end{aligned} \quad (29)$$

Эта система имеет калибровочные степени свободы,

$$\Delta_{\alpha,\beta} \rightarrow e^f \Delta_{\alpha,\beta} e^{-f}, \quad (30)$$

приводящие к следующим калибровочным преобразованиям:

$$\pi_1 \rightarrow \pi_1 + \partial_3\gamma, \quad \phi_1 \rightarrow \phi_1 + \partial_2\gamma, \quad C_1 \rightarrow C_1 + \partial_2\partial_3\gamma, \quad \text{etc.} \quad (31)$$

Используя это, можно избавиться от C_α , выбрав $C_\alpha = 0$, так что уравнения (29) сводятся к системе

$$\begin{aligned} \partial_1\phi_1 &= \partial_2\pi_2 = (\pi_2 - \phi_3)(\pi_3 - \phi_1), \\ \partial_2\phi_2 &= \partial_3\pi_3 = (\pi_3 - \phi_1)(\pi_1 - \phi_2), \\ \partial_3\phi_3 &= \partial_1\pi_1 = (\pi_1 - \phi_2)(\pi_2 - \phi_3). \end{aligned} \quad (32)$$

Первые равенства в (32) могут быть решены как

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \partial_2 \sigma_3, & \phi_2 &= \partial_3 \sigma_1, & \phi_3 &= \partial_1 \sigma_2, \\ \pi_1 &= \partial_3 \sigma_2, & \pi_2 &= \partial_1 \sigma_3, & \pi_3 &= \partial_2 \sigma_1,\end{aligned}\quad (33)$$

так что все остальные равенства в (32) дают в точности (25).

Интересно отметить, что если $C_\alpha \equiv 0$, то любое из уравнений (32) может быть переписано как линейное. Например, первое из уравнений (32) эквивалентно

$$\Delta_{1,2} e^{\sigma_3} = 0, \quad (34)$$

а из второго и третьего следует

$$\Delta_{1,2} \partial_3 e^{\sigma_3} = 0. \quad (35)$$

5. ГАМИЛЬТониан

В этом разделе мы восстановим действие и гамильтониан классической системы.

Уравнения (32) являются условиями экстремума для “действия”

$$\mathcal{A} = \iiint dx_1 dx_2 dx_3 (\pi_1 \partial_1 \phi_1 + \pi_2 \partial_2 \phi_2 + \pi_3 \partial_3 \phi_3 - V), \quad (36)$$

где “потенциал”

$$V = (\pi_1 - \phi_2)(\pi_2 - \phi_3)(\pi_3 - \phi_1). \quad (37)$$

Лучший способ получить эволюционную систему – это вернуться в лабораторную систему координат (исходные координаты $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ являются системой светового конуса). Время следует выбрать в виде

$$t = x_1 + x_2 + x_3. \quad (38)$$

Пространственные координаты мы можем определять произвольно. Выберем их следующим образом:

$$x = x_1, \quad y = x_2. \quad (39)$$

Частные производные принимают вид

$$\partial_1 = \frac{d}{dt} + \partial_x, \quad \partial_2 = \frac{d}{dt} + \partial_y, \quad \partial_3 = \frac{d}{dt}. \quad (40)$$

Уравнения движения (32) в терминах ϕ_α, π_α (как и прежде, $C_\alpha \equiv 0$) переписываются как

$$\begin{aligned}\dot{\phi}_1 &= (\pi_2 - \phi_3)(\pi_3 - \phi_1) - \partial_x \phi_1, \\ \dot{\pi}_1 &= (\pi_1 - \phi_2)(\pi_2 - \phi_3) - \partial_x \pi_1, \\ \dot{\phi}_2 &= (\pi_1 - \phi_2)(\pi_3 - \phi_1) - \partial_y \phi_2, \\ \dot{\pi}_2 &= (\pi_2 - \phi_3)(\pi_3 - \phi_1) - \partial_y \pi_2, \\ \dot{\phi}_3 &= (\pi_1 - \phi_2)(\pi_2 - \phi_3), \\ \dot{\pi}_3 &= (\pi_3 - \phi_1)(\pi_1 - \phi_2).\end{aligned}\quad (41)$$

Эти уравнения задают гамильтонов поток

$$\dot{\phi}_\alpha = \{H, \phi_\alpha\}, \quad \dot{\pi}_\alpha = \{H, \pi_\alpha\} \quad (42)$$

с гамильтонианом

$$H = \iint dx dy (\phi_1 \partial_x \pi_1 + \phi_2 \partial_y \pi_2 + V), \quad (43)$$

где V определяется формулой (37), а скобки Пуассона

$$\{\pi_\alpha(x, y), \phi_\beta(x', y')\} = \delta(x - x')\delta(y - y'). \quad (44)$$

6. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ

Теперь, используя понятие линейной задачи (26), можно доказать интегрируемость эволюции.

Сначала рассмотрим три линейных уравнения (26) в лабораторной системе координат. Эти уравнения могут быть записаны как

$$\ddot{\Psi} = -(\partial_x + \partial_y - \pi_3 - \phi_3)\dot{\Psi} - (\partial_x \partial_y - \pi_3 \partial_x - \phi_3 \partial_y + \pi_3 \phi_3)\Psi, \quad (45)$$

$$\mathfrak{L} \cdot \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \Psi \end{pmatrix} = 0, \quad (46)$$

где

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} \partial_x - \pi_3 - \phi_3 + \pi_1 + \phi_1 & \partial_x \partial_y - \pi_3 \partial_x - (\phi_3 - \pi_1)\partial_y + \pi_3 \phi_3 - \pi_1 \phi_1 \\ \partial_y - \pi_3 - \phi_3 + \pi_2 + \phi_2 & \partial_x \partial_y - (\pi_3 - \phi_2)\partial_x - \phi_3 \partial_y + \pi_3 \phi_3 - \pi_2 \phi_2 \end{pmatrix}. \quad (47)$$

Линейная задача может быть переписана в привычной форме, например как

$$\partial_x \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \Psi \end{pmatrix} = \mathfrak{M}_y \circ \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad (48)$$

где $\mathfrak{M}_y$ – интегральный оператор. Теперь интегралы движения могут быть получены посредством оператора переноса

$$P \exp \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathfrak{M}_y dx \right). \quad (49)$$

Мы предпочитаем, однако, инвариантный вывод.

Дифференцируя (46) по времени, можно получить следующую формулу:

$$\dot{\mathfrak{L}} = \mathfrak{B}\mathfrak{L} - \mathfrak{L}\mathfrak{A}, \quad (50)$$

где матрица $\mathfrak{A}$, получаемая из уравнения

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \Psi \end{pmatrix} = \mathfrak{A} \begin{pmatrix} \dot{\Psi} \\ \Psi \end{pmatrix}, \quad (51)$$

имеет вид

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -(\partial_x + \partial_y - \pi_3 - \phi_3) & \partial_x \partial_y - \pi_3 \partial_x - \phi_3 \partial_y + \pi_3 \phi_3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (52)$$

а матрица $\mathfrak{B}$ должна быть получена из явных вычислений:

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} -(\partial_x - \phi_3) & \pi_3 - \phi_1 \\ \phi_3 - \pi_2 & -(\partial_y - \pi_3) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Хорошо известно, что следствием формулы (50) является соотношение

$$\frac{d}{dt} \det \mathfrak{L} = \det \mathfrak{L} \operatorname{tr}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}). \quad (54)$$

Интегрируемость эволюции следует из равенства $\operatorname{tr}(\mathfrak{B} - \mathfrak{A}) = 0$, что означает

$$I = \det \mathfrak{L}: \quad \frac{d}{dt} I = 0. \quad (55)$$

Определитель должен быть вычислен на подпространстве функций с подходящими граничными условиями. Например, рассмотрим вспомогательную линейную задачу на торе, при этом следует наложить циклические граничные условия на наблюдаемые

$$\begin{aligned} \phi_\alpha(x + L, y) &= \phi_\alpha(x, y + M) = \phi_\alpha(x, y), \\ \pi_\alpha(x + L, y) &= \pi_\alpha(x, y + M) = \phi_\alpha(x, y), \end{aligned} \quad (56)$$

но линейные элементы Ψ могут удовлетворять квазипериодическим граничным условиям

$$\Psi(x + L, y) = e^\lambda \Psi(x, y), \quad \Psi(x, y + M) = e^\mu \Psi(x, y). \quad (57)$$

Теперь определитель, вычисленный на подпространстве собственных функций с граничными условиями (57), зависит от λ и μ : $I = I(\lambda, \mu)$. Этот функционал в разложении по λ , μ производит интегралы движения.

Строгое вычисление спектрального определителя требует обрезания в пространстве импульсов или, что эквивалентно, дискретизации в координатном пространстве. Это возвращает нас к дискретным моделям, обсуждаемым в работе [3].

7. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе система дифференциальных уравнений в частных производных записана в различных формах (12), (25) и (32). Эти дифференциальные уравнения определяют трехмерную интегрируемую систему, интегрируемость которой обеспечивается наличием солитонных решений или следует из техники вспомогательной линейной задачи.

Изначально нашей целью было получить хорошую трехмерную интегрируемую теорию поля, наделенную пространственной группой симметрии $O(3)$ или $O(2, 1)$. К сожалению, полученная система не обладает явной простой группой симметрии, так что наша теория поля не имеет хорошей интерпретации.

Кроме того, нам не удалось получить явное описание бесконечномерной группы симметрии солитонных уравнений и явных формул для высших интегралов движения, инволютивных с гамильтонианом (43). Не ясна также физическая интерпретация дисперсионного соотношения (16) солитонных волн. И конечно же, без внимания остались и обычные вопросы теории интегрируемых систем: иерархия, вершинные операторы, высшие времена и т. д.

Благодарности. Мы хотели бы выразить глубокую признательность Р. Бакстеру, В. Бажанову и М. Батчелору за полезные стимулирующие обсуждения. Один из нас (С.С.) хотел бы также искренне поблагодарить С. Пакуляка, Г. фон Гелена и Ж.-М. Майяра за их интерес к работе.

Работа финансировалась Australian Research Council, РФФИ (грант № 01-01-00201), фондом ИНТАС (грант № 00-00055).

Список литературы

- [1] *S. Sergeev*. Phys. Lett. A. 1998. V. 253. P. 145–150.
- [2] *S. Sergeev*. Phys. Lett. A. 2000. V. 265. P. 364–368.
- [3] *S. Sergeev*. J. Nonlinear Math. Phys. 2000. V. 7. № 1. P. 57–72.
- [4] *S. Sergeev*. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 5693–5714.
- [5] *I. Korepanov, J.-M. Maillard, S. Sergeev*. Phys. Lett. A. 1997. V. 232. P. 211–216.
- [6] *A. Yu. Volkov*. Lett. Math. Phys. 1997. V. 39. P. 313–329.
- [7] *R. Hirota*. J. Phys. Soc. Japan. 1981. V. 50. P. 3785–3791.