Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Наблюдаемые в $2 + 1$ гравитации и некоммутативные пространства
Тейхмюллера, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 2, 360–368

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf542>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 16:16:46

© 2001 г.

Л. О. Чехов*

НАБЛЮДАЕМЫЕ В $2 + 1$ ГРАВИТАЦИИ И НЕКОММУТАТИВНЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА

Алгебра квантовых геодезических, полученная квантованием координат пространства Тейхмюллера, оказывается квантовой алгеброй $so_q(m)$ Нельсон и Редже. Эта алгебра является алгеброй монодромий (вилъсоновских петель) в теории Черна–Саймонса и дает эффективное описание $(2 + 1)$ -мерной гравитации.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе описывается алгебра наблюдаемых квантовой 3D гравитации. Фазовое пространство классической эйнштейновой гравитации в 3D многообразии есть пространство Тейхмюллера границы этого многообразия [1]. На этом пространстве может быть задана каноническая пуассонова структура (структура Вейля–Петерсона), группа симметрий которой есть группа классов отображений. При этом алгебра наблюдаемых соответствующей квантовой теории есть некоммутативная деформация $*$ -алгебры функций, задаваемая деформацией пуассоновой структуры, а группа симметрий задает автоморфизмы алгебры наблюдаемых. Такое квантование – построение семейства $*$ -алгебр, зависящих от параметра квантования $\hbar$, и действия группы классов отображений на этом семействе – было проделано в работах [2], [3]. Наблюдаемые в этой картине суть длины замкнутых геодезических на римановой поверхности, и для того чтобы выразить эти наблюдаемые через координаты пространства Тейхмюллера, использовалась техника графов.

В данной работе показывается, что пространства Тейхмюллера римановых поверхностей с дырками естественным образом возникают в трехмерной геометрии и для поверхностей произвольного рода с одной и двумя дырками полученная алгебра квантовых геодезических поднимается с пуассонова листа квантовой алгебры $so_q(m)$ [4].

2. ФОРМАЛИЗМ ПЕРВОГО ПОРЯДКА В 3D ГРАВИТАЦИИ

Опишем подход к $(2 + 1)$ -мерной гравитации Нельсон, Редже и Цертуша [4], [5], основанный на формализме первого порядка. Классические решения стандартного действия

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия.
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

Эйнштейна–Гильберта (без материи)

$$I = \frac{1}{16\pi G} \int_M d^3x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) \quad (2.1)$$

задаются пространствами постоянной кривизны с топологией $M \sim [0, 1] \times S$, где S – это 2D поверхность (в первоначальной формулировке замкнутая).

В формализме первого порядка основные переменные – это спинорная связность w_μ^{ab} и локальная тетрада (“dreibein”) e_μ^a такая, что $\eta_{ab} e_\mu^a e_\nu^b = g_{\mu\nu}$, $\eta_{ab} = \text{diag}\{-++\}$. Наборы величин e и w считаются независимыми переменными, и как e , так и w представляют собой 1-формы $e^a = e_\mu^a dx^\mu$ и $w^a = (1/2)\epsilon^{abc} w_{\mu bc} dx^\mu$. Тогда действие (2.1) принимает вид

$$I = -2 \int_M \left(e \wedge dw + \frac{1}{2} e \wedge w \wedge w + \frac{\Lambda}{6} e \wedge e \wedge e \right), \quad (2.2)$$

и при $\Lambda = -1/\ell^2 < 0$ можно ввести переменные $A^{(\pm)a} = w^a \pm e^a/\ell$ и получить теорию Черна–Саймонса (ЧС) с калибровочным потенциалом $SO(2, 1) \times SO(2, 1)$:

$$I[A^{(+)}, A^{(-)}] = I_{CS}[A^{(+)}] - I_{CS}[A^{(-)}], \quad (2.3)$$

где

$$I_{CS}[A] = \frac{k}{4\pi} \int_M \text{tr} \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right) \quad (2.4)$$

– обычное действие ЧС (k – константа действия).

Скобки Пуассона двух динамических (пространственноподобных) компонент имеют вид [4]

$$\{A_i^{(\pm)a}(x), A_j^{(\pm)b}(x')\} = \pm \frac{1}{\ell} \epsilon_{ij} \eta^{ab} \delta^2(x - x'), \quad (2.5)$$

а переменные A^+ пуассоновски коммутируют с переменными A^- . Голономии, или геодезические функции, имеют вид

$$G_\gamma^{(\pm)} = P \exp \left\{ \int_\gamma A_i^{(\pm)a} T_a dx^i \right\}, \quad (2.6)$$

и нетрудно найти их скобки Пуассона. Ввиду топологичности теории кривая γ может быть выбрана геодезической кривой. Эти скобки так же, как и распутывающие соотношения, будут получены ниже в альтернативном подходе с использованием техники графов.

3. КЛАССИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА ТЕЙХМЮЛЛЕРА. ТЕХНИКА ГРАФОВ

В классическом описании пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_{g,n}$ римановых поверхностей рода g с n дырками ($n > 0$) суть пространства комплексных структур на (возможно открытых) римановых поверхностях S по модулю диффеоморфизмов, гомотопически-эквивалентных тождественному преобразованию. В окрестности граничной компоненты комплексная структура изоморфна, как комплексное многообразие, либо кольцу (дырка), либо проколотому диску (выколота точка).

Ориентируемая 2D поверхность может быть непрерывно конформно преобразована к пространству постоянной кривизны. Теорема униформизации по Пуанкаре утверждает, что любая комплексная поверхность S постоянной отрицательной кривизны есть верхняя полуплоскость $\mathbb{H}_+$ с гиперболической метрикой $ds^2 = dz d\bar{z} / (\operatorname{Im} z)^2$, профакторизованная относительно действия дискретной фуксовой подгруппы $\Delta(S)$ полной группы автоморфизмов $PSL(2, \mathbb{R})$,

$$S = \mathbb{H}_+ / \Delta(S).$$

Каждый класс гомотопий замкнутых кривых γ содержит единственную *замкнутую геодезическую* длины $l(\gamma) = \ln |\lambda_1 / \lambda_2|$, где λ_1 и λ_2 – (различные) собственные значения элемента $PSL(2, \mathbb{R})$, который отвечает γ . Эти длины и являются нужными физическими наблюдаемыми.

Основным элементом конструкции является описание пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}_{g,n}^h(S)$ в терминах ленточных графов [6].

Пусть *ленточный граф* Γ – это граф с заданным циклическим порядком ребер, входящих в каждую вершину. Пространство Тейхмюллера координатизуется, если присвоить вещественные положительные числа $Z_\alpha \in \mathbb{R}$ неориентируемым ребрам графа, получив тем самым набор $\{Z_\alpha \mid \alpha \in E(\Gamma)\}$, в котором $E(\Gamma)$ – множество всех (неориентированных) ребер графа Γ . Мы также обозначим через $V(\Gamma)$ множество вершин графа Γ .

Ленточный граф, вложенный в ориентированную поверхность, наследует каноническую ленточную структуру согласно ориентации поверхности. Обозначим через $\Gamma(S)$ множество всех изотопических классов трехвалентных ленточных графов, отображенных на поверхность S таким образом, что поверхность становится стягиваемой к граничным компонентам. Каждому графу $u \in \Gamma(S)$ и каждому ребру графа u можно сопоставить стандартный морфизм $u \mapsto v$, где $v \in \Gamma(S)$ получается из u с помощью *флипа* данного ребра (см. ниже рис. 1). Множество таких морфизмов порождает *группу классов отображений*.

Таким образом, трехвалентный граф Γ рода g с n дырками порождает изоморфизм между множеством точек пространства $\mathcal{T}_{g,n}(S)$ и множеством $\mathbb{R}^{\# \text{ edges}}$ ребер этого графа, снабженных вещественными числами [6].

Для того чтобы параметризовать замкнутые геодезические (*пути* вдоль ребер графа) на римановой поверхности, ассоциируем матрицу $X_{Z_\alpha} \in PSL(2, \mathbb{R})$ преобразования Мёбиуса с каждым ребром α :

$$X_{Z_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{\frac{Z_\alpha}{2}} \\ e^{-\frac{Z_\alpha}{2}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

и введем матрицы “правых” и “левых” поворотов

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L \equiv R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Будем называть *замкнутым путем* в графе Γ любой ориентированный путь, который начинается и заканчивается на одном и том же ребре графа. Произведение матриц, ассоциированных с последовательными ребрами и поворотами этого пути, имеет вид

$$P_{Z_1 \dots Z_n} = LX_{Z_n} LX_{Z_{n-1}} RX_{Z_{n-2}} \dots RX_{Z_2} LX_{Z_1}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 [6]. *Существует взаимно однозначное соответствие между элементами множества классов сопряженности ориентированных замкнутых путей $P_{Z_1 \dots Z_n}$ и замкнутыми (ориентированными) геодезическими γ на пространстве Тейхмюллера; при этом длина геодезической L_γ определяется соотношением*

$$G_\gamma \equiv 2 \operatorname{ch} \left(\frac{L_\gamma}{2} \right) = \operatorname{tr} P_{Z_1 \dots Z_n}, \quad (3.3)$$

где $P_{Z_1 \dots Z_n}$ – единственный замкнутый путь без возвращений назад, который отвечает данному классу сопряженности ориентируемых путей в Γ . Величины G_γ называются геодезическими функциями.

В координатах Z_α каноническая пуассонова структура B_{WP} (структура Петерсона–Вейля) на $\mathcal{T}_{g,n}^h(S)$ имеет вид

$$B_{\text{WP}} = \sum_{v \in V(\Gamma)} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial Z_{v_i}} \wedge \frac{\partial}{\partial Z_{v_{i+1}}}, \quad (3.4)$$

где $v_i, i = 1, 2, 3 \pmod{3}$, – номера циклически ориентированных ребер, входящих в вершину v . Эта структура вырождена, и ее функции Казимира суть длины геодезических вокруг дырок.

Преобразование, сохраняющее пуассонову структуру (3.4) при операции *флип* и удовлетворяющее *тождеству пятиугольника*, изображено на рис. 1, где

$$M_Z: \{A, B, C, D, Z\} \rightarrow \{A + \phi(Z), B - \phi(-Z), C + \phi(Z), D - \phi(-Z), -Z\} \quad (3.5)$$

и в классическом случае [6] $\phi(Z) = \ln(e^Z + 1)$.

Рис. 1

ЛЕММА. *Преобразование (3.5) оставляет неизменными следы произведений по путям (3.3), а потому классические длины геодезических инвариантны относительно действия группы классов отображений.*

Геодезические функции G_γ (3.3), исследованные в работе [7], образуют алгебру (по отношению к произведению и к скобке Пуассона) над $\mathbb{Z}$.

Рассмотрим теперь пуассонову структуру геодезических функций. Для двух непересекающихся геодезических пуассонова скобка равна нулю. Поскольку пуассонова скобка $\{G_1, G_2\}$ двух геодезических функций удовлетворяет правилу Лейбница, достаточно

рассмотреть только лишь простое пересечение геодезических. В графическом виде тогда получим соотношение

$$\left\{ \begin{array}{c} G_1 \\ \diagdown \quad \diagup \\ G_2 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} G_I \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) + \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} G_H \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} \right), \quad (3.6)$$

полученное в работе [7] в непрерывной параметризации.

Классическое распутывающее соотношение следует из формулы $\text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}) - \text{tr} A \cdot \text{tr} B = 0$, которая верна для произвольных (2×2) -матриц A и B с единичными детерминантами. Введем дополнительный множитель $\#G$ для подграфа. Этот множитель равен числу геодезических в полном графе, получаемом как объединение данного подграфа и оставшейся части графа, которая предполагается одинаковой для всех графов, входящих в соотношение. Имеем

$$(-1)^{\#G} \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) + (-1)^{\#G} \left(\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagup \end{array} \right) + (-1)^{\#G} \left(\begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \end{array} \right) = 0. \quad (3.7)$$

Назовем геодезическую, проходящую по каждому ребру графа не более одного раза, *простой геодезической*. Набор простых геодезических тем самым конечен и зависит от комбинаторного типа графа.

ПРИМЕР 1. Для тора $(\mathcal{T}_{1,1})$ имеются три переменные X, Y, Z такие, что

$$\{X, Y\} = \{Y, Z\} = \{Z, X\} = 2$$

(элемент Казимира равен $X + Y + Z$). Геодезические функции для трех простых геодезических имеют вид

$$\begin{aligned} G_X &= \text{tr} L X_Y R X_Z = e^{-\frac{Y}{2} - \frac{Z}{2}} + e^{-\frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}} + e^{\frac{Y}{2} + \frac{Z}{2}}, \\ G_Y &= \text{tr} L X_Z R X_X = e^{-\frac{Z}{2} - \frac{X}{2}} + e^{-\frac{Z}{2} + \frac{X}{2}} + e^{\frac{Z}{2} + \frac{X}{2}}, \\ G_Z &= \text{tr} L X_X R X_Y = e^{-\frac{X}{2} - \frac{Y}{2}} + e^{-\frac{X}{2} + \frac{Y}{2}} + e^{\frac{X}{2} + \frac{Y}{2}}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Определяя геодезическую функцию $\tilde{G}_Z$, получаемую из G_Z преобразованием флипа,

$$\tilde{G}_Z = \text{tr} R X_Z R X_X L X_Z L X_Y = e^{-\frac{X}{2} - \frac{Y}{2} - Z} + e^{\frac{X}{2} - \frac{Y}{2}} (e^{-Z} + e^Z + 2) + e^{\frac{X}{2} + \frac{Y}{2} + Z},$$

получим, что $\{G_X, G_Y\} = \tilde{G}_Z/2 - G_Z/2$, и поскольку из соотношений (3.7) следует, что $G_X G_Y = G_Z + \tilde{G}_Z$, получим формулу

$$\{G_X, G_Y\} = \frac{1}{2} G_X G_Y + G_Z, \quad (3.9)$$

т.е. классическая пуассонова алгебра оказывается замкнутой на наборе $\{G_X, G_Y, G_Z\}$ геодезических функций (два других соотношения получаются из (3.9) циклическими перестановками). Цена этого замыкания – появление квадратичных элементов в правой части соотношения.

4. КВАНТОВАНИЕ

Обозначим через $\mathcal{T}_{g,n}^h(\Gamma)$, где $\Gamma \in \Gamma(S)$, алгебру, порождаемую генераторами Z_α^h (по одному генератору на каждое (неориентированное) ребро α), с соотношениями

$$[Z_\alpha^h, Z_\beta^h] = 2\pi i \hbar \{Z_\alpha, Z_\beta\} \quad (4.1)$$

(ср. (3.4)) и с $*$ -структурой $(Z_\alpha^h)^* = Z_\alpha^h$. В этих соотношениях Z_α и $\{\cdot, \cdot\}$ суть соответствующие координатные функции и скобка Пуассона на классическом пространстве Тейхмюллера.

Свяжем теперь с каждым преобразованием (морфизмом) флипа гомоморфизм соответствующих $*$ -алгебр, удовлетворяющий соотношению $M_Z^2 = I$ (рис. 1) и пятичленно-му соотношению. Такой морфизм задается отображением (3.5), в которое надо подставить (квантовую) функцию флипа [8], [9]

$$\phi(z) \equiv \phi^h(z) = -\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\operatorname{sh}(\pi p) \operatorname{sh}(\pi \hbar p)} dp, \quad (4.2)$$

где контур Ω проходит по вещественной оси и обходит начало координат сверху.

Для каждого контура γ определим оператор *квантовой геодезической* $G_\gamma \in \mathcal{T}^h$ соотношением

$$G_\gamma \equiv \times_{\times} \operatorname{tr} P_{Z_1 \dots Z_n} \times_{\times} \equiv \sum_{\substack{j \in J \\ \kappa \in \{j\}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in E(\Gamma)} (m_j(\gamma, \alpha) Z_\alpha^h + 2\pi i \hbar c_j^\kappa(\gamma, \alpha)) \right\}, \quad (4.3)$$

в котором *квантовое упорядочение* $\times_{\times} \cdot \times_{\times}$ означает, что классические формулы подправляются с помощью введения дополнительных целых коэффициентов $c_j^\kappa(\gamma, \alpha)$, которые определяются из следующих условий.

1. Набор квантовых геодезических $\{G_\gamma\}$ должен быть инвариантен относительно действия *группы классов отображений* $\Delta(S)$ (3.5), т.е. для любого морфизма $\delta \in \Delta(S)$ и замкнутого пути γ должно выполняться условие $\delta(G_\gamma) = G_{\delta\gamma}$.

2. Алгебра геодезических. Произведение двух квантовых геодезических выражается в виде линейной комбинации *квантовых геодезических ламинаций* (КГЛ), подчиняющихся квантовому распутывающему соотношению [10]. Аналогично классическому случаю, КГЛ есть набор не(само)пересекающихся квантовых геодезических.

3. Неориентированность. Квантовые следы операторов прямой и обратной геодезических совпадают.

4. Степени геодезических. Квантовая геодезическая $G_{n\gamma}$ с неотрицательным числом намоток n выражается через G_γ в точности так же, как и в классическом случае:

$$G_{n\gamma} = 2T_n(G_\gamma/2), \quad (4.4)$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева.

5. Если замкнутые пути γ и γ' не пересекаются, то операторы G_γ и $G_{\gamma'}$ коммутируют. Поэтому порядок вхождения квантовых геодезических в КГЛ неважен.

Обозначим упорядочение Вейля обычным знаком нормального упорядочения $:\cdot:$, т.е.

$$:e^{a_1}e^{a_2}\dots e^{a_n}: \equiv e^{a_1+a_2+\dots+a_n}$$

для любого набора $\{a_i: a_i \neq -a_j\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для простой геодезической квантовое упорядочение совпадает с вейлевским.

Для двух простых геодезических G_1 и G_2 с одним нетривиальным пересечением имеем

$$G_1 G_2 = e^{-\frac{i\pi\hbar}{2}} G_Z + e^{\frac{i\pi\hbar}{2}} \tilde{G}_Z, \quad (4.5)$$

или графически получим квантовое распутывающее соотношение Тураева [10]:

$$\begin{array}{c} G_1 \quad G_2 \\ \diagdown \quad \diagup \\ \diagup \quad \diagdown \end{array} = e^{-\frac{i\pi\hbar}{2}} \begin{array}{c} G_Z \\ \bigcup \quad \bigcap \end{array} + e^{\frac{i\pi\hbar}{2}} \begin{array}{c} \tilde{G}_Z \\ \bigcap \quad \bigcup \end{array} \quad (4.6)$$

(здесь порядок пересечения G_1 и G_2 зависит от того, какая квантовая геодезическая стоит первой в произведении; остаток графа остается одним и тем же для всех величин в формуле (4.6)).

В случае, если число пересечений больше 1, квантовые распутывающие соотношения должны применяться *одновременно* во *всех* точках пересечения. Это, в частности, приводит к справедливости ридемейстеровских движений в произвольном графе, если положить пустую петлю равной $-e^{-i\pi\hbar} - e^{i\pi\hbar}$.

ПРИМЕР 2. КВАНТОВЫЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИЕ НА ТОРЕ. Для тора имеются три простые квантовые геодезические, задаваемые формулами (3.8) в вейлевски-упорядоченной форме. Квантовая геодезическая $\tilde{G}_Z$, получаемая из G_Z преобразованием флипа,

$$\tilde{G}_Z = e^{-\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}-Z} + e^{\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}-Z} + e^{\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}} 2 \cos(\pi\hbar) + e^{\frac{X}{2}-\frac{Y}{2}+Z} + e^{\frac{X}{2}+\frac{Y}{2}+Z},$$

содержит квантовые поправки. Произведение двух простых геодезических имеет вид

$$G_X G_Y = e^{\frac{i\pi\hbar}{2}} \tilde{G}_Z + e^{-\frac{i\pi\hbar}{2}} G_Z, \quad G_Y G_X = e^{-\frac{i\pi\hbar}{2}} \tilde{G}_Z + e^{\frac{i\pi\hbar}{2}} G_Z. \quad (4.7)$$

Обозначив $q \equiv e^{-i\pi\hbar}$, $[A, B]_q \equiv q^{1/2}AB - q^{-1/2}BA$ и $\xi \equiv q - q^{-1}$, получим из (4.7)

$$[G_X, G_Y]_q = \xi G_Z, \quad [G_Y, G_Z]_q = \xi G_X, \quad [G_Z, G_X]_q = \xi G_Y, \quad (4.8)$$

что есть так называемая квантовая алгебра $so_q(3)$, исследуемая в работе [11]. Единственный центральный элемент этой алгебры (квантовое соотношение Маркова) имеет вид

$$\mathcal{M} = G_X G_Y G_Z - q^{\frac{1}{2}}(G_X^2 + q^{-2}G_Y^2 + G_Z^2). \quad (4.9)$$

5. КВАНТОВЫЕ АЛГЕБРЫ $so_q(m)$

Чтобы обобщить пример 2, надо найти граф, для которого простые геодезические составляли бы удобный алгебраический базис. Таким графом является граф, изображенный на рис. 2, в котором m ребер соединяют m противоположных точек на двух горизонтальных линейных подграфах; двухточечные вершины на концах линейных подграфов мнимы. Простые геодезические в этой картине – это ровно те замкнутые линии, которые проходят в точности по двум различным “вертикальным” ребрам графа; их поэтому удобно нумеровать индексами этих вертикальных ребер (порядок неважен), и они обозначаются a_{ij} , $i < j$. Пуассонова алгебра геодезических для a_{ij} имеет вид

$$\{a_{ij}, a_{kl}\} = \begin{cases} 0, & j < k, \\ 0, & k < i, \quad j < l, \\ a_{ik}a_{jl} - a_{kj}a_{il}, & i < k < j < l, \\ \frac{1}{2}a_{ij}a_{jl} - a_{il}, & j = k, \\ a_{il} - \frac{1}{2}a_{ij}a_{il}, & i = k, \quad j < l, \\ a_{ik} - \frac{1}{2}a_{ij}a_{kj}, & j = l, \quad i < k. \end{cases} \quad (5.1)$$

Граф на рис. 2 имеет род $(m/2) - 1$ и две дырки, если m четно, и род $(m - 1)/2$ и одну дырку, если m нечетно. Такие базисы геодезических для четных m и *гладких* римановых поверхностей рассматривались в работах [4]. При этом полученные пуассоновы алгебры *в точности совпадают* с (5.1). В математической литературе эта алгебра также возникала как пуассонова алгебра данных монодромии (матриц Стокса) некоторого дифференциального уравнения [12], а также симплектического группоида верхнетреугольных матриц A [13]. Для $(m \times m)$ -матриц имеются $[m/2]$ центральных элементов этой алгебры, порожденных полиномиальными инвариантами $f_A(\lambda) \equiv \det(A + \lambda A^T) = \sum f_i(A)\lambda^i$.

Алгебра (5.1) была проквантована с помощью метода деформационного квантования в работах [4], [5]. Накладывая коммутационные соотношения (4.1), получим квантовую алгебру $so_q(m)$ работ [5]: a_{ij} коммутируют с a_{kl} при $i < j < k < l$ или при $i < k < l < j$; любая тройка элементов a_{ij} , a_{jk} и a_{ik} образует подалгебру $so_q(3)$ (4.8); и, наконец, при $i < k < j < l$ получим $[a_{ij}, a_{kl}] = \xi(a_{ik}a_{jl} - a_{il}a_{jk})$.

Рис. 2

Полная пуассонова размерность d алгебры (5.1) равна $m(m-1)/2 - [m/2]$, и при $m = 3, 4, 5, 6, \dots$ получим $d = 2, 4, 8, 12, \dots$. Размерности соответствующих пространств Тейхмюллера равны $D = 2, 4, 8, 10, \dots$, и потому пространства Тейхмюллера вкладываются как *пуассоновы листы* в алгебру (5.1); размерность этих листов перестает быть максимальной только начиная со случая поверхности рода 2 с двумя дырками.

Благодарности. Автор благодарен организаторам конференции за гостеприимство. Работа поддержана грантом РФФИ № 00-02-16477.

Список литературы

- [1] *E. Verlinde and H. Verlinde.* Conformal field theory and geometric quantization. In: Superstrings 1989. River Edge, NJ: World Scientific, 1990. P. 422.
- [2] *В. В. Фок, Л. О. Чехов.* ТМФ. 1999. Т. 120. № 3. С. 511.
- [3] *В. В. Фок, Л. О. Чехов.* Тр. МИАН. 1999. Т. 226. С. 163.
- [4] *J. E. Nelson and T. Regge.* Nucl. Phys. B. 1989. V. 328. P. 190; *J. E. Nelson, T. Regge, and F. Zertuche.* Nucl. Phys. B. 1990. V. 339. P. 516.
- [5] *J. E. Nelson and T. Regge.* Phys. Lett. B. 1991. V. 272. P. 213; Commun. Math. Phys. 1993. V. 155. P. 561.
- [6] *V. V. Fock.* Combinatorial description of the moduli space of projective structures. hep-th/9312193.
- [7] *W. M. Goldman.* Invent. Math. 1986. V. 85. P. 263.
- [8] *L. D. Faddeev.* Lett. Math. Phys. 1995. V. 34. P. 249.
- [9] *R. M. Kashaev.* Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm. q-alg/9705021.
- [10] *V. G. Turaev.* Ann. Scient. Éc. Norm. Sup. Ser. 4. 1991. V. 24. P. 635.
- [11] *M. Havlíček, A. V. Klimyk, and S. Pošta.* Representations of the cyclically symmetric q -deformed algebra $so_q(3)$. math.qa/9805048.
- [12] *M. Ugaľia.* On a Poisson structure on the space of Stokes matrices. math.ag/9902045.
- [13] *A. Bondal.* A symplectic groupoid of triangular bilinear forms and the braid groups. Preprint IHES/M/00/02.

Зав. редакцией Т.Е.Сущко

Сдано в набор 05.08.2001	Подписано к печати 28.10.2001	Формат бумаги $70 \times 100 \frac{1}{16}$
Печать офсетная	Усл.печ.л. 16.9	Усл.кр.отт. 4.9 тыс.
	Уч.изд.л. 15.5	Бум.л. 6.5
Тираж 287 экз.	Зак. 2594	

Свидетельство о регистрации № 1876 от 28 мая 1991 года
 Зарегистрировано Государственным комитетом СССР по печати
 Учредитель: Академия наук СССР, Отделение математики

Адрес издателя: 117997, Москва, Профсоюзная ул., 90
 Адрес редакции: 117966, ГСП, Москва, В-333, ул. Губкина, 8, тел. 135-20-19,
 e-mail: tmph@mi.ras.ru
 Отпечатано в ППП «Типография «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6
 Налоговая льгота – общероссийский классификатор продукции ОК-005-93,
 том 2; 952000 – журналы