Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Богданов, Интегрируемые системы на фазовых пространствах с неплоской метрикой, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 373–386

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf543>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 13:36:21

© 2001 г.

Е. И. Богданов*

ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ НА ФАЗОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С НЕПЛОСКОЙ МЕТРИКОЙ

Исследуется проблема интегрируемости эволюционных систем на фазовых пространствах с неплоской метрикой. Показывается, что если фазовое пространство является сферой, то гамильтоновы системы генерируются действием пуассоновых операторов на вариации геодезических линий фазового пространства, а проблема интегрируемости эволюционных систем сводится к задаче интегрируемости уравнений движения реперов на фазовом пространстве. Бигамильтоново представление эволюционных систем связывается с дифференциально-геометрическими свойствами фазового пространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей статье определяются нелинейные эволюционные системы на фазовых пространствах с неплоской метрикой. Во втором разделе исследуются свойства конечномерной гамильтоновой системы, заданной на коалгебре Ли $so(3) \oplus so(3)$ гамильтонианом, являющимся многочленом второй степени от переменных, определяющих общий элемент этой коалгебры. Показывается, что фазовое пространство такой гамильтоновой системы есть прямое произведение двух сфер S_2 и что в этом случае существуют несколько форм гамильтоновой системы, пуассонова структура которых связана с возможностью параметризации фазового пространства при помощи различных наборов локальных координат. В качестве развития предложенного метода описания конечномерных гамильтоновых систем по аналогии рассматриваются гамильтоновы системы и для случая коалгебры $su(1, 1) \oplus su(1, 1)$.

В третьем разделе предлагается геометрический метод генерации нелинейных эволюционных уравнений, основанный на переходе к бесконечномерной системе, которая определяется гамильтоновым функционалом, заданным как интеграл от квадратичной метрической формы фазового пространства, и гамильтоновым оператором, структура которого индуцируется пуассоновыми структурами конечномерной гамильтоновой системы. Показывается, что нелинейные эволюционные системы возникают при действии гамильтоновых операторов на вариации геодезических линий фазового простран-

* Елабужский государственный педагогический институт, Елабуга, Россия

ва. Одно из полученных уравнений интерпретируется как нелинейное уравнение Шредингера на фазовом пространстве с неплоской метрикой, так как при переходе к плоской метрике оно редуцируется к стандартному уравнению Шредингера.

В четвертом разделе проблема интегрируемости эволюционных систем связывается с интегрируемостью уравнений движения реперов на фазовом пространстве. Показывается, что все типы исследуемых систем вполне интегрируемы, так как для них существует бесконечный набор сохраняющихся величин и они ассоциированы с системой линейных дифференциальных уравнений.

Важным признаком интегрируемости гамильтоновых систем является их бигамильтоново представление. В пятом разделе показывается, что все полученные системы обладают бигамильтоновостью, причем второе гамильтоново представление генерируется гамильтоновым функционалом, заданным как интеграл от формы объема фазового пространства. Другими словами, показывается, что и бигамильтоновость также порождается дифференциально-геометрическими свойствами фазового пространства.

2. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Обозначим через G прямую сумму двух алгебр Ли: $G = g_1 \oplus g_2$, а через $G^* = g_1^* \oplus g_2^*$ — пространство, дуальное к G . Пространство гладких функций $F(G^*)$ на G^* обладает естественной пуассоновой структурой, которая определяется следующим образом [1], [2].

Пусть $\{X_i\}$ — базис в g_1 и $\{Y_k\}$ — базис в g_2 , $i, k = 1, 2, 3$. Так как G — прямая сумма g_1 и g_2 , то выполняются коммутационные соотношения

$$[X_i, X_k] = c_{ik}^n X_n, \quad [Y_j, Y_m] = \gamma_{jm}^n Y_n, \quad [X_i, Y_k] = 0,$$

где c_{ik}^n — структурные константы алгебры g_1 , γ_{jm}^n — структурные константы алгебры g_2 . Если $\{X_i^*, Y_k^*\}$ — базис в сопряженном пространстве G^* , двойственный к базису $\{X_i, Y_k\}$, то вектор ξ из G^* представим в виде $\xi = x^i X_i^* + y^k Y_k^*$. Пространство $F(G^*)$ становится пространством функций от шести переменных $\xi^\alpha = \{x^i, y^k\}$. Для величин x^i, y^k скобка Пуассона задается формулами

$$\{x^i, x^k\} = \sum_n c_{ik}^n x^n, \quad \{y^i, y^k\} = \sum_n \gamma_{ik}^n y^n, \quad \{x^i, y^k\} = 0.$$

Введем обозначения

$$F = \left\| \sum_n c_{ik}^n x^n \right\|, \quad M = \left\| \sum_n \gamma_{ik}^n y^n \right\|, \quad \Omega = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Тогда скобка Пуассона двух функций запишется как

$$\{f, h\} = \sum_{\alpha, \beta=1}^6 \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial h}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.2)$$

Если на G^* задана функция Гамильтона $H \in F(G^*)$, то на пространстве G^* будет определена динамическая (гамильтонова) система:

$$\frac{d\xi^\alpha}{dt} = \{H, \xi^\alpha\} = \sum_{\beta} \Omega^{\alpha\beta} \frac{\partial H}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.3)$$

В дальнейшем для записи уравнений движения будем использовать обозначения $x^1 = p$, $x^2 = q$, $x^3 = r$; $y^1 = u$, $y^2 = v$, $y^3 = w$. Рассмотрим случай динамических систем, когда алгебра Ли $G = so(3) \oplus so(3)$. Тогда структурная матрица Ω запишется как

$$\Omega = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & -w & v \\ w & 0 & -u \\ -v & u & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Если функция Гамильтона имеет вид многочлена второй степени

$$H = \frac{1}{2}(R_1^2 + R_2^2) + g(pu + qv) + \omega_1 r + \omega_2 w \quad (2.5)$$

(здесь ω_i, g – константы, $R_1^2 = p^2 + q^2 + r^2$, $R_2^2 = u^2 + v^2 + w^2$), то уравнения Эйлера (2.3) с матрицей (2.4) и функцией Гамильтона (2.5) имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} &= \omega_1 q - grv, & \frac{dq}{dt} &= -\omega_1 p + gru, & \frac{dr}{dt} &= g(pv - uq); \\ \frac{du}{dt} &= \omega_2 v - gwp, & \frac{dv}{dt} &= -\omega_2 u + gwp, & \frac{dw}{dt} &= g(uq - pv). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Система (2.6) имеет следующие интегралы движения:

$$\begin{aligned} H_1 &= g(pu + qv) + \omega_1 r + \omega_2 w, \\ K &= pu + qv - g^{-1}(\omega_2 r + \omega_1 w), \quad N = r + w, \\ R_1^2 &= p^2 + q^2 + r^2, \quad R_2^2 = u^2 + v^2 + w^2. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Таким образом, конечномерная гамильтонова система (2.6) является интегрируемой, так как обладает достаточным набором сохраняющихся величин, находящихся в инволюции. С классической точки зрения система (2.6) описывает (см. [3]) две взаимодействующие материальные точки, каждая из которых совершает движение по сферической поверхности. Квантовые аналоги системы уравнений (2.6) исследовались в работах [3], [4].

Рассмотрим теперь свойства фазового пространства системы (2.6). Постоянный ранг матрицы Ω на G^* равен $2n = 4$, $\dim G^* = 6$. По теореме Дарбу в каждой точке $\xi \in G^*$ существует набор локальных координат $(P, Q, Z) = (P^1, \dots, P^n; Q^1, \dots, Q^n; Z^1, \dots, Z^l)$, $2n + l = \dim G^*$, таких, что P, Q канонически сопряжены: $\{P^i, Q^k\} = \delta^{ik}$, а Z^k являются “отмеченными” координатами: $\{Z^k, P\} = \{Z^k, Q\} = 0$. Прямыми вычислениями можно проверить, что для скобки Пуассона (2.2) с матрицей Ω (2.4) R_1 ,

R_2 являются отмеченными величинами, кроме того, R_1, R_2 суть интегралы движения. Следовательно, условие $R_i = c_i$ выделяет в G^* орбиту N , которая будет четырехмерным симплектическим многообразием, в данном случае – прямым произведением двух сфер. Поиск возможных наборов сопряженных фазовых переменных напрямую связан с допустимыми параметризациями алгебры G^* . Начнем с локальной параметризации (R_i, w_i, φ_i) , связанной с цилиндрическими координатами (ρ_i, w_i, φ_i) :

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctg \frac{q}{p}, & w_1 &= r, & \rho_1 &= \sqrt{p^2 + q^2} = \sqrt{R_1^2 - r^2}; \\ \varphi_2 &= \arctg \frac{v}{u}, & w_2 &= w, & \rho_2 &= \sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{R_2^2 - w^2}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для скобки Пуассона (2.2) с матрицей (2.4) координаты w_i, φ_i канонически сопряжены: $\{w_i, \varphi_k\} = \delta^{ik}$, а R_i – отмеченные координаты. В переменных w_i, φ_i уравнения Эйлера принимают форму канонических уравнений Гамильтона

$$\frac{dx^i}{dt} = \omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.9)$$

где $x^i = w_1, \varphi_1, w_2, \varphi_2$. Сферическая система координат

$$\begin{aligned} p &= R_1 \sin \vartheta_1 \cos \varphi_1, & q &= R_1 \sin \vartheta_1 \sin \varphi_1, & r &= R_1 \cos \vartheta_1, \\ u &= R_2 \sin \vartheta_2 \cos \varphi_2, & v &= R_2 \sin \vartheta_2 \sin \varphi_2, & w &= R_2 \cos \vartheta_2 \end{aligned}$$

задает параметризацию $(R_i, \vartheta_i, \varphi_i)$, обладающую свойствами

$$\{\vartheta_i, \varphi_k\} = \delta_{ik} \frac{R_i}{R_i^2 \sin \vartheta_i}, \quad \{R_i, \varphi_k\} = \{R_i, \vartheta_k\} = 0. \quad (2.10)$$

В переменных $(R_i, \vartheta_i, \varphi_i)$ уравнения Эйлера принимают вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad E_i = \frac{R_i}{\sqrt{g_i}} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

где $g_i = R_i^4 \sin^2 \vartheta_i$ – детерминант метрического тензора в сферической системе координат для сфер S_2 : $N = S_2 \times S_2$, а $x^i = \vartheta_1, \varphi_1, \vartheta_2, \varphi_2$.

Для стереографической проекции имеем параметризацию

$$\begin{aligned} p &= \frac{2u_1}{1 + \rho_1^2}, & q &= \frac{2u_2}{1 + \rho_1^2}, & r &= \frac{\rho_1^2 - 1}{1 + \rho_1^2}, & \rho_1^2 &= u_1^2 + u_2^2, \\ u &= \frac{2v_1}{1 + \rho_2^2}, & v &= \frac{2v_2}{1 + \rho_2^2}, & w &= \frac{\rho_2^2 - 1}{1 + \rho_2^2}, & \rho_2^2 &= v_1^2 + v_2^2 \end{aligned}$$

со скобками Пуассона

$$\begin{aligned}\{u_1, u_2\} &= -\frac{1 + \rho_1^2}{4}, & \{R_1, u_{1,2}\} &= 0, \\ \{v_1, v_2\} &= -\frac{1 + \rho_2^2}{4}, & \{R_2, v_{1,2}\} &= 0, \\ \{u_i, v_k\} &= 0, & \frac{1 + \rho_i^2}{4} &= \frac{1}{\sqrt{g_i}}.\end{aligned}\quad (2.12)$$

Здесь g_i – детерминант метрического тензора для S_2 в стереографической системе координат. Уравнения Эйлера принимают вид

$$\frac{dx^i}{dt} = \omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad E_i = \frac{1}{\sqrt{g_i}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.13)$$

где $x^i = u_1, u_2, v_1, v_2$.

Все результаты, полученные для конечномерных гамильтоновых систем в случае коалгебры $so(3) \oplus so(3)$, переносятся и на гамильтоновы системы, определяемые на коалгебре $G_1 = su(1, 1) \oplus su(1, 1)$. В этом случае фазовое пространство N_1 становится прямым произведением двух псевдосфер S_1^1 : $N_1 = S_1^1 \otimes S_1^1$, и гамильтоновы системы на N_1 запишутся аналогично системам (2.9), (2.11), (2.13):

$$\frac{dx^i}{dt} = \omega^{ik} \frac{\partial H}{\partial x^k}, \quad \omega = \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix}, \quad E_i = \frac{1}{\sqrt{g_i}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

где x^i – локальные координаты на N_1 , соответствующие трем видам параметризации псевдосферы. Таким образом, конечномерные динамические системы (2.6) и (2.14) имеют четырехмерное фазовое пространство, на котором существуют по крайней мере три набора локальных координат, позволяющих записать уравнения Эйлера в форме уравнений Гамильтона. Перейдем теперь к бесконечномерным гамильтоновым системам, используя свойства данной конечномерной системы.

3. БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ ГАМИЛЬТОНОВЫ СИСТЕМЫ

Пусть N есть n -мерное фазовое пространство с локальными координатами $u^1, \dots, u^n$ и с римановой метрикой $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$. Определим на N кривую γ как произвольное гладкое параметризованное отображение некоторого открытого интервала $J \subset \mathbb{R}$ в пространство N : $\gamma: J \rightarrow N$, $\gamma(x) = \{u^i(x), 1 \leq i \leq n\}$. Бесконечномерное пространство M всех гладких отображений γ интервала J в N назовем пространством состояний. Многообразие всех функционалов на M будем обозначать через $F(M)$.

Линейный оператор $K = (K^{ij})$ задает на M пуассонову структуру, если он определяет на M скобку Пуассона

$$\{u^i(x), u^l(y)\} = K^{il}(u(x))\delta(x - y). \quad (3.1)$$

Тогда для произвольных функционалов $H, G \in F(M)$ также определена скобка Пуассона

$$\{H, G\} = \int \frac{\delta H}{\delta u^i} K^{il} \frac{\delta G}{\delta u^l} dx. \quad (3.2)$$

Система уравнений называется гамильтоновой, если она может быть представлена в виде

$$u_t^i = K^{il} \frac{\delta H}{\delta u^l} \equiv \{u^i(x), H\}, \quad (3.3)$$

где H – некоторый функционал (гамильтониан) системы. В качестве H выберем функционал вида

$$H = \int (g_{ik}(u) u_x^i u_x^k - V(u)) dx, \quad (3.4)$$

где в качестве u^i выступают локальные координаты на N , а индекс x обозначает производную по параметру. Поскольку N в нашем случае есть прямое произведение двух пространств, то оператор K приобретает блочный характер и эволюционные уравнения распадаются на две независимые системы уравнений. В дальнейшем мы будем записывать метрику, скобки Пуассона, функционалы и операторы только для одного из подпространств.

Для функционала (3.4) прямые вычисления показывают, что вариационная производная $\delta H / \delta u$ имеет вид

$$\frac{\delta H}{\delta u^i} = \frac{d^2 u^i}{dx^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{du^j}{dx} \frac{du^k}{dx} - V^i = u_{xx}^i + \Gamma_{jk}^i u_x^j u_x^k - V^i, \quad (3.5)$$

где Γ_{jk}^i – коэффициенты связности, индуцированной метрическим тензором g_{ik} , а $V^i = g^{ik} \partial V / \partial u^k$. Таким образом, гамильтонова эволюционная система принимает вид

$$u_t^i = K^{il} \frac{\delta H}{\delta u^l} = K^{il} (u_{xx}^l + \Gamma_{ik}^l u_x^i u_x^k - V^l). \quad (3.6)$$

Так как x является параметром кривой, то функционал $S = \int \sqrt{g_{ik} u_x^i u_x^k} dx$ определяет длину кривой, а выражение $u_{xx}^l + \Gamma_{ik}^l u_x^i u_x^k$ задает вариацию этой кривой, т.е. вариации функционалов S и H при $V(u) = 0$ совпадают. Выражение, стоящее в скобках в (3.6), также может рассматриваться [5] как вариация некоторой кривой, но уже в пространстве с метрикой $d\rho^2 = (E - V) g_{ik} du^i du^k$ (E – константа). Другими словами, вариация функционала H с $V(u) \neq 0$ и вариация функционала $\int (E - V) g_{ik} u_x^i u_x^k dx$ приводят к одному и тому же выражению $u_{xx}^l + \Gamma_{ik}^l u_x^i u_x^k - V^l$. Стационарные решения $u_t = 0$ системы (3.6) задают условие геодезичности кривой. Таким образом, мы установили справедливость следующего утверждения.

Эволюционная система (3.3) с гамильтонианом (3.4) и римановой метрикой $ds^2 = g_{ik} du^i du^k$ в отсутствие внешнего поля ($V(u) = 0$) определяется действием оператора K на вариацию кривой, лежащей на фазовой поверхности N . В присутствии внешнего поля ($V(u) \neq 0$) эволюционная система определяется действием оператора K на вариацию кривой в пространстве с метрикой $d\rho^2 = (E - V) g_{ik} du^i du^k$.

Проиллюстрируем предложенную методику генерации эволюционных уравнений некоторыми частными случаями. В одном из них (для сферической поверхности) эта методика приводит к уже известному нелинейному уравнению, описывающему физические процессы в магнетике Гейзенберга. Итак, рассмотрим эволюционные системы (3.3) или (3.6), когда оператор K и метрический тензор g_{ik} определяют сферическую поверхность. Первый тип эволюционной системы свяжем с параметризацией фазового пространства N величинами (R, w, φ) и структурной матрицей ω для этого набора, т.е. $K^{il} = \omega^{il}$ из (2.9). Метрика, коэффициенты связности и функционал H в этих переменных запишутся так:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{R^2 dw^2}{R^2 - w^2} + (R^2 - w^2) d\varphi^2, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\frac{w}{R^2 - w^2}, \quad \Gamma_{22}^1 = \frac{w}{R^2} (R^2 - w^2), \\ \|K^{il}\| &= \|\omega^{il}\| = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_1 &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{R^2 w_x^2}{R^2 - w^2} + (R^2 - w^2) \varphi_x^2 \right) dx, \quad V(u) = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

С учетом выражений (3.7) эволюционная система (3.3) принимает вид

$$\varphi_t = \frac{R^2}{R^2 - w^2} w_{xx} + \frac{R^2 w}{(R^2 - w^2)^2} w_x^2 + w \varphi_x^2, \quad w_t = (w w_x \varphi_x - (R^2 - w^2) \varphi_{xx}). \quad (3.8)$$

Для параметризации (R, ϑ, φ) имеем (при $R = 1$, $\vartheta = u_1$, $\varphi = u_2$)

$$\begin{aligned} ds^2 &= (du_1)^2 + \sin^2 u_1 (du_2)^2, \quad \sqrt{g} = \sin u_1, \\ \Gamma_{22}^1 &= -\sin u_1 \cos u_1, \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{\cos u_1}{\sin u_1}, \\ \|K^{il}\| &= \|\omega^{il}\| = \frac{1}{\sin u_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_2 &= -\frac{1}{2} \int (u_{1,x}^2 + u_{2,x}^2 \sin^2 u_1) dx, \quad V(u) = 0, \end{aligned} \quad (3.9)$$

и эволюционная система (3.3) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_{1,t} &= u_{2,xx} \sin u_1 + 2u_{1,x} u_{2,x} \cos u_1, \\ u_{2,t} &= \frac{u_{1,xx}}{\sin u_1} - u_{2,x}^2 \cos u_1, \end{aligned} \quad (3.10)$$

описывающей магнетик Гейзенберга [6].

И, наконец, для третьей параметризации (R, u^1, u^2) записываем

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{4((du^1)^2 + (du^2)^2)}{(1 + \rho^2)^2}, \quad \sqrt{g} = \frac{4}{(1 + \rho^2)^2}, \quad \rho^2 = (u^1)^2 + (u^2)^2, \\ \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = -\frac{2u^1}{1 + \rho^2}, \\ \Gamma_{12}^1 &= \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{22}^2 = -\Gamma_{11}^2 = \frac{2u^2}{1 + \rho^2}, \\ \|K^{il}\| &= \|\omega^{il}\| = \frac{(1 + \rho^2)^2}{4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ H_3 &= 2 \int \left(\frac{(u_x^1)^2 + (u_x^2)^2}{(1 + \rho^2)^2} + \frac{1}{2} V(\rho) \right) dx, \quad V(\rho) = \rho^4 \sqrt{g}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Для данных (3.11) система (3.3) приводит к системе уравнений

$$\begin{aligned} u_t^1 &= u_{xx}^2 + (1 + \rho^2)^{-1} ((2u^2(u_x^1)^2 - 4u^1 u_x^1 u_x^2 - 2u^2(u_x^2)^2 - u^2 \rho^2), \\ u_t^2 &= -u_{xx}^1 - (1 + \rho^2)^{-1} ((2u^1(u_x^2)^2 - 4u^2 u_x^1 u_x^2 - 2u^1(u_x^1)^2 + u^1 \rho^2), \end{aligned} \quad (3.12)$$

которая описывает модель Ландау–Лифшица и которую можно назвать нелинейным уравнением Шредингера на фазовом пространстве с неплоской метрикой, поскольку для плоской метрики, когда $g_{ik} = \delta_{ik}$ и все $\Gamma_{kl}^i = 0$, система (3.12) переходит в обычное нелинейное уравнение Шредингера

$$u_t^1 = u_{xx}^2 - u^2((u^1)^2 + (u^2)^2), \quad u_t^2 = -u_{xx}^1 + u^1((u^1)^2 + (u^2)^2).$$

Далее, в случае коалгебры G_1 фазовое пространство N_1 будет прямым произведением двух псевдосфер, и тогда гамильтонова система (3.3) будет связана с тремя параметризациями псевдосферы. Например, параметризация, относящаяся к псевдосферическим координатам $x = \operatorname{sh} \chi \cos \varphi$, $y = \operatorname{sh} \chi \sin \varphi$, $z = \operatorname{ch} \chi$ (где x, y, z – декартовы координаты псевдосферы), приводит к эволюционной системе

$$\chi_t = \varphi_{xx} \operatorname{sh} \chi + 2\varphi_x \chi_x \operatorname{ch} \chi, \quad \varphi_t = -\frac{\chi_{xx}}{\operatorname{sh} \chi} + \varphi_x^2 \operatorname{ch} \chi. \quad (3.13)$$

Продолжая иллюстрацию алгоритма генерации эволюционных уравнений, обратимся еще и к тем случаям, когда фазовая поверхность является, например, тором или катеноидом. Эволюционные системы и в этих ситуациях будут производиться гамильтоновыми уравнениями (3.3), а метрика, гамильтонианы и эволюционные уравнения примут соответственно следующий вид.

Для тора:

$$\begin{aligned} ds^2 &= b^2 du^2 + (a + b \cos u)^2 dv^2, \quad \sqrt{g} = b(a + b \cos u), \\ H &= \frac{1}{2} \int (b^2 u_x^2 + (a + b \cos u)^2 v_x^2) dx, \\ u_t &= v_{xx} \frac{a + b \cos u}{b} + v_x u_x \frac{\sin u}{b}, \quad v_t = -u_{xx} \frac{b}{a + b \cos u} - v_x^2 \sin u. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Для катеноида:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} du^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} dv^2, \quad \sqrt{g} = a \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a}, \\ H &= \frac{1}{2} \int \left(\operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} u_x^2 + a^2 \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} v_x^2 \right) dx, \\ u_t &= av_{xx} + 2 \operatorname{th} \frac{u}{a} v_x^2, \quad v_t = -\frac{u_{xx}}{a} - \operatorname{th} \frac{u}{a} \left(\frac{u_x^2}{a^2} + v_x^2 \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Примеры можно аналогично множить, выбирая ту или иную поверхность в качестве фазового пространства.

Здесь необходимо отметить, что вывод всех эволюционных уравнений (3.7)–(3.15) производился нами с помощью гамильтоновых уравнений, выраженных в форме (3.3). При использовании же гамильтоновых уравнений вида (3.6) необходимо учитывать тот факт, что в уравнении для геодезических дифференцирование производится по натуральному параметру.

4. ИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

Интегрируемость эволюционных систем обычно связывают с наличием бесконечного набора локальных законов сохранения и возможностью записать нелинейные уравнения как условие интегрируемости пары линейных систем. Покажем, что для наших эволюционных систем эти два ведущих принципа выполняются.

Из утверждения предыдущего раздела вытекает, что эволюционные уравнения возникают при действии пуассонова оператора K на вариации кривых в фазовом пространстве, которое в нашем случае является сферической поверхностью. Поверхность считается полностью определенной, если известны компоненты по осям ортонормированного репера его бесконечно малого перемещения при переходе из данной точки поверхности в бесконечно близкую. Обозначим через $R(S)$ множество всех ортонормированных реперов $(\mathbf{M}, \mathbf{e}_1(M), \mathbf{e}_2(M), \mathbf{e}_3(M))$ с началом в точках M , лежащих на поверхности. Каждый такой репер определяется самой точкой $\mathbf{M} = \mathbf{M}(u^1, u^2)$ и углом поворота φ , переводящим один репер в другой. Уравнения движения таких трехпараметрических реперов имеют вид [7]

$$\begin{aligned} d\mathbf{M} &= \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2, & d\mathbf{e}_2 &= -\omega_1^2 \mathbf{e}_1 + \omega_2^3 \mathbf{e}_3, \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^2 \mathbf{e}_2 + \omega_1^3 \mathbf{e}_3, & d\mathbf{e}_3 &= -\omega_1^3 \mathbf{e}_1 - \omega_2^3 \mathbf{e}_2. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь ω_i, ω_k^i – формы смещения и формы связности, соответственно. Если s – натуральный параметр ($s = \int \sqrt{ds^2} = \int \sqrt{(\omega_1)^2 + (\omega_2)^2}$), то уравнения (4.1) переписутся как

$$\frac{d\mathbf{e}_1}{ds} = \frac{\omega_1^2}{ds} \mathbf{e}_2 + \frac{\omega_1^3}{ds} \mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_2}{ds} = -\frac{\omega_1^2}{ds} \mathbf{e}_1 + \frac{\omega_2^3}{ds} \mathbf{e}_3, \quad \frac{d\mathbf{e}_3}{ds} = -\frac{\omega_1^3}{ds} \mathbf{e}_1 - \frac{\omega_2^3}{ds} \mathbf{e}_2. \quad (4.2)$$

Введем следующие обозначения:

$$\tau = \frac{\omega_1^2}{ds}, \quad \chi_1 = \frac{\omega_1^3}{ds}, \quad \chi_2 = \frac{\omega_2^3}{ds}, \quad \chi = \chi_1 + i\chi_2. \quad (4.3)$$

Для сферы в используемых нами параметризациях $\omega_1^3 = \omega_1$, $\omega_2^3 = \omega_2$. В переменных $\mathbf{N}, \phi$

$$\mathbf{N} \equiv (\mathbf{e}_1 + i\mathbf{e}_2) \exp\left(i \int^s \tau ds'\right), \quad \phi \equiv \chi \exp\left(i \int^s \tau ds'\right) \quad (4.4)$$

уравнения (4.2) примут вид

$$\mathbf{N}_s = \phi \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_{3,s} = -\frac{1}{2}(\phi \mathbf{N}^* + \phi^* \mathbf{N}). \quad (4.5)$$

Здесь индекс s обозначает производную по параметру s . Воспользовавшись известной методикой (см., например, [8]), перейдем теперь от нелинейных уравнений (4.5) к системе линейных уравнений. Заметим, что в произвольном репере векторные уравнения (4.5) распадаются на скалярные для компонент векторов $\mathbf{N} = \{N_i\}$, $\mathbf{e}_3 = \{\varepsilon_i\}$:

$$N_{i,s} = \phi \varepsilon_i, \quad \varepsilon_{i,s} = -\frac{1}{2}(\phi N_i^* + \phi^* N_i). \quad (4.6)$$

Для каждого индекса i (компоненты) системы (4.6) очевидны интегралы движения $N^2 + \varepsilon^2 = 1$ или же $u^2 + v^2 + \varepsilon^2 = 1$, где $u + iv = N$. Если ввести переменную $\rho = (u + iv)/(1 - \varepsilon) = (1 + \varepsilon)/(u - iv)$, то уравнения (4.6) задают для ρ следующее уравнение Риккати:

$$\rho_s + \frac{1}{2}\phi^* \rho^2 + \frac{1}{2}\phi = 0, \quad (4.7)$$

от которого при помощи стандартного метода [8] приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{aligned} \psi_{1,s} &= -i\xi\psi_1 - u\psi_2, \\ \psi_{2,s} &= i\xi\psi_2 + u^*\psi_1, \\ \Psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Psi_s = U\Psi, \end{aligned} \quad U = \begin{pmatrix} -i\xi & -u \\ u^* & i\xi \end{pmatrix}, \quad (4.8)$$

где $\rho = (\psi_1/\psi_2)e^{2i\xi s}$, $u = (\phi/2)e^{-2i\xi s}$. Движение репера может рассматриваться как движение твердого тела [7], т.е. все величины, входящие в уравнения (4.2)–(4.8), становятся функциями двух переменных s, t . Наиболее общая временная зависимость определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_{1,t} &= A\psi_1 + B\psi_2, \\ \psi_{2,t} &= C\psi_1 - A\psi_2, \end{aligned} \quad V = \begin{pmatrix} A & B \\ C & -A \end{pmatrix}, \quad \Psi_t = V\Psi. \quad (4.9)$$

Из условия интегрируемости систем (4.8), (4.9) вытекает известное соотношение $U_s - V_t + [U, V] = 0$, которое налагает определенные условия на элементы A, B, C матрицы V и задает для потенциалов u, u^* нелинейные уравнения. Если A, B, C выбраны в виде

$$A = 2i\xi^2 + |u|^2, \quad B = 2\xi u - iu_s, \quad C = -2\xi u^* + iu_s^*, \quad (4.10)$$

то u будет удовлетворять нелинейному уравнению Шредингера [8]

$$iu_t = u_{ss} - 2u|u|^2. \quad (4.11)$$

Для линейных систем (4.8), (4.9), а значит, и для (4.11) существует бесконечное множество локальных законов сохранения [9]:

$$\partial_t \left(\sum \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right) = \partial_s \left(A - \frac{B}{u} \sum \frac{\mu_n}{(2i\xi)^{n+1}} \right), \quad (4.12)$$

где набор μ_n определяет бесконечное множество интегралов движения

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \mu_n ds, \quad C_0 = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^2 ds, \quad C_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u^* u_s ds. \quad (4.13)$$

В нашем случае (для трех параметризаций сферы) потенциал u записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} (R, w, \varphi) : \quad u &= \frac{1}{2} e^{-2i\xi s} \chi \exp \left(i \int^s \tau ds' \right), \quad \chi = \frac{\omega_1}{ds} + i \frac{\omega_2}{ds}, \\ \omega_1 &= \frac{R dw}{\sqrt{R^2 - w^2}}, \quad \omega_2 = \sqrt{R^2 - w^2}, \\ \chi &= \frac{R w_s}{\sqrt{R^2 - w^2}} + i \sqrt{R^2 - w^2} \varphi_s, \\ |u|^2 &= \chi_1^2 + \chi_2^2 = \frac{R^2 w_s^2}{R^2 - w^2} + (R^2 - w^2) \varphi_s^2; \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} (R, \vartheta, \varphi) \quad (\vartheta = u_1, \quad \varphi = u_2) : \quad \omega_1 &= du_1, \quad \omega_2 = \sin u_1 du_2, \\ \chi &= u_{1,s} + i u_{2,s} \sin u_1, \quad |u|^2 = u_{1,s}^2 + u_{2,s}^2 \sin^2 u_1; \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} (R, u^1, u^2) : \quad \omega_1 &= \frac{du^1}{1 + \rho^2}, \quad \omega_2 = \frac{du^2}{1 + \rho^2}, \\ \chi &= \frac{u_s^1}{1 + \rho^2} + i \frac{u_s^2}{1 + \rho^2}, \quad |u|^2 = \frac{(u_s^1)^2 + (u_s^2)^2}{(1 + \rho^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Для псевдосферы будем иметь соответственно

$$|u|^2 = u_{1,s}^2 + u_{2,s}^2 \operatorname{sh}^2 \chi, \quad u_1 = \chi, \quad u_2 = \varphi. \quad (4.17)$$

Для тора и катеноида формы ω_1^3, ω_2^3 не совпадают с формами ω_1, ω_2 , и поэтому в этих случаях функционалы H_i не включаются в ряд (4.13). Но тем не менее системы (3.14), (3.15) интегрируемы, поскольку, как показано ниже, они имеют бигамильтоново представление.

Переходя от параметра s к переменной x , получаем полное совпадение гамильтонианов H_i уравнений (3.7)–(3.13) с интегралом движения C_0 . Другими словами, функционалы H_i включаются в бесконечное множество сохраняющихся величин C_n . Как показано в [9], гамильтонова система интегрируема, если ее гамильтониан включается в полный набор (в данном случае – бесконечное множество) инволютивных сохраняющихся величин. Отметим, что если мы учитываем внешнее поле $V(u) \neq 0$, то вместо параметра s мы выбираем параметр ρ : $d\rho^2 = (E - V) ds^2$, и тогда плотность $|u|^2$ определяет интеграл

$$C_0 = \int (E - V) \frac{(u_\rho^1)^2 + (u_\rho^2)^2}{(1 + \rho^2)^2} d\rho,$$

который соответствует, как уже было показано, эволюционной системе с внешним полем.

Линейные системы (4.8) и (4.9) мы будем называть системами, ассоциированными с нелинейной эволюционной системой (3.3).

Поскольку решения системы (4.1) определяют заданную формами ω_i , ω_k^i поверхность N , которая в то же время есть интегральное многообразие для системы (3.3), то из выполнения законов сохранения (4.12) для (4.1) вытекает их выполнение и для (3.3). Таким образом приходим к следующему утверждению.

Нелинейная эволюционная система (3.3), (3.6) вполне интегрируема, так как обладает бесконечным набором законов сохранения (4.12), бесконечным множеством сохраняющихся величин (4.13) и может быть ассоциирована с парой линейных дифференциальных уравнений (4.8), (4.9).

5. БИГАМИЛЬТОНОВОСТЬ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

Большинство интегрируемых систем обладают бигамильтоновым представлением, т.е. они могут быть определены с помощью двух различных операторов K и L , задающих пуассонову структуру, с двумя различными гамильтонианами (H и P):

$$u_t^i = K^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j} = L^{ij} \frac{\delta P}{\delta u^j}.$$

Покажем, что бигамильтоновость эволюционных систем на M связана с дифференциально-геометрическими свойствами фазового пространства. Если первый гамильтониан H (3.4) задан с помощью метрической формы, то второй гамильтониан может быть определен с помощью формы объема фазового пространства N . Площадь конечной области B пространства N записывается через форму объема как $\int_B \sqrt{g} du^1 \wedge du^2$. Если ω^i , ω_k^i – формы смещения и связности, согласованные с метрикой сферы, то $ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2$, $\omega^1 \wedge \omega^2 = \sqrt{g} du^1 \wedge du^2$, $d\omega_1^2 = \omega_1^3 \wedge \omega_3^2$, $\omega_1^3 = \omega^1$, $\omega_3^2 = -\omega^2$. Тогда $d\omega_1^2 = -\omega^1 \wedge \omega^2$, и окончательно $\int \sqrt{g} du^1 \wedge du^2 = -\int d\omega_1^2$. Если B_γ – граница области B , то

$$\int_B d\omega_1^2 = \int_{B_\gamma} \omega_1^2.$$

В качестве второго функционала P выберем функционал $P = \int_{B_\gamma} \omega_1^2$. С помощью P и пуассонова оператора L , имеющего вид гидродинамического оператора [10] $L^{ik} = g^{ik} d - g^{is} \Gamma_{js}^k u_x^j + c u_x^i d^{-1} u_x^k$ (здесь d и d^{-1} – соответственно дифференцирование и интегрирование по переменной x), вторая гамильтонова форма эволюционного уравнения может быть определена в виде

$$u_t^i = L^{ik} \frac{\delta P}{\delta u^k}. \quad (5.1)$$

Для наших трех параметризаций гамильтониан P и оператор L запишутся так:

$$\begin{aligned} (R, w, \varphi): \quad \omega_1^2 &= -\frac{w}{R} d\varphi, \quad P_1 = -\frac{1}{R} \int w d\varphi = -\frac{1}{R} \int w \varphi_x dx, \\ (L_1^{ij}) &= \begin{pmatrix} \frac{R^2 - w^2}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 - w^2} \end{pmatrix} d + \\ &+ \begin{pmatrix} -\frac{w}{R^2} w_x + w_x \int w_x dx & \frac{w}{R^2} \varphi_x + w_x \int \varphi_x dx \\ -\frac{w}{R^2} \varphi_x + \varphi_x \int w_x dx & \frac{w}{(R^2 - w^2)^2} w_x + \varphi_x \int \varphi_x dx \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} (R, \vartheta, \varphi) \quad (\vartheta = u^1, \quad \varphi = u^2): \quad \omega_1^2 &= \cos u^1 du^2, \quad P_2 = \int \cos u^1 u_x^2 dx, \\ (L_2^{ij}) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin^2 u^1} \end{pmatrix} d + \\ &+ \begin{pmatrix} u_x^1 \int u_x^1 dx & -\frac{\cos u^1}{\sin u^1} u_x^2 + u_x^1 \int u_x^2 dx \\ \frac{\cos u^1}{\sin u^1} u_x^2 + u_x^2 \int u_x^1 dx & -\frac{\cos u^1}{\sin^3 u^1} u_x^1 + u_x^2 \int u_x^2 dx \end{pmatrix}; \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} (R, u^1, u^2): \quad \omega_1^2 &= 2 \frac{u^2 du^1 - u^1 du^2}{1 + \rho^2}, \quad P_3 = 2 \int \frac{u^2 u_x^1 - u^1 u_x^2}{1 + \rho^2} dx, \\ (L_3^{ij}) &= \frac{(1 + \rho^2)^2}{4} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d + \\ &+ \begin{pmatrix} \frac{1 + \rho^2}{2} (u^1 u_x^1 + u^2 u_x^2) + u_x^1 \int u_x^1 dx & \frac{1 + \rho^2}{2} (-u^2 u_x^1 + u^1 u_x^2) + u_x^1 \int u_x^2 dx \\ \frac{1 + \rho^2}{2} (u^2 u_x^1 - u^1 u_x^2) + u_x^2 \int u_x^1 dx & \frac{1 + \rho^2}{2} (u^1 u_x^1 + u^2 u_x^2) + u_x^2 \int u_x^2 dx \end{pmatrix} + \\ &+ \rho^2 \begin{pmatrix} u^1 \int u_x^1 dx & 0 \\ 0 & u^2 \int u_x^2 dx \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для псевдосферы, тора и катеноида бигамильтоновость обеспечивается следующими выражениями для P и L :

$$P_s = \frac{1}{2} \int \operatorname{ch} u^1 u_x^2 dx,$$

$$(L_s^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\operatorname{sh}^2 u^1} \end{pmatrix} d +$$

$$+ \begin{pmatrix} u_x^1 \int u_x^1 dx & -\operatorname{cth} u^1 u_x^2 + u_x^1 \int u_x^2 dx \\ \operatorname{cth} u^1 u_x^2 + u_x^2 \int u_x^1 dx & -\frac{\operatorname{ch} u^1}{\operatorname{sh}^3 u^1} u_x^1 + u^2 \int u_x^2 dx \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

$$P_t = \int b(a + b \sin u) v_x dx,$$

$$(L_t^{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{b} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(a + b \cos u)^2} \end{pmatrix} d + \frac{\sin u}{b(a + b \cos u)} \begin{pmatrix} 0 & v_x \\ -v_x & \frac{u_x}{(a + b \cos u)^2} \end{pmatrix}, \quad (5.6)$$

$$P_k = \int \operatorname{th} \frac{u}{a} v_x dx,$$

$$(L_k^{ij}) = \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} d + \operatorname{ch}^2 \frac{u}{a} \operatorname{th} \frac{u}{a} \begin{pmatrix} a^2 u_x & -a v_x \\ a v_x & \frac{u_x}{a} \end{pmatrix}. \quad (5.7)$$

Прямыми вычислениями можно проверить, что система уравнений (5.1) с операторами L_i и функционалами P_i из (5.2)–(5.7) совпадает с соответствующими системами (3.7)–(3.15).

Таким образом, мы показали, что все нелинейные системы уравнений из (3.7)–(3.15) имеют бигамильтоново представление, причем эта двойственность напрямую связана с дифференциально-геометрическими свойствами фазового пространства – с метрической формой и формой объема.

Список литературы

- [1] А. М. Переломов. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. М.: Наука, 1990.
- [2] О. М. Богоявленский. УМН. 1992. Т. 47. С. 107.
- [3] Е. И. Богданов. ТМФ. 1992. Т. 91. С. 443.
- [4] Е. И. Богданов. Изв. вузов. Физика. 1997. № 5. С. 70.
- [5] П. К. Рашевский. Риманова геометрия и тензорный анализ. М.: Наука, 1964.
- [6] Е. В. Ферапонтов. ТМФ. 1992. Т. 91. С. 452.
- [7] А. Картан. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
- [8] Дж. Л. Лэм. Введение в теорию солитонов. М.: Мир, 1983.
- [9] М. Абловиц, Х. Сигур. Солитоны и метод обратной задачи. М.: Мир, 1987.
- [10] А. Т. Фоменко. Симплектическая геометрия. М.: МГУ, 1988.

Поступила в редакцию 6.XII.2000г.,
после доработки 11.V.2001 г.