Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Г. Строганов, XXZ -спиновая цепочка с параметром асимметрии $\Delta = -1/2$.
Вычисление простейших корреляторов, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 345–359

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf541>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 18:25:14

XXZ-СПИНОВАЯ ЦЕПОЧКА С ПАРАМЕТРОМ АСИММЕТРИИ $\Delta = -1/2$. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ КОРРЕЛЯТОРОВ¹⁾

Рассматривается конечная XXZ -спиновая цепочка с периодическими граничными условиями и *нечетным* числом узлов. Оказывается, что при специальном значении параметра асимметрии $\Delta = -1/2$ основное состояние этой системы, описываемой гамильтонианом $H_{xxz} = -\sum_{j=1}^N \{\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y - \frac{1}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\}$, имеет энергию $E_0 = -3N/2$. Хотя это состояние имеет антиферромагнитный характер, тем не менее удастся найти соответствующее решение уравнений Бете. Точнее, удастся явно построить тригонометрический полином $Q(u)$ степени $n = (N-1)/2$, нули которого являются параметрами волновой функции Бете для основного состояния системы. Как известно, этот полином удовлетворяет T - Q -уравнению Бакстера. С помощью второго независимого решения этого уравнения, соответствующего тому же самому собственному значению трансфер-матрицы $\hat{T}$, можно найти производную от энергии основного состояния XXZ -цепочки по кроссинг-параметру η . Эта производная непосредственно связана с одной из спин-спиновых корреляционных функций, которая оказывается равной $\langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -1/2 + 3/2N^2$. Эта корреляционная функция, в свою очередь, дает среднее число спиновых струн для основного состояния рассматриваемой цепочки $\langle N_{\text{string}} \rangle = (3/8)(N-1)/N$. Все эти простые формулы неверны в случае четного числа узлов цепочки N .

1. ВВЕДЕНИЕ

Около 30 лет назад Бакстер заметил [2], что энергия основного состояния, приходящаяся на один узел XYZ -спиновой цепочки, описываемой гамильтонианом

$$H_{xyz} = -\sum_{j=1}^N \{J_x \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + J_y \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + J_z \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z\}, \quad \vec{\sigma}_{N+1} = \vec{\sigma}_1, \quad (1)$$

имеет в термодинамическом пределе особенно простое значение:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{E}{N} = -(J_x + J_y + J_z)$$

¹⁾ Настоящая работа является детальным вариантом письма [1].

* Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия

для случая, когда J_x , J_y и J_z удовлетворяют соотношению

$$J_x J_y + J_y J_z + J_z J_x = 0.$$

Позднее, в своем обзоре по интегрируемым моделям [3] он отметил, что инверсионные соотношения допускают очень простое собственное значение для трансфер-матрицы 8-вершинной модели, соответствующей гамильтониану (1).

Используя стандартные обозначения a , b , c и d для весов 8-вершинной модели, мы можем переформулировать результат Бакстера следующим образом. Если веса 8-вершинной модели удовлетворяют соотношению

$$(a^2 + ab)(b^2 + ab) = (c^2 + ab)(d^2 + ab), \quad (2)$$

то у трансфер-матрицы есть собственное значение $T = (a + b)^N$, что дает для гамильтониана (1) упомянутое простое значение $E = -N(J_x + J_y + J_z)$.

Нетрудно видеть, что при $N = 1$, когда

$$\hat{T} = \begin{vmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a + b \end{vmatrix},$$

утверждение справедливо, но уже при $N = 2$ трансфер-матрица не имеет собственного значения $T = (a + b)^2$.

Исследуя T - Q -уравнение Бакстера в тригонометрическом пределе ($d = 0$), когда гамильтониан (1) сводится к гамильтониану XXZ -спиновой цепочки с параметром асимметрии $\Delta = -1/2$:

$$H_{xxz} = - \sum_{j=1}^N \left\{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y - \frac{1}{2} \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right\}, \quad \vec{\sigma}_{N+1} = \vec{\sigma}_1, \quad (3)$$

можно выяснить, что для рассматриваемого значения T функция Q , нули которой должны задавать параметры волновой функции Бете, существует, но имеет степень, большую чем $N/2$. Число параметров также больше $N/2$, и соответствующая функция Бете равна нулю.

Тем не менее есть по крайней мере три возможности иметь это простое собственное значение в спектре матрицы $\hat{T}$. Первые две связаны с модификацией системы (3).

1. В 1987 г. Алькараз и др. [4] рассмотрели открытую XXZ -спиновую цепочку со специальным полем на концах. Авторы провели численное исследование системы и для частного значения параметра асимметрии $\Delta = -1/2$ нашли линейную зависимость энергии основного состояния от числа узлов. Гамильтониан такой цепочки выражается с помощью элементов алгебры Темперли–Либа. В рассматриваемом случае эта алгебра имеет тривиальное одномерное представление, и этим обычно объясняют простоту собственного значения энергии основного состояния и тем самым наличие в спектре соответствующей трансфер-матрицы простого собственного значения. В настоящее время

благодаря многочисленным исследованиям 90-х годов (см., например, работы Хинрик-сена и др. [5] и Мартина-Дельгадо и Сьерры [6]) на этой системе лежит печать тривиальности. Мы намерены детально обсудить эти вопросы в будущей публикации, а пока ограничимся ссылкой на работу [7], где были сделаны попытки описать волновую функцию основного состояния системы в исходном базисе (см. также [8]).

2. Вторая возможность связана с тем, что наличие добавочного поля в соответствующей 6-вершинной модели нарушает симметрию, связанную с переворотом спина, и тем самым придает физический смысл тем решениям T - Q -уравнения Бакстера, для которых $Q(u)$ имеет степень $n > N/2$. Для специальных значений поля и при $\Delta = -1/2$ у трансфер-матрицы появляются простые собственные значения. Бажанов и Бакстер обратили внимание автора на эту возможность. Она была исследована в работе [9].

3. Две упомянутые выше возможности относятся к тригонометрическому случаю, и непонятно, как их можно обобщить на эллиптический случай. Оказывается, существует третья, самая простая возможность. А именно, достаточно рассмотреть обычную $XYZ(XXZ)$ -спиновую цепочку с периодическими граничными условиями, но для *нечетного* числа узлов N ! Автор проверил, что для $N = 3, 5, 7$ трансфер-матрица 8-вершинной модели имеет старшее собственное значение $T = (a+b)^N$, если только выполнено условие (2). Соответствующие собственные векторы приведены в приложении А.

Мы остановимся на этом третьем варианте. Из-за технических трудностей, присутствующих в 8-вершинной модели, ограничимся в данной работе частным случаем, когда вес $d = 0$ и модель сводится к 6-вершинной модели. При этом формула (2) сводится к соотношению $c^2 = a^2 + ab + b^2$, а гамильтониан дается формулой (3). Существование вышеупомянутого простого значения для энергии основного состояния в этом случае было открыто Алкаразом и др. [10].

2. ПЛАН РАБОТЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Наметим теперь последовательность действий и заодно фиксируем обозначения.

Веса 6-вершинной модели удобно параметризуются спектральным параметром u и кроссинг-параметром η :

$$a = \sin\left(u + \frac{\eta}{2}\right), \quad b = \sin\left(u - \frac{\eta}{2}\right), \quad c = \sin \eta.$$

Отметим частное значение $u = u_0 = \eta/2$, при котором трансфер-матрица пропорциональна оператору сдвига и ее собственные значения для трансляционно-инвариантных состояний равны $\sin^N \eta$.

Известно, что гамильтониан XXZ -спиновой цепочки связан с логарифмической производной трансфер-матрицы соотношением

$$\begin{aligned} H_{xxz} &= - \sum_{j=1}^N \{ \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \cos \eta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \} = \\ &= N \cos \eta - 2 \sin \eta \left(\frac{\hat{T}'_u}{\hat{T}} \right) \Big|_{u=u_0=\frac{\eta}{2}}. \end{aligned} \quad (4)$$

Основным источником информации для нас будет T - Q -уравнение Бакстера, которое можно представить в виде

$$T(u)Q(u) = \sin^N\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q(u - \eta) + \sin^N\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q(u + \eta). \quad (5)$$

Напомним, что $T(u)$ – всевозможные собственные значения трансфер-матрицы $\hat{T}$, а $Q(u)$ – собственные значения вспомогательной матрицы $\hat{Q}$, которые имеют вид

$$Q(u) = \prod_{j=1}^m \sin(u - u_j).$$

Параметры u_j удовлетворяют уравнениям анзаца Бете

$$\frac{\sin(u_j - \frac{\eta}{2})}{\sin(u_j + \frac{\eta}{2})} = \prod_{k \neq j}^m \frac{\sin(u_k - u_j - \eta)}{\sin(u_k - u_j + \eta)},$$

а m равно числу перевернутых спинов и связано с полной проекцией спина системы на ось z соотношением $S_z = N/2 - m$. Хорошо известно, что основное состояние для XXZ -цепочки с четным N имеет проекцию $S_z = 0$. По аналогии мы будем полагать, что основное состояние для цепочки с нечетным N имеет $S_z = 1/2$, т.е. $m = (N - 1)/2 = n$. Очевидно, что оно двукратно вырождено. В дальнейшем мы будем рассматривать уравнение Бакстера только для основного состояния.

Сформулируем схему работы.

Шаг 1. Устанавливаем связь между простейшей корреляционной функцией и производной основного собственного значения трансфер-матрицы по кроссинг-параметру η в точке $\eta = 2\pi/3$.

Шаг 2. Устанавливаем связь между упомянутой производной и решениями $q(u)$, $p(u)$ уравнения Бакстера.

Шаг 3. Фиксируя в уравнении Бакстера (5) кроссинг-параметр $\eta = 2\pi/3$ и предполагая, что у трансфер-матрицы в этом случае есть собственное значение $t(u) = \sin^N u$, мы находим для нечетных N решение $q(u)$ уравнения (5), имеющее степень $n = (N - 1)/2$. Тем самым мы получаем решение анзаца Бете и, используя квантовый метод обратной задачи [11], можем в принципе построить собственный вектор. В настоящее время явно построены собственные векторы вплоть до $N = 17$ [12]. При этом все компоненты положительны, так что согласно теореме Перрона–Фробениуса эти векторы соответствуют основному состоянию в данном секторе.

Заметим, что для четных N соответствующее решение $q(u)$ имеет минимальную степень $N/2 + 1$ и ему не соответствует никакой собственный вектор.

Наряду с “физическим” решением $q(u)$ находим второе независимое решение уравнения Бакстера $p(u)$. Оно имеет степень $n + 1$.

Шаг 4. Прямые вычисления.

Приведем список обозначений, которые будут использоваться в работе:

$N = 2n + 1$ – число узлов цепочки;

u – спектральный параметр;

η – кроссинг-параметр;

$\phi(u) = \sin^N u$;

$T(u)$ – собственное значение трансфер-матрицы, соответствующее основному состоянию;

$Q(u)$ – собственное значение матрицы $\hat{Q}$, соответствующее основному состоянию (первое решение уравнения Бакстера);

$P(u)$ – второе решение уравнения Бакстера, соответствующее тому же значению $T(u)$;

$f(u) = \sin^N u q(u)$ и $g(u) = \sin^N u p(u)$ – вспомогательные функции, удовлетворяющие более простым соотношениям, чем $q(u)$ и $p(u)$.

Естественно, что функции T , Q , P зависят также от кроссинг-параметра η . Нам удобно будет ввести обозначения $t(u)$, $q(u)$ и $p(u)$ для функций $T(u)$, $Q(u)$ и $P(u)$ при $\eta = 2\pi/3$, где мы их знаем в явном виде.

3. ЗАВИСИМОСТЬ ЭНЕРГИИ ОСНОВНОГО СОСТОЯНИЯ ОТ КРОССИНГ-ПАРАМЕТРА

Согласно формуле (4) энергия основного состояния XXZ -цепочки равна

$$\frac{E_0(\eta)}{N} = -2\langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \rangle + \cos \eta \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = \cos \eta - \frac{2 \sin \eta}{N} \left(\frac{T'_u}{T} \right) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}, \quad (6)$$

где скобки $\langle \cdot \rangle$ означают усреднение по основному состоянию. Мы использовали трансляционную инвариантность основного состояния, а также инвариантность гамильтониана по отношению к поворотам вокруг оси z .

Согласно гипотезе Бакстера [3], которую мы будем обосновывать ниже, при значении кроссинг-параметра $\eta = 2\pi/3$ мы имеем простое собственное значение $t(u) = (a+b)^N = \sin^N u$ трансфер-матрицы, и последнее уравнение примет вид

$$\frac{E_0\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{N} = -2\langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \rangle + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -\frac{3}{2}.$$

Далее возьмем производную по η от выражения (6):

$$E'_0(\eta) = -N \sin \eta \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -N \sin \eta - 2 \left\{ \cos \eta \left(\frac{T'_u}{T} \right) + \sin \eta \frac{d}{d\eta} \left(\frac{T'_u}{T} \right) \right\} \Big|_{u=\frac{\eta}{2}}. \quad (7)$$

Мы воспользовались эрмитовостью H :

$$\begin{aligned} (\langle |H| \rangle)' &= (\langle | \rangle)' H | + \langle | H(|) \rangle' + \langle | H' | \rangle = \\ &= E(\langle | \rangle)' | + E \langle |(|) \rangle' + \langle | H' | \rangle = E(\langle |(|) \rangle)' + \langle | H' | \rangle = \langle | H' | \rangle. \end{aligned}$$

Вновь полагая $\eta = 2\pi/3$, мы получаем выражение для простейшей корреляционной функции через производную основного собственного значения трансфер-матрицы по кроссинг-параметру η :

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle &= -\frac{1}{3} - \frac{2}{N} \frac{d}{d\eta} \left\{ \left(\frac{T'_u}{T} \right) \Big|_{u=\frac{\eta}{2}} \right\} \Big|_{\eta=\frac{2\pi}{3}} = \\ &= 1 + \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N+1} \left(T'_\eta - \frac{\sqrt{3}}{N} T''_{\eta u} \right) \Big|_{u=\frac{\pi}{3}, \eta=\frac{2\pi}{3}}. \end{aligned} \quad (8)$$

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ОСНОВНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ ТРАНСФЕР-МАТРИЦЫ ПО КРОССИНГ-ПАРАМЕТРУ η В ТОЧКЕ $\eta = 2\pi/3$

Уравнение Бакстера можно рассматривать как дискретную версию линейного дифференциального уравнения второго порядка, и мы можем выразить его коэффициенты в терминах двух независимых решений [13], [14]:

$$\phi(u) = P\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u - \frac{\eta}{2}\right) - P\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u + \frac{\eta}{2}\right) \quad (9)$$

и

$$T(u) = P(u + \eta)Q(u - \eta) - P(u - \eta)Q(u + \eta).$$

Напомним, что в данной работе мы рассматриваем лишь однородную 6-вершинную модель, т.е. $\phi(u) = \sin^N u$. Функции T , Q и P зависят как от спектрального параметра u , так и от кроссинг-параметра η . Далее, следуя методу работы [9] и беря полную производную по η от обоих уравнений, мы получаем

$$\begin{aligned} 0 &= P'_\eta\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u - \frac{\eta}{2}\right) + P\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q'_\eta\left(u - \frac{\eta}{2}\right) - P'_\eta\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u + \frac{\eta}{2}\right) - \\ &\quad - P\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q'_\eta\left(u + \frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}P'_u\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u - \frac{\eta}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}P\left(u + \frac{\eta}{2}\right)Q'_u\left(u - \frac{\eta}{2}\right) + \frac{1}{2}P'_u\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q\left(u + \frac{\eta}{2}\right) - \\ &\quad - \frac{1}{2}P\left(u - \frac{\eta}{2}\right)Q'_u\left(u + \frac{\eta}{2}\right), \\ T'_\eta(u) &= P'_\eta(u + \eta)Q(u - \eta) + P(u + \eta)Q'_\eta(u - \eta) - P'_\eta(u - \eta)Q(u + \eta) - \\ &\quad - P(u - \eta)Q'_\eta(u + \eta) + P'_u(u + \eta)Q(u - \eta) - P(u + \eta)Q'_u(u - \eta) + \\ &\quad + P'_u(u - \eta)Q(u + \eta) - P(u - \eta)Q'_u(u + \eta). \end{aligned}$$

Фиксируя затем $\eta = 2\pi/3$, перепишем четыре последних уравнения в следующем виде:

$$t(u) = \phi(u) = p\left(u + \frac{\pi}{3}\right)q\left(u - \frac{\pi}{3}\right) - p\left(u - \frac{\pi}{3}\right)q\left(u + \frac{\pi}{3}\right), \quad (10)$$

$$0 = A - \frac{B}{2}, \quad T'_\eta(u) \Big|_{\eta=\frac{2\pi}{3}} = A + B, \quad (11)$$

где мы ввели для краткости обозначения

$$\begin{aligned} A &= P'_\eta \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q \left(u - \frac{\pi}{3} \right) + p \left(u + \frac{\pi}{3} \right) Q'_\eta \left(u - \frac{\pi}{3} \right) - \\ &\quad - P'_\eta \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q \left(u + \frac{\pi}{3} \right) - p \left(u - \frac{\pi}{3} \right) Q'_\eta \left(u + \frac{\pi}{3} \right), \\ B &= -p' \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q \left(u - \frac{\pi}{3} \right) + p \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) - \\ &\quad - p' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q \left(u + \frac{\pi}{3} \right) + p \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q' \left(u + \frac{\pi}{3} \right). \end{aligned}$$

Мы воспользовались тем, что фиксированное значение $3\eta/2 = \pi$ является полупериодом, при сдвиге на который функции $Q(u)$ и $P(u)$ просто меняют знак.

Уравнение (10) дает нам значение $T(u)$ при $\eta = 2\pi/3$: $t(u) = \phi(u) = \sin^N u$. Таким образом, наше предположение о существовании простого собственного значения для трансфер-матрицы следует из периодичности второго независимого решения уравнения Бакстера.

Далее, сравнивая уравнения (11), мы исключаем неизвестные нам производные функций Q, P по η и сводим проблему вычисления производной функции T по η к вычислению производных функций $q(u), p(u)$ по u :

$$\begin{aligned} T'_\eta(u)|_{\eta=\frac{2\pi}{3}} &= \frac{3}{2}B = \frac{3}{2} \left\{ p \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) - p' \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q \left(u - \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + p \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q' \left(u + \frac{\pi}{3} \right) - p' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q \left(u + \frac{\pi}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Дифференцируя последнее равенство, получаем

$$\begin{aligned} T''_{\eta u}(u)|_{\eta=\frac{2\pi}{3}} &= \frac{3}{2} \left\{ p \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q'' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) - p'' \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q \left(u - \frac{\pi}{3} \right) + \right. \\ &\quad \left. + p \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q'' \left(u + \frac{\pi}{3} \right) - p'' \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q \left(u + \frac{\pi}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (13)$$

5. ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БАКСТЕРА, СООТВЕТСТВУЮЩИХ ОСНОВНОМУ СОСТОЯНИЮ ПРИ $\eta = 2\pi/3$

Используем технику работы [7]. Фиксируя в уравнении Бакстера (5) кроссинг-параметр $\eta = 2\pi/3$ и предполагая, что у трансфер-матрицы в этом случае есть собственное значение $t(u) = \sin^N u$, мы получаем уравнение

$$\sin^N u q(u) = \sin^N \left(u + \frac{\pi}{3} \right) q \left(u - \frac{2\pi}{3} \right) + \sin^N \left(u - \frac{\pi}{3} \right) q \left(u + \frac{2\pi}{3} \right). \quad (14)$$

Для нечетного $N = 2n + 1$ это уравнение имеет вид

$$f(u) + f \left(u + \frac{2\pi}{3} \right) + f \left(u + \frac{4\pi}{3} \right) = 0, \quad (15)$$

где $f(u) = \sin^{2n+1} u q(u)$. Используя кроссинг-инвариантность T - Q -уравнения и простую структуру матрицы $\hat{T}$ в точке $u = u_0 = \eta/2$, можно показать, что $q(u)$ является четной функцией, и, следовательно, $f(u)$ является нечетным тригонометрическим полиномом степени $3n + 1$, удовлетворяющим соотношению $f(u + \pi) = -f(u)$. Поэтому он имеет вид

$$f(u) = a_1 \sin(3n + 1)u + a_2 \sin(3n - 1)u + a_3 \sin(3n - 3)u + \dots \quad (16)$$

Уравнение (15) выполнено при условии, что $a_{3k} = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поэтому мы можем привести (16) к виду

$$f(u) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \sin(1 - 3n + 6k)u. \quad (17)$$

Функция $f(u)$ по определению делится на $\sin^{2n+1} u$. Это условие и фиксирует коэффициенты α_k . Очевидно, что первые $2n$ производных должны равняться нулю при $u = 0$. Четные производные равны нулю автоматически, а нечетные дают систему

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - 3n + 6k)^{2\mu+1} = 0, \quad \mu = 0, 1, \dots, n-1.$$

Отсюда следует, что для всех полиномов $P(x)$ степени не выше $n - 1$ выполнено соотношение

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - 3n + 6k) P((1 - 3n + 6k)^2) = 0. \quad (18)$$

Как в работе [7], определим n полиномов степени $n - 1$:

$$P_r(x) = \prod_{k=1, k \neq r}^n (x - (1 - 3n + 6k)^2).$$

Соотношение (18) для этих полиномов имеет вид

$$\begin{aligned} & \alpha_r (1 - 3n + 6r) \prod_{k=1, k \neq r}^n ((1 - 3n + 6r)^2 - (1 - 3n + 6k)^2) + \\ & + \alpha_0 (1 - 3n) \prod_{k=1, k \neq r}^n ((1 - 3n)^2 - (1 - 3n + 6k)^2) = 0. \end{aligned}$$

Это уравнение позволяет нам выразить все коэффициенты α_r через α_0 , и мы получаем, используя биномиальные коэффициенты,

$$f(u) = f_0 \sum_{k=0}^n \binom{n - \frac{1}{3}}{k} \binom{n + \frac{1}{3}}{n - k} \sin(1 - 3n + 6k)u, \quad (19)$$

где f_0 — произвольная постоянная.

Нули u_j функции $f(u)$, отличные от нулей $\sin u$, являются нулями функции $q(u)$ и доставляют решение уравнений анзаца Бете, соответствующее основному состоянию гамильтониана XXZ -спиновой цепочки (3).

Точно так же мы можем найти второе независимое решение уравнений (14) $p(u)$, имеющее степень $n + 1$. Точнее, как и в случае с первым решением, мы получим явную формулу для вспомогательной функции $g(u) = \sin^{2n+1} p(u)$:

$$g(u) = g_0 \sum_{k=0}^n \binom{n - \frac{2}{3}}{k} \binom{n + \frac{2}{3}}{n - k} \sin(2 - 3n + 6k)u. \quad (20)$$

Как и в случае, исследованном в работе [7], функции $f(u)$ и $g(u)$ являются решениями обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} f'' - 6n \operatorname{ctg} 3u f' + (1 - 9n^2)f &= 0, \\ g'' - 6n \operatorname{ctg} 3u g' + (4 - 9n^2)g &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫХ ФУНКЦИЙ

Вернемся к уравнению (8), которое сводит вычисление простейшей корреляционной функции к производным от трансфер-матрицы. Согласно формулам (12) и (13) мы можем переписать это уравнение следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle &= 1 + 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{N-1} \left\{ p \left(\frac{2\pi}{3} \right) \left[q'(0) - \frac{\sqrt{3}}{N} q''(0) \right] - \right. \\ &\quad - \left[p' \left(\frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{N} p'' \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] q(0) + \\ &\quad \left. + p(0) \left[q' \left(\frac{2\pi}{3} \right) - \frac{\sqrt{3}}{N} q'' \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] - \left[p'(0) - \frac{\sqrt{3}}{N} p''(0) \right] q \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

По счастью, значения спектрального параметра $u = 0$ и $u = 2\pi/3$ соответствуют особым точкам дифференциальных уравнений (21), и мы сможем выразить значения производных через значения самих функций. Начнем с того, что перейдем от дифференциальных уравнений для функций f и g к дифференциальным уравнениям для p и q . Подставляя определение $f(u) = \sin^{2n+1} u q(u)$ в (21), мы получаем

$$\frac{q''}{q} + \frac{2q'}{q} ((2n+1) \operatorname{ctg} u - 3n \operatorname{ctg} 3u) - \frac{2n(2n+1)}{\sin^2 u} - 6n(2n+1) \operatorname{ctg} u \operatorname{ctg} 3u - n(4+13n) = 0. \quad (23)$$

В окрестности точки $u = 0$ имеем $\operatorname{ctg} u = 1/u - u/3 + \dots$, а также $1/\sin^2 u = 1/u^2 + 1/3 + \dots$, и уравнение (23) принимает вид

$$\frac{q''}{q} + \frac{2(n+1)}{u} \frac{q'}{q} + \frac{5n(n+2)}{3} = 0.$$

Функция $q(u)$ четна, поэтому $q'(0) = 0$. Согласно правилу Лопиталя имеем

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{q'}{u} = q''(0),$$

и мы получаем

$$q''(0) = -\frac{5n(n+2)}{3(2n+3)}q(0). \quad (24)$$

Исследуя этим же способом дифференциальное уравнение (21) для $g(u) = \sin^{2n+1} u p(u)$, получаем

$$p''(0) = -\frac{5n^2 + 10n + 9}{3(2n+3)}p(0), \quad (25)$$

а $p'(0) = 0$ из-за четности функции $p(u)$.

Теперь рассмотрим окрестность точки $u = 2\pi/3$. Удобно переписать уравнение (23) в виде

$$\begin{aligned} \frac{q''}{q} + 2\left(\frac{q'}{q} + (2n+1)\operatorname{ctg} u\right)((2n+1)\operatorname{ctg} u - 3n\operatorname{ctg} 3u) - \\ - \frac{(2n+1)(2n+2)}{\sin^2 u} - 5n^2 + 4n + 2 = 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Функция $\operatorname{ctg} 3u$ имеет полюс в точке $u = 2\pi/3$, и для его компенсации должно выполняться

$$q'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2n+1}{\sqrt{3}}q\left(\frac{2\pi}{3}\right). \quad (27)$$

Вновь действуя по Лопиталю, получаем

$$\lim_{u \rightarrow \frac{2\pi}{3}} \frac{\frac{q'}{q} + (2n+1)\operatorname{ctg} u}{\operatorname{tg} 3u} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{q''}{q} - \left(\frac{q'}{q}\right)^2 - \frac{4(2n+1)}{3} \right\} \Bigg|_{u=\frac{2\pi}{3}},$$

и уравнение (26) в точке $u = 2\pi/3$ сводится к равенству

$$q''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = q\left(\frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{(2n+1)(8n-7)}{12} - \frac{5}{4(2n-1)} \right). \quad (28)$$

Аналогично получаем соотношения для производных от функции $p(u)$ в точке $u = 2\pi/3$:

$$p'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{2n+1}{\sqrt{3}}p\left(\frac{2\pi}{3}\right), \quad (29)$$

$$p''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = p\left(\frac{2\pi}{3}\right) \left(\frac{(2n+1)(8n-7)}{12} + \frac{7}{4(2n-1)} \right). \quad (30)$$

Подставляя результаты (24)–(30) в уравнение (22) и учитывая соотношения $q'(0) = p'(0) = 0$, получаем для корреляционной функции следующее выражение:

$$\begin{aligned} \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = & 1 + 2 \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2n+1} \left\{ \left[p \left(\frac{2\pi}{3} \right) q(0) - p(0) q \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] \times \right. \\ & \times \left(\frac{3}{2(2n-1)(2n+3)} - \frac{3}{2} \right) + \\ & \left. + \left[p \left(\frac{2\pi}{3} \right) q(0) + p(0) q \left(\frac{2\pi}{3} \right) \right] \frac{18}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Согласно формуле (9) для “вронскиана” мы имеем простое выражение для разности:

$$p \left(\frac{2\pi}{3} \right) q(0) - p(0) q \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \phi \left(\frac{2\pi}{3} \right) = \sin^{2n+1} \left(\frac{\pi}{3} \right),$$

поэтому уравнение (31) можно записать в виде

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2(2n-1)(2n+3)} + \frac{18R}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)}, \quad (32)$$

где

$$R = \frac{p \left(\frac{2\pi}{3} \right) q(0) + p(0) q \left(\frac{2\pi}{3} \right)}{p \left(\frac{2\pi}{3} \right) q(0) - p(0) q \left(\frac{2\pi}{3} \right)}.$$

В приложении Б мы покажем, что отношение $R = -1/[3(2n+1)]$, и, следовательно,

$$\langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2(2n+1)^2} = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2N^2}, \quad (33)$$

что и является одним из главных результатов работы. Учитывая, что действие оператора $\sigma_j^z \sigma_{j+1}^z$ определяется относительной ориентацией соседних спинов, мы легко можем переписать эту формулу на языке среднего числа спиновых струн, т.е. групп узлов с одинаковой ориентацией всех спинов:

$$\langle N_{\text{string}} \rangle = \frac{3}{4} \left(N - \frac{1}{N} \right).$$

Далее, очевидно, что

$$\langle H_{xxz} \rangle = -N \langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \rangle - N \langle \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \rangle + \frac{N}{2} \langle \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \rangle = -\frac{3N}{2}.$$

Отсюда, учитывая X – Y -симметрию системы, имеем

$$\langle \sigma_j^x \sigma_{j+1}^x \rangle = \langle \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y \rangle = \frac{5}{8} + \frac{3}{8N^2}.$$

7. ОБСУЖДЕНИЕ

Полученные результаты могут быть обобщены по крайней мере в трех направлениях. Обсудим ближайшие возможности.

1. В стандартном базисе все матричные элементы гамильтониана (3) являются целыми или полуцелыми числами. Рассматриваемое нами собственное значение также полуцелое. Неудивительно, что волновую функцию можно отнормировать так, что все ее компоненты являются целыми числами. Благодаря этому обстоятельству удалось с помощью программы “Математика” явно построить волновые функции для цепочек длины $N \leq 17$ и точно посчитать различные характеристики основного состояния. Получена обширная информация, заслуживающая специальной публикации [12]. Упомянем лишь один результат, относящийся к корреляционным функциям, которые в книге [15] называются *вероятностями образования ферромагнитной струны*. Все полученные данные согласуются с гипотетической формулой

$$\frac{\langle a_1 a_2 \dots a_{k-1} \rangle}{\langle a_1 a_2 \dots a_k \rangle} = \frac{2(2k-3)! (2k-1)! (2n+k)! (n-k)!}{(k-2)! (3k-2)! (2n-k+1)! (n+k-1)!},$$

где $a_j = (1 + \sigma_j^z)/2$. Ключом к этой формуле, которая при $k = 2$ сводится к доказанной нами формуле (33), являются удивительные комбинаторные свойства волновой функции основного состояния [12].

Обнаружение этих свойств инициировало изучение волновых функций систем, родственных рассмотренной нами XXZ -цепочке, и привело к формулировке большого количества гипотез, относящихся, в частности, к различным корреляционным функциям [16]–[18].

2. Ждет своей очереди эллиптический случай.

3. Мы рассматривали однородную 6-вершинную модель, чтобы получить спиновый гамильтониан, но также можно рассмотреть модели с различными типами неоднородности.

Заметим, что принципиальное отличие случая *нечетных* N даже в термодинамическом пределе отмечалось Фаддеевым и Тахтаджяном [19] для случая XXX -цепочки, Бааке и др. [20] для XXZ -цепочки, Бугрием [21] для случая модели Изинга, а также многими другими. Авторы [22] также использовали особенности XXZ -цепочек с нечетным числом узлов. Что касается недавних результатов, хотелось бы упомянуть последнюю теорему работы [14]. Работа [23], содержащая результаты расчетов XXX -спиновых цепочек со спинами $1/2, 1, \dots, 5/2$, также демонстрирует особенности цепочек нечетной длины. Упомянем и недавнюю работу Альбертини [24], в которой автор рассматривает антиферромагнитные цепочки с открытыми граничными условиями и подчеркивает, что их поведение существенно зависит от четности длины этих цепочек. В работе Хенкеля и Шоллвока [25] также отмечаются специальные черты XXZ -цепочек с $\Delta = -1/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Основное состояние для коротких XYZ -цепочек

Рассмотрим собственные векторы в базисе, где все операторы σ_j^z , $j = 1, \dots, N$, диагональны. Начнем с простейшего случая $N = 3$. Пишем ноль, если спин направлен

вниз, и единицу, если вверх: $|000\rangle \equiv |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle$, $|100\rangle \equiv |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle$ и т.д. Будем обозначать $\psi_{0,0,0}$, $\psi_{1,0,0}$ и т.д. соответствующие компоненты собственного вектора. Определим параметр $\alpha \equiv cd/ab = k \sin^2 2\eta$. Вектор основного состояния для $N = 3$ дается формулами

$$\psi_{0,0,0} = \alpha, \quad \psi_{0,1,1} = \psi_{1,0,1} = \psi_{1,1,0} = 1.$$

Три последние компоненты равны благодаря трансляционной инвариантности основного состояния. Ниже мы будем указывать лишь одну из таких компонент. Вектор основного состояния для $N = 5$ имеет вид

$$\psi_{0,0,0,0,0} = \alpha + \alpha^3, \quad \psi_{1,1,0,0,0} = 1 + \alpha^2, \quad \psi_{1,0,1,0,0} = 2, \quad \psi_{0,1,1,1,1} = 2\alpha.$$

И, наконец, для $N = 7$ компоненты равны

$$\begin{aligned} \psi_{0,0,0,0,0,0,0} &= 4\alpha^2 + 3\alpha^4 + \alpha^6, & \psi_{1,1,0,0,0,0,0} &= 4\alpha + 3\alpha^3 + \alpha^5, \\ \psi_{1,0,1,0,0,0,0} &= 7\alpha + \alpha^3, & \psi_{1,0,0,1,0,0,0} &= 7\alpha + \alpha^3, \\ \psi_{1,1,1,1,0,0,0} &= 1 + 5\alpha^2 + 2\alpha^4, & \psi_{1,1,1,0,1,0,0} &= 3 + 5\alpha^2, & \psi_{1,1,1,0,0,1,0} &= 3 + 5\alpha^2, \\ \psi_{1,1,0,1,1,0,0} &= 4 + 3\alpha^2 + \alpha^4, & \psi_{1,1,0,1,0,1,0} &= 7 + \alpha^2, & \psi_{1,1,1,1,1,1,0} &= 3\alpha + 5\alpha^3. \end{aligned}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Вычисление отношения R

Отношение R , входящее в выражение (32), можно представить в виде

$$R = \frac{r_p + r_q}{r_p - r_q},$$

где $r_p = p(2\pi/3)/p(0)$, а $r_q = q(2\pi/3)/q(0)$. Начнем с вычисления $q(0)$. Из формулы $f(u) = \sin^{2n+1} u \, q(u)$ немедленно следует, что

$$q(0)(2n+1)! = \left. \frac{d^{2n+1}f}{du^{2n+1}} \right|_{u=0} = \sum_{k=0}^n \alpha_k (1-3n+6k)^{2n+1}, \quad (34)$$

где мы использовали формулу (17) для функции $f(u)$. Для вычисления последней суммы мы используем то обстоятельство, что все предыдущие производные равны нулю в точке $u = 0$. Рассмотрим вспомогательный полином степени n

$$P(x) = \prod_{k=1}^n (x - (1-3n+6k)^2). \quad (35)$$

С одной стороны, этот полином имеет нули в точках $x_k = (1-3n+6k)^2$, $k = 1, 2, \dots, n$, и поэтому мы имеем

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1-3n+6k) P((1-3n+6k)^2) = \alpha_0 (1-3n) P((1-3n)^2). \quad (36)$$

Подставляя (35) в (36), получаем

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - 3n + 6k) P((1 - 3n + 6k)^2) = \alpha_0 6^{2n} (n!)^2 \binom{n - \frac{1}{3}}{n}. \quad (37)$$

С другой стороны, согласно свойству (18) эта же сумма определяется старшим коэффициентом полинома $P(x) = x^n + p(x)$, где степень $p(x)$ не выше $n - 1$:

$$\sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - 3n + 6k) P((1 - 3n + 6k)^2) = \sum_{k=0}^n \alpha_k (1 - 3n + 6k)^{2n+1} = (-1)^n \frac{d^{2n+1} f}{du^{2n+1}} \Big|_{u=0}, \quad (38)$$

где коэффициенты α_k входят в определение функции $f(u)$. Сравнивая между собой результаты (34), (37) и (38), мы получаем в итоге

$$q(0) = (-1)^n \alpha_0 6^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \binom{n - \frac{1}{3}}{n} = f_0 (-1)^n 6^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \binom{n - \frac{1}{3}}{n} \binom{n + \frac{1}{3}}{n}. \quad (39)$$

Вместо α_0 мы будем далее использовать постоянную f_0 из формулы (19). Точно так же, используя вторую вспомогательную функцию $g(u)$ (см. (20)), мы получаем

$$p(0) = 2g_0 (-1)^n 6^{2n} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \binom{n - \frac{2}{3}}{n} \binom{n + \frac{2}{3}}{n}.$$

Значение $q(2\pi/3)$ согласно определению $f(u) = \sin^{2n+1} u q(u)$ и формуле (19) дается соотношением

$$q\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2n+1} f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^n f_0 \sum_{k=0}^n \binom{n - \frac{1}{3}}{k} \binom{n + \frac{1}{3}}{n-k}. \quad (40)$$

Сумма в формуле (40) сводится к значению гипергеометрической функции в единице и согласно формуле Гаусса имеет вид

$$\sum_{k=0}^n \binom{n - \frac{1}{3}}{k} \binom{n + \frac{1}{3}}{n-k} = \binom{n + \frac{1}{3}}{n} F\left(-n, \frac{1}{3} - n, \frac{4}{3}, 1\right) = \binom{2n}{n}.$$

Разделив (40) на (39), получаем

$$r_q = \frac{q\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{q(0)} = (-3)^{3n} (2n+1)! \binom{2n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{4}{3}\right)},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция Эйлера. Точно так же мы получаем второе отношение:

$$r_p = \frac{p\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{p(0)} = -(-3)^{3n} (2n+1)! \binom{2n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{2\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{5}{3}\right)}.$$

Далее, благодаря функциональному соотношению $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ имеем

$$\frac{r_q}{r_p} = -\frac{2\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{2}{3}\right)\Gamma\left(n + \frac{4}{3}\right)} = -\frac{2 \cdot \frac{1}{3} \left(n + \frac{2}{3}\right)}{\frac{2}{3} \left(n + \frac{1}{3}\right)} = -\frac{3n+2}{3n+1}.$$

И, наконец, мы можем вычислить R :

$$R = \frac{1 + \frac{r_q}{r_p}}{1 - \frac{r_q}{r_p}} = -\frac{1}{3(2n+1)}.$$

Благодарности. Автор благодарит В. Бажанова, А. Белавина, А. Бугрия, Р. Бакстера, М. Бэтчелора, Т. Миву, Г. Пронько, В. Пугая, А. Разумова, С. Сергеева, Н. Славнова, Г. Сьерру, Б. Фейгина за полезные обсуждения, а также Б.М. Маккоя за предоставление ссылок [26], [27], относящихся к выводу формулы (7). Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант № 01-01-00201).

Список литературы

- [1] Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. L179.
- [2] R. J. Baxter. Ann. Phys. 1972. V. 70. P. 323.
- [3] R. J. Baxter. Adv. Stud. Pure Math. 1989. V. 19. P. 95.
- [4] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor, R. J. Baxter, G. R. W. Quispel. J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 6397.
- [5] H. Hinrichsen, P. P. Martin, V. Rittenberg, M. Scheunert. Nucl. Phys. B. 1994. V. 415. P. 533.
- [6] M. A. Martin-Delgado, G. Sierra. Phys. Rev. Lett. 1996. V. 76. P. 1146.
- [7] V. Fridkin, Yu. G. Stroganov, Don Zagier. J. Phys. A. 2000. V. 33. P. L121.
- [8] A. A. Belavin, Yu. G. Stroganov. Phys. Lett. B. 1999. V. 466. P. 281.
- [9] V. Fridkin, Yu. G. Stroganov, Don Zagier. J. Stat. Phys. 2001. V. 102. P. 781.
- [10] F. C. Alcaraz, M. N. Barber, M. T. Batchelor. Ann. Phys. 1988. V. 182. P. 280.
- [11] P. P. Kulish, E. K. Sklyanin. Phys. Lett. A. 1979. V. 70. P. 461; Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев. УМН. 1979. Т. 34. № 5. С. 13.
- [12] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 3185.
- [13] I. Krichiver, O. Lipan, P. Wiegmann, A. Zabrodin. Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 267.
- [14] G. P. Pronko, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 2333.
- [15] V. E. Korepin, A. G. Izergin, N. M. Bogoliubov. Quantum Inverse Scattering Method, Correlation Functions and Algebraic Bethe Ansatz. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [16] M. T. Batchelor, J. de Gier, B. Nienhuis. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. L265.
- [17] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov. J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 3185; cond-mat/0102247.
- [18] A. V. Razumov, Yu. G. Stroganov. Combinatorial nature of ground state vector of $O(1)$ loop model. math.CO/0104216. submitted to Electron. J. Combinat.
- [19] L. D. Faddeev, L. A. Takhtajan. Phys. Lett. A. 1981. V. 85. P. 375.
- [20] M. Baake, P. Christe, V. Rittenberg. Nucl. Phys. B. 1988. V. 300. P. 637.
- [21] A. Bugrij. Private communication. 2000.
- [22] A. Doikou, L. Mezincescu, R. I. Nepomechie. J. Phys. A. 1997. V. 30. P. L507; Mod. Phys. Lett. A. 1997. V. 12. P. 2591.
- [23] K. Bärwinkel, H.-J. Schmidt, J. Schnack. J. Magn. Mater. 2000. V. 220. P. 227; J. Schnack. Phys. Rev. B. 2000. V. 62. P. 14855.
- [24] G. Albertini. Is the purely biquadratic spin 1 chain always massive? cond-mat/0012439.
- [25] M. Henkel, U. Schollwock. Universal finite-size scaling amplitudes in anisotropic scaling. cond-mat/0010061.
- [26] R. P. Feynman. Phys. Rev. 1939. V. 56. P. 340.
- [27] J. D. Johnson, S. Krinsky, B. M. McCoy. Phys. Rev. A. 1973. V. 8. P. 2526; M. Gaudin. B. M. McCoy, T. T. Wu. Phys. Rev. D. 1981. V. 23. P. 417.