Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. К. Погребков, О квантовании уравнения $Kd\Phi$, $ТМ\Phi$, 2001, том 129, номер 2, 333–344

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:40:06

О КВАНТОВАНИИ УРАВНЕНИЯ КдФ

Рассмотрена процедура квантования скобок Гарднера–Захарова–Фаддеева и Магри в терминах фермионного представления для поля КдФ. Показано, что в обоих случаях гамильтонианы представляются как суммы двух хорошо определенных операторов, каждый из которых билинеен и диагонален по отношению либо к фермионным, либо к бозонным (токовым) операторам рождения–уничтожения. Процедура квантования не требует пространственного обрезания и может быть проведена на всей оси. Из предлагаемого подхода следует как существование в гильбертовом пространстве солитонных состояний, так и квантование солитонных параметров. Помимо этого показано, что бездисперсионное уравнение КдФ в квантовом случае решается явно и однозначно.

1. ВВЕДЕНИЕ

Знаменитое уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)¹⁾

$$v_t = 6vv_x - \alpha^2 v_{xxx} \quad (1.1)$$

на вещественную функцию $v(t, x)$ дало в свое время [1] первый пример вполне интегрируемого дифференциального уравнения, т.е. такого уравнения, которое может быть записано в лаксовой форме как условие совместности двух линейных уравнений

$$-\alpha^2 \varphi_{xx}(x, k) + v(x) \varphi(x, k) = k^2 \varphi(x, k), \quad (1.2)$$

$$\varphi_t = -4\alpha^2 \varphi_{xxx} + 6v(x) \varphi_x + 3v_x(x) \varphi - 4i\alpha^2 k^3 \varphi \quad (1.3)$$

на вспомогательную функцию $\varphi(x, k)$ (мы опускаем зависимость от t во всех случаях, когда нет необходимости указывать ее явно). В случае, когда $v(x)$ — гладкая вещественная функция, достаточно быстро убывающая при $|x| \rightarrow \infty$, к уравнению (1.1) применим метод обратной задачи рассеяния (МОЗР) (см. [2], [3] и цитированную там литературу). Этот метод основан на прямой и обратной задачах рассеяния для линейной задачи (1.2)

¹⁾ В (1.1) α — вещественный параметр, который в случае, если он отличен от нуля, масштабированием может быть сведен к 1.

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия. E-mail: pogreb@mi.ras.ru

и приводит к линейной эволюции соответствующих спектральных данных и однозначной разрешимости (при всех $\alpha \neq 0$) начальной задачи для уравнения (1.1).

Уравнение КдФ было также первым нелинейным интегрируемым уравнением, для которого была доказана бигамильтоновость. Точнее говоря, существуют две (локальные) пуассоновы структуры: скобки Гарднера–Захарова–Фаддеева [4] и Магри [5], равные соответственно

$$\{v(x), v(y)\}_1 = \delta'(x - y), \quad (1.4)$$

$$\{v(x), v(y)\}_2 = (v(x) + v(y))\delta'(x - y) - \frac{\alpha^2}{2}\delta'''(x - y), \quad (1.5)$$

такие, что уравнение (1.1) можно записать двумя способами:

$$v_t = -\{H_1, v\}_1, \quad v_t = -\{H_2, v\}_2, \quad (1.6)$$

где гамильтонианы H_1 и H_2 равны

$$H_1 = \int dx \left(v^3(x) + \frac{\alpha^2}{2} v_x^2(x) \right), \quad (1.7)$$

$$H_2 = \int dx v^2(x). \quad (1.8)$$

Квантование уравнения КдФ в периодическом случае оказалось важным с точки зрения конформной теории поля [6]–[8], поскольку пуассоновы структуры (1.4) и (1.5) совпадают соответственно с коммутационными соотношениями для алгебры токов и алгебры Вирасоро. Задача квантования на всей оси сталкивается с необходимостью придать операторный смысл обоим гамильтонианам, что предполагает введение некоторой регуляризации (например, пространственных обрезаний). Как результат, каждая такая процедура приводит к неприменимости МОЗР уже на классическом уровне: непрерывный и дискретный спектры задачи (1.2) оказываются перемешанными, а наиболее интересные, т.е. солитонные, решения не существуют.

В данной работе мы показываем, что, представляя $v(x)$ с помощью фермионных полей в виде составного оператора, можно обойтись в (1.7) и (1.8) без процедуры обрезания, поскольку оба гамильтониана оказываются при этом хорошо определенными операторами в фермионном фоксовском пространстве. Мы показываем также, что в этом пространстве существует состояние, которое может быть названо “односолитонным”.

Случай $\alpha = 0$ в (1.1) (бездисперсионное уравнение КдФ) должен рассматриваться отдельно. В этой ситуации (см. [2]) МОЗР неприменим, однако начальная задача допускает параметрическое представление для решения: $x = s - 6tv_0(s)$, $v(t, x) = v_0(s)$, где v_0 – начальное данное. Это представление описывает переворот фронта, и в общем положении при достаточно больших t функция $v(t, x)$ не является однозначной функцией x . Квантовая версия бездисперсионного уравнения КдФ также привлекает существенное внимание в литературе (см., например, [9], [10]) в связи с теорией струн. Мы показываем здесь, что в квантовом случае это уравнение однозначно и явно разрешимо.

Статья устроена следующим образом. В разделе 2 мы кратко перечислим некоторые хорошо известные результаты (см., например, [11]) по “двумерным безмассовым” фермионам. В разделах 3 и 4 мы рассматриваем соответственно квантование скобок Гарднера–Захарова–Фаддеева (1.4) и Магри (1.5). В разделе 5 обсуждаются некоторые общие аспекты фермионизации интегрируемых моделей.

2. БЕЗМАССОВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ФЕРМИОНЫ

Пусть $\mathcal{H}$ – фермионное пространство Фока, порождаемое операторами $\psi(k)$ и $\psi^*(k)$, где $*$ означает эрмитово сопряжение. Эти операторы удовлетворяют каноническим антикоммутиационным соотношениям

$$\{\psi^*(k), \psi(p)\}_+ = \delta(k-p), \quad \{\psi(k), \psi(p)\}_+ = 0. \quad (2.1)$$

Пусть $\Omega \in \mathcal{H}$ означает вакуумный вектор и $\psi|_{k<0}$ и $\psi^*|_{k>0}$ являются операторами уничтожения,

$$\psi(k)\Omega|_{k<0} = 0, \quad \psi^*(k)\Omega|_{k>0} = 0, \quad (2.2)$$

а $\psi(k)|_{k>0}$ и $\psi^*(k)|_{k<0}$ – операторами рождения. Фермионное поле определяется как преобразование Фурье

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} \psi(k) \quad (2.3)$$

и удовлетворяет условиям

$$\{\psi^*(x), \psi(y)\} = \delta(x-y), \quad \{\psi(x), \psi(y)\} = 0, \quad (2.4)$$

$$(\Omega, \psi(x)\psi^*(y)\Omega) = (\Omega, \psi^*(x)\psi(y)\Omega) = \frac{(2\pi i)^{-1}}{x-y-i0}. \quad (2.5)$$

В описании безмассовых двумерных фермионов существенную роль играют ток и плотность энергии-импульса, задаваемые соответствующими билинейными комбинациями:

$$j(x) = :\psi^*\psi:(x), \quad u(x) = \frac{i}{2} (: \psi^*\psi_x:(x) - : \psi_x^*\psi:(x)); \quad (2.6)$$

они также будут основными объектами нашего построения. В (2.6) $: \dots :$ означает ви́ковское упорядочение по отношению к фермионным операторам рождения–уничтожения, например $:\psi^*(x)\psi(y): = \psi^*(x)\psi(y) - (\Omega, \psi^*(x)\psi(y)\Omega)$, $:\psi^*\psi:(x) = \lim_{y \rightarrow x} :\psi^*(x)\psi(y):$ и т.д. Билинейные комбинации (2.6) суть самосопряженные операторнозначные обобщенные функции в пространстве $\mathcal{H}$, удовлетворяющие следующим коммутационным соотношениям:

$$[\psi(x), j(y)] = \delta(x-y)\psi(x), \quad (2.7)$$

$$[j(x), j(y)] = \frac{i}{2\pi} \delta'(x-y), \quad (2.8)$$

$$[u(x), u(y)] = i \left[(u(x) + u(y))\delta'(x-y) - \frac{1}{24\pi} \delta'''(x-y) \right], \quad (2.9)$$

$$[j(x), u(y)] = ij(y)\delta'(x-y). \quad (2.10)$$

Заряд фермионного поля

$$\Lambda = \int dx j(x) \quad (2.11)$$

— самосопряженный оператор, имеющий целочисленный спектр и аннулирующий вакуум: $\Lambda\Omega = 0$.

В дальнейшем нам потребуется следующее разложение операторов (2.6):

$$j(x) = j^+(x) + j^-(x), \quad u(x) = u^+(x) + u^-(x), \quad (2.12)$$

задаваемое посредством проекций

$$j^\pm(x) = \frac{\pm 1}{2\pi i} \int \frac{dy j(y)}{y - x \mp i0}, \quad u^\pm(x) = \frac{\pm 1}{2\pi i} \int \frac{dy u(y)}{y - x \mp i0}, \quad (2.13)$$

допускающих аналитическое продолжение в верхнюю и нижнюю полуплоскости переменной x . Эти положительные и отрицательные компоненты взаимно сопряжены, и

$$j^-(x)\Omega = 0, \quad u^-(x)\Omega = 0. \quad (2.14)$$

В силу первого равенства и коммутационного соотношения (2.8) можно ввести [11] бозонные операторы рождения—уничтожения $j(\pm k)$, $k > 0$:

$$j(x) = \frac{1}{2\pi} \int dk e^{ikx} j(k), \quad j^*(k) = j(-k), \quad j(k)\Omega|_{k < 0} = 0. \quad (2.15)$$

Эти бозонные операторы билинейны по отношению к фермионным, и с их помощью вводится другое виковское упорядочение для произведений токов, которое мы обозначаем символом $:\dots:$, под знаком которого все положительные компоненты токов помещены слева от отрицательных. Например,

$$:j(x)j(y): = j^+(x)j^+(y) + j^+(x)j^-(y) + j^+(y)j^-(x) + j^-(x)j^-(y), \quad (2.16)$$

и мы опять полагаем, что $:j^2:(x) = \lim_{y \rightarrow x} :j(x)j(y):$. Эквивалентным образом можно использовать равенство

$$:j(x)j(y): = j(x)j(y) - (\Omega, j(x)j(y)\Omega), \quad (2.17)$$

где

$$(\Omega, j(x)j(y)\Omega) = \frac{(2\pi i)^{-2}}{(x - y - i0)^2}. \quad (2.18)$$

Наше исследование квантовой версии уравнения КдФ во многом основано на соотношениях между этими двумя нормальными произведениями. Так, по формуле (2.17) и теореме Вика для произведения $j(x)j(y)$, где токи заданы посредством (2.6), получаем

$$:j(x)j(y): = :j(x)j(y): + \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{:\psi^*(x)\psi(y): - :\psi^*(y)\psi(x):}{x - y} \right). \quad (2.19)$$

В пределе $y \rightarrow x$ можно воспользоваться тем, что любое соотношение вида $:\dots\psi(x)\dots\psi(x)\dots:$ обращается в ноль, что существенно понижает степени фермионных операторов и упрощает результаты. В (2.19), например, первый член в правой части в этом пределе обращается в ноль, и мы получаем

$$:j^2:(x) = \frac{1}{\pi}u(x). \quad (2.20)$$

Соотношения такого типа могут быть получены и для старших степеней токов:

$$:j^3:(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(3:\psi_x^*\psi_x:(x) - \frac{1}{2}j_{xx}(x) \right), \quad (2.21)$$

где опять старшие степени ферми-операторов выпадают. Равенство (2.19) также может быть использовано для производных токов, например

$$:j_x^2:(x) = :j_x^2:(x) + \frac{1}{6\pi}\partial_x^2 u(x) + \frac{1}{6\pi i}(:\psi_x^*\psi_{xx}:(x) - :\psi_{xx}^*\psi_x:(x)), \quad (2.22)$$

где $:j_x^2: = :\psi_x^*\psi^*\psi_x\psi:$ и т.д. Можно также расширить бозонное упорядочение $:\dots:$ на выражения, содержащие сами фермионные поля:

$$:j(x)\psi(y): = j^+(x)\psi(y) + \psi(y)j^-(x). \quad (2.23)$$

Тогда по (2.13) имеем

$$:j(x)\psi(y): = :j(x)\psi(y): + \frac{i}{2\pi} \frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y}. \quad (2.24)$$

Это выражение хорошо определено в пределе $y \rightarrow x$ вместе со своими производными по x или y , и мы получаем

$$:\frac{\partial^n j}{\partial x^n}\psi:(x) = :\frac{\partial^n j}{\partial x^n}\psi:(x) - \frac{1}{2\pi i(n+1)} \frac{\partial^{n+1}\psi(x)}{\partial x^{n+1}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.25)$$

В частности, при $n = 0$ имеем соотношение

$$:j\psi:(x) = -\frac{\psi_x(x)}{2\pi i}, \quad (2.26)$$

которое лежит в основе бозонизации фермионов [12]–[14].

ЗАМЕЧАНИЕ. Для упрощения изложения мы положили $\hbar = 1$. Чтобы восстановить постоянную Планка, следует совершить подстановку $[\cdot, \cdot] \rightarrow [\cdot, \cdot]\hbar$, $\{\cdot, \cdot\}_+ \rightarrow \{\cdot, \cdot\}_+ \hbar$ во всех коммутаторах и антикоммутаторах и, кроме того, в x -представлении необходимо заменить $\pi \rightarrow \pi/\hbar$. Тогда легко видеть, что основные соотношения, приведенные здесь, сингулярны в пределе $\hbar \rightarrow 0$, так что все специфичны для квантового случая и, подобно процедуре фермионизации для уравнения синус-Гордон [13], [14], не имеют аналога в классической теории.

3. КВАНТОВАНИЕ СКОБКИ ГАРДНЕРА–ЗАХАРОВА–ФАДДЕЕВА

Для того чтобы проквантовать скобку (1.4), положим

$$v(x) = \sqrt{2\pi} j(x), \quad (3.1)$$

так что в силу (2.8) $[v(x), v(y)] = i\delta'(x-y)$, и выберем квантовый гамильтониан бозонно упорядоченным (1.7),

$$H_1 = \int dx :v^3(x) + \frac{\alpha^2}{2} v_x^2(x):. \quad (3.2)$$

Этот гамильтониан является хорошо определенным оператором и не нуждается ни в какой регуляризации. По (3.1) $v^3 = (2\pi)^{3/2} j^3$, и вследствие (2.21) имеем

$$H_1 = \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int dx : \psi_x^* \psi_x : (x) + \alpha^2 \pi \int dx : j_x^2 : (x), \quad (3.3)$$

так что наиболее сингулярная часть гамильтониана (3.2), имеющая третий порядок по отношению к бозонным операторам, имеет лишь второй порядок по отношению к фермионным операторам. В силу разложения (2.3) справедливо

$$\int dx : \psi_x^* \psi_x : (x) = \int_{-\infty}^0 dk k^2 \psi^*(k) \psi(k) - \int_0^{\infty} dk k^2 \psi(k) \psi^*(k), \quad (3.4)$$

а в то же время по (2.15)

$$\int dx : j_x^2 : (x) = 2 \int_0^{\infty} dk k^2 j(k) j(-k). \quad (3.5)$$

Поэтому оба члена в (3.3) билинейны по отношению либо к фермионным, либо к бозонным операторам рождения–уничтожения, они нормально упорядочены и имеют диагональную форму, т.е. содержат лишь члены типа “рождение $\times$ умножение”. В частности, по (2.3) и (2.15)

$$H_1 \Omega = 0, \quad (3.6)$$

несмотря на то что первый член в (3.3) не является положительно-определенным, как следует из (3.4). С другой стороны, равенство (3.6) показывает, что вакуумные средние одновременных произведений полей не зависят от времени, а тогда оба типа виковских упорядочений совместны с временной эволюцией. В силу (2.22) гамильтониан можно переписать в фермионно упорядоченном виде:

$$\begin{aligned} H_1 = & \frac{3}{\sqrt{2\pi}} \int dx : \psi_x^* \psi_x : (x) + \alpha^2 \pi \int dx : j_x^2 : (x) + \\ & + \frac{\alpha^2}{6i} \int dx (: \psi_x^* \psi_{xx} : (x) - : \psi_{xx}^* \psi_x : (x)). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Понятно, что эволюция, заданная гамильтонианом (3.2),

$$v_t \equiv i[H_1, v] = 6 : vv_x : - \alpha^2 v_{xxx} \quad (3.8)$$

есть в точности квантовая версия уравнения (1.1), нормально упорядоченная по отношению к бозонным операторам. Благодаря (3.1) уравнение (3.8) в терминах тока принимает вид $j_t(x) = (3\sqrt{2\pi} :j^2:(x) - \alpha^2 j_{xx}(x))_x$, что в соответствии с (3.3) дает квантовую *билинейную* форму уравнения КДФ в терминах фермионных полей:

$$j_t(x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{6}{\sqrt{2\pi}} u(x) - \alpha^2 j_{xx}(x) \right), \quad (3.9)$$

где u определено в (2.6). Уравнение (3.9) можно рассматривать как “квантовую форму Хироты” уравнения КДФ. В то же время временная эволюция $\psi_t \equiv i[H_1, \psi]$ фермионного поля нелинейна,

$$\begin{aligned} \psi_t(x) &= \frac{3i}{\sqrt{2\pi}} \psi_{xx}(x) + 2\pi i \alpha^2 :j_{xx}\psi:(x) = \\ &= \frac{3i}{\sqrt{2\pi}} \psi_{xx}(x) - \frac{\alpha^2}{3} \psi_{xxx}(x) + 2\pi i \alpha^2 :j_{xx}\psi:(x), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где первая строчка следует из (3.3), а вторая – из (3.7) (или из (2.25) для $n = 2$).

Исследование спектра квантового гамильтониана будет предметом специального рассмотрения. Здесь мы показываем лишь, что в фермионном фоковском пространстве существует состояние, которое можно считать односолитонным в том смысле, что среднее от поля v по отношению к этому состоянию равно знаменитому классическому односолитонному решению

$$v_{1\text{-solit}} = -\frac{2\kappa^2}{\text{ch}^2 \frac{\kappa}{\alpha}(x - 4\kappa^2 t - \alpha)}, \quad (3.11)$$

по крайней мере в нулевой (или в любой фиксированный) момент времени. С этой целью рассмотрим унитарное преобразование

$$\hat{\psi}(x) = W\psi(x)W^*, \quad \hat{j}(x) = Wj(x)W^*, \quad (3.12)$$

такое что

$$\hat{\psi}(x) = e^{i\gamma(x)}\psi(x), \quad (3.13)$$

где $\gamma(x)$ – некоторая (гладкая) c -числовая функция. Для существования в пространстве $\mathcal{H}$ оператора W необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла асимптотическому условию

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \gamma(x) - \lim_{x \rightarrow -\infty} \gamma(x) = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (3.14)$$

Из соотношений (2.6) и (3.13) для тока получается формула

$$\hat{j}(x) = j(x) - \frac{\gamma'(x)}{2\pi}, \quad (3.15)$$

а тогда по (3.1) имеем $(W^*\Omega, v(x)W^*\Omega) = -\gamma'(x)/(2\pi)$. Для того чтобы правая часть этого равенства совпадала с солитонным решением (3.11) при $t = 0$, следует положить

$$\gamma(x) = 2\alpha\kappa\sqrt{2\pi} \operatorname{th} \frac{\kappa}{\alpha}(x - x_0), \quad (3.16)$$

а тогда условие (3.14) означает, что солитонный параметр κ квантуется:

$$\kappa = \frac{\sqrt{2\pi}}{4\alpha} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (3.17)$$

Отметим, что значение $n = 0$ на самом деле соответствует случаю, когда $(W^*\Omega, v(x)W^*\Omega) = 0$, т.е. случаю отсутствия солитона. Это единственное значение, которое сохраняет заряд Λ (2.11) при преобразовании (3.12), (3.13). При стандартном квантовании уравнения КдФ бозонное гильбертово пространство соответствует нулевому зарядовому сектору рассматриваемого здесь фермионного фоковского пространства $\mathcal{H}$. В этом секторе при положительных n не существует преобразования (3.15)–(3.17). Это доказывает, что солитонное состояние $W^*\Omega$, появившееся в нашем построении, существует лишь благодаря процедуре фермионизации.

Мы доказали (формула (3.9)), что ток (а тогда и $v(t, x)$) эволюционирует во времени как билинейная комбинация. Таким образом, разложение (2.12) на положительную и отрицательную части сохраняется в эволюции, и эти части величин j и u эволюционируют независимо. Это доказывает корректность следующего построения. Пусть $\varphi(x, k)$ ($k \in \mathbb{C}$) является операторным решением следующего дифференциального уравнения:

$$-\alpha^2 \varphi_{xx} + :v(x)\varphi: = k^2 \varphi, \quad (3.18)$$

где $: \dots :$ понимается как

$$:v(x)\varphi: = v^+(x)\varphi + \varphi v^-(x) \quad (3.19)$$

и выбрано решение (3.18), нормированное на k -бесконечности,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(x, k) e^{\frac{ikx}{\alpha}} = 1.$$

Это дифференциальное уравнение есть не что иное, как явное квантование классической линейной задачи (1.2). Решение (по крайней мере, формальное) уравнения (3.18) существует и равно упорядоченному (в бозонном смысле) классическому решению Йоста при замене $v(x)$ его операторным значением. Тогда, принимая во внимание независимость нормального упорядочения от времени, мы выводим, что φ удовлетворяет квантованной версии уравнения (1.3),

$$\varphi_t = -4\alpha^2 \varphi_{xxx} + 6:v(x)\varphi_x: + 3:v_x(x)\varphi: - 4i\alpha^2 k^3 \varphi. \quad (3.20)$$

Теперь по (3.19) и снова в силу независимости нормального упорядочения от времени мы получаем, что разность $\varphi_t - i[H_1, \varphi]$ удовлетворяет (3.2). Тогда в силу асимптотического условия на φ эта разность обращается в ноль, т.е. $\varphi_t = i[H_1, \varphi]$. С другой стороны, по аналогии с классическим случаем условие совместности уравнений (3.18) и (3.20) эквивалентно равенству

$$:(v_t - 6vv_x + \alpha^2 v_{xxx})\varphi(x, k): = 0, \quad (3.21)$$

что дает квантовое уравнение КдФ (3.8) в силу асимптотического свойства $\varphi(x, k)$.

Как отмечалось во введении, в классическом случае бездисперсионное уравнение КдФ требует отдельного рассмотрения. Рассмотрим теперь случай $\alpha = 0$ в квантовой ситуации. Прежде всего в этом случае в гамильтониане H_1 в (3.3) сохраняется лишь первый (билинейный по фермионным операторам) член. Соответственно по (3.10) фермионное поле эволюционирует линейно, и мы получаем явное решение

$$\psi(t, x) = (2\pi)^{-1} \int dy \int dk e^{ik(x-y) - \frac{3ik^2 t}{\sqrt{2\pi}}} \psi(y),$$

где $\psi(x)$ – начальное значение для $\psi(t, x)$. Тогда

$$\psi(t, x) = \frac{e^{-\frac{i\pi}{4} \operatorname{sgn} t}}{\sqrt{6|t|\sqrt{2\pi}}} \int dy e^{\frac{i(x-y)^2}{12t} \sqrt{2\pi}} \psi(y). \quad (3.22)$$

Благодаря этому равенству легко проверить непосредственно, что одновременные ожидания произведений фермионных полей не зависят от времени, например $(\Omega, \psi(t, x) \psi^*(t, y) \Omega) = (\Omega, \psi(x) \psi^*(y) \Omega)$, что подтверждает, что нормальное упорядочение сохраняется при временной эволюции. Таким образом, по (2.6) и (3.1) мы получаем явное операторное решение

$$v(t, x) = \frac{1}{6|t|} \int dy \int dy' e^{\frac{\sqrt{2\pi}}{12it} ((x-y)^2 - (x-y')^2)} : \psi^*(y) \psi(y') : \quad (3.23)$$

квантового бездисперсионного уравнения КдФ

$$v_t(t, x) = 6 : v(t, x) v_x(t, x) :. \quad (3.24)$$

На самом деле нетрудно проверить непосредственно, что (3.23) удовлетворяет этому уравнению. Итак, мы видим, что в квантовом случае бездисперсионное уравнение решается однозначно и явно.

4. КВАНТОВАНИЕ СКОБКИ МАГРИ

В этом разделе мы кратко опишем некоторые результаты, относящиеся к квантованию скобки Магри (1.5). Процедура фермионизации соответствующих коммутационных соотношений хорошо известна в литературе (см., например, [7]), так что здесь мы рассмотрим лишь структуру гамильтониана, возникающую в результате применения данной процедуры. Принимая во внимание равенства (2.8)–(2.10), естественно выбрать

$$v(x) = u(x) + \alpha \sqrt{\pi} j_x(x), \quad (4.1)$$

где α – произвольная вещественная константа. С использованием (2.6) и (2.20) этот оператор можно также переписать в следующих формах:

$$\begin{aligned} v(x) &= \left(\frac{i}{2} + \alpha \sqrt{\pi} \right) : \psi^* \psi_x : (x) + \left(\frac{-i}{2} + \alpha \sqrt{\pi} \right) : \psi_x^* \psi : (x) \equiv \\ &\equiv \pi : j^2 : (x) + \alpha \sqrt{\pi} j_x(x). \end{aligned} \quad (4.2)$$

В силу (2.8)–(2.10) он удовлетворяет коммутационному соотношению

$$[v(x), v(y)] = i \left[(v(x) + v(y))\delta'(x - y) - \left(\frac{\alpha^2}{2} + \frac{1}{24\pi} \right) \delta'''(x - y) \right], \quad (4.3)$$

являющемуся естественным квантовым аналогом скобки (1.5), включающим в себя также квантовые поправки (см. заключительное замечание в разделе 2). Для того чтобы ввести квантовую версию гамильтониана (1.8), необходима некоторая процедура упорядочения для операторов (4.1). Мы выбираем здесь

$$N(v^2)(x) = v^+(x)^2 + 2v^+(x)v^-(x) + v^-(x)^2, \quad (4.4)$$

где положительные и отрицательные части понимаются в смысле (2.13). Отметим, что теперь, в отличие от бозонного виковского упорядочения $:\dots:$, разность $v^2(x) - N(v^2)(x)$ является (бесконечным) оператором. Вообще говоря, это означает, что следует рассмотреть также некоторые иные упорядочения, и в этой связи приводимые ниже результаты следует понимать как предварительные. Пусть

$$H_2 = \int dx N(v^2)(x), \quad (4.5)$$

тогда

$$v_t(x) \equiv i[H_2, v(x)] = \frac{\partial}{\partial x} [3N(v^2)(x) - \alpha^2 v_{xx}(x)]. \quad (4.6)$$

Мы видим, что введенный в (4.1) параметр α может быть идентифицирован с параметром α в уравнении КдФ. Более того, посредством вычислений того же типа, что и в предыдущем разделе, мы выводим, что гамильтониан равен

$$H_2 = \left(\frac{1}{4} + \alpha^2 \pi \right) \int dx :j_x^2:(x) - i\alpha^2 \int dx (: \psi_x^* \psi_{xx}:(x) - : \psi_{xx}^* \psi_x:(x)). \quad (4.7)$$

Этот оператор снова хорошо определен и равен сумме двух членов, билинейных по отношению к бозонным и фермионным операторам рождения–уничтожения, соответственно. В частности, в бездисперсионном случае

$$H_2|_{\alpha=0} = \frac{1}{4} \int dx :j_x^2:(x), \quad (4.8)$$

так что теперь гамильтониан билинеен по бозонным операторам. Это опять означает, что бездисперсионное уравнение КдФ разрешимо явно. Отметим, что рассмотренный здесь случай $\alpha = 0$ не имеет ничего общего с известным в литературе так называемым случаем $c = -2$ (см., например, [8], где результат, представленный в (4.8), был пропущен).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы показали здесь, что при проведении процедуры фермионизации, когда поле КдФ представляется некоторым составным объектом, старшие операторные члены обоих гамильтонианов превращаются лишь в билинейные по отношению к фермионным полям. Более того, оба гамильтониана суть хорошо определенные операторы, не требующие никакой регуляризации, так что квантовая теория может рассматриваться на всей оси. Тот факт, что при фермионизации нелинейные члены гамильтонианов существенно упрощаются, известен из первых работ по этой процедуре для уравнения синус-Гордон [13], [14]. Фермионные поля также естественно появляются в квантовой теории нестационарного уравнения Шредингера и некоторых интегрируемых моделей статистической физики (см. [15]–[17]) при описании предела бесконечной связи.

Удивительно, но “фермионные” свойства интегрируемых моделей можно обнаружить уже на классическом уровне. Действительно, если рассматриваются N -солитонные решения уравнения КдФ с параметрами $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ (ср. (3.11)), то, как доказывается в МОЗР [2], [3], эти параметры никогда не совпадают,

$$\kappa_i \neq \kappa_j, \quad i \neq j. \quad (5.1)$$

Иными словами, несмотря на то что $\kappa_1, \dots, \kappa_N$ суть переменные действия [2], соответствующее классическое фазовое пространство не плоско. В квантовом случае условие (5.1) – условие типа принципа Паули, характерное для фермионов.

Мы доказали существование солитонного состояния и квантование (3.17) солитонного параметра, однако проблема исследования спектров обоих “билинейных” гамильтонианов осталась открытой и требует специального исследования. Отметим также, что полученные здесь результаты основаны на свойствах стандартных безмассовых фермионных полей. Интересно рассмотреть аналогичную процедуру, основанную на (анионном) обобщении [18] этого объекта.

Благодарности. Данная работа частично поддержана РФФИ (гранты № 99-01-00151 и № 00-15-96046) и INTAS (грант № 99-1782).

Список литературы

- [1] *C. S. Gardner, J. M. Green, M. D. Kruskal, R. M. Miura.* Phys. Rev. Lett. 1967. V. 19. P. 1095.
- [2] *В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский.* Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [3] *Ф. Калоджеро, А. Дегасперис.* Спектральные преобразования и солитоны. Методы решения и исследования нелинейных эволюционных уравнений. М.: Мир, 1985.
- [4] *C. Gardner.* J. Math. Phys. 1971. V. 12. P. 1548; *В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев.* Функц. анализ и его прилож. 1971. Т. 5. № 4. С. 18.
- [5] *F. Magri.* A geometrical approach to the nonlinear solvable equations. In: Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. Lect. Notes Phys. V. 120. Eds. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani. Berlin: Springer, 1980. P. 233.
- [6] *P. B. Wiegmann, A. Zabrodin.* Commun. Math. Phys. 2000. V. 213. P. 523.

- [7] *V. V. Bazhanov, S. L. Lukyanov, A. B. Zamolodchikov.* Commun. Math. Phys. 1996. V. 177. P. 381.
- [8] *P. Di Francesco, P. Mathieu, D. Sénéchal.* Mod. Phys. Lett. A. 1992. V. 7. P. 701.
- [9] *J. Barcelos-Neto, A. Constandache, A. Das.* Phys. Lett. A. 2000. V. 268. P. 342.
- [10] *I. Krichever.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. P. 415; Commun. Pure Appl. Math. 1992. V. 47. P. 437.
- [11] *А. Вайтман.* Проблемы в релятивистской динамике квантованных полей. М.: Наука, 1968.
- [12] *S. Coleman.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 2088.
- [13] *S. Mandelstam.* Phys. Rev. D. 1975. V. 11. P. 3026.
- [14] *А. К. Погребков, В. Н. Сушко.* ТМФ. 1975. Т. 24. С. 425; 1976. Т. 26. С. 419.
- [15] *Ф. Коломо, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин, В. Тогнетти.* ТМФ. 1993. Т. 94. С. 19.
- [16] *Н. М. Боголюбов, А. Г. Изергин, В. Е. Корепин.* Корреляционные функции интегрируемых систем и квантовый метод обратной задачи. М.: Наука, 1992.
- [17] *Н. А. Славнов.* ТМФ. 1996. Т. 108. С. 179.
- [18] *N. Ilieva, W. Thirring.* Eur. Phys. J. C. 1999. V. 6. P. 705; *Н. Илиева, В. Турринг.* ТМФ. 1999. Т. 121. С. 40.