Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Комарова, М. Ю. Налимов, Асимптотика старших порядков теории возмущений: скейлинговые функции $O(n)$ -симметричной теории ϕ^4 в $(4 - \epsilon)$ -разложении, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 387–402

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf544>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 04:38:41

© 2001 г.

М. В. Комарова*, М. Ю. Налимов*

АСИМПТОТИКА СТАРШИХ ПОРЯДКОВ
ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ: СКЕЙЛИНГОВЫЕ
ФУНКЦИИ $O(n)$ -СИММЕТРИЧНОЙ
ТЕОРИИ ϕ^4 В $(4 - \epsilon)$ -РАЗЛОЖЕНИИ

На основе инстантонного подхода вычислена асимптотика высоких порядков $(4 - \epsilon)$ -разложения скейлинговой функции парного коррелятора $O(n)$ -симметричной теории ϕ^4 в схеме минимальных вычитаний. Полученные результаты указывают на значительные отклонения от точно известного к настоящему моменту ϵ^3 -порядка разложения скейлинговой функции в области малых τ .

1. ВВЕДЕНИЕ

Для вычислений в полевых моделях обычно используется теория возмущений. Традиционный расчет нескольких первых членов соответствующих рядов в настоящее время дополняется исследованием асимптотик высоких порядков разложений, основанном на предложенном в статье [1] методе перевала в функциональном интеграле. Результаты [1] применены в работе [2] для анализа поведения рядов для вычисляемых методом ренормализационной группы (РГ) критических индексов. Особенности применения метода перевала для $(4 - \epsilon)$ -разложения критических индексов теории ϕ^4 рассмотрены в статье [3]. Развита в [3] методика и будет использована далее.

Кроме критических индексов в теории критического поведения рассматриваются универсальные отношения и скейлинговые (универсальные) функции [4], [5], высокие порядки разложений которых не были изучены. Несмотря на это, попытка пересуммирования соответствующих рядов была предпринята в работе [6]. Развитие метода перевала [7], [8] позволило аналитически исследовать асимптотики разложения различных величин в массивной теории ϕ^4 в ϵ -разложении. Данная статья посвящена вычислению асимптотик старших порядков ϵ -разложения скейлинговой функции парного коррелятора $\phi^4(O(n))$ -теории в размерной регуляризации и схеме минимальных вычитаний (MS).

Напомним основные положения РГ, касающиеся скейлинговой функции парного кор-

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия. E-mail: nalimov@snoopy.phys.spbu.ru

релятора теории с действием

$$S(\phi, g, \tau) = \frac{1}{2} \partial \phi \partial \phi + \frac{1}{2} \tau \phi^2 + \frac{1}{4!} g \mu^\epsilon \phi^4.$$

Инфракрасная (ИК) асимптотика решения уравнения РГ

$$[\mu \partial_\mu + \gamma_\tau \tau \partial_\tau + \beta \partial_g + 2\gamma_\phi] G_2^R = 0$$

($\tau/\mu^2 \rightarrow 0$, $p/\mu \rightarrow 0$, p – внешние импульсы функций Грина, μ – ренормировочная масса) для парной ренормированной функции может быть представлена в следующих эквивалентных формах [5]:

$$\langle \phi \phi \rangle = \frac{1}{\tau \tilde{s}^{\gamma-1}} \bar{G}(g_*, \bar{p})$$

или

$$\langle \phi \phi \rangle = \frac{1}{p^2 s^{-\eta}} \tilde{G}(g_*, \bar{\tau}),$$

где g_* – положение фиксированной точки ($\beta(g_*) = 0$), $\bar{\tau}, \bar{p}$ – универсальные переменные, удовлетворяющие уравнениям

$$s \partial_s \bar{\tau} = (2 + \gamma_\tau) \bar{\tau}, \quad \tilde{s} \partial_{\tilde{s}} \bar{p} = \frac{1}{2 + \gamma_\tau} \bar{p},$$

$s \equiv p/\mu$, $\tilde{s} \equiv \tau/\mu^2$, функции $\bar{G}$ и $\tilde{G}$ задаются соотношениями

$$\bar{G} = \tau \langle \phi \phi \rangle|_{p=\bar{p}, \tau=\mu^2, g=g_*}, \quad \tilde{G} = p^2 \langle \phi \phi \rangle|_{p=\mu, \tau=\bar{\tau}, g=g_*}.$$

Определенные так скейлинговые функции еще не являются ренормировочно-инвариантными. Для обеспечения универсальности их следует нормировать, устранив две произвольные амплитуды. Начиная с двухпетлевого приближения, скейлинговые функции не удастся вычислить аналитически, вместо этого используются разложения по степеням универсальной переменной $\bar{\tau}$ или $\bar{p}$. Начальные отрезки таких разложений асимптотик высоких порядков и будут вычислены в предлагаемой статье. Каноническая нормировка заключается в фиксации двух первых членов разложения в окрестности точки $\bar{p} = 0$ функции

$$\bar{G}^{-1} = 1 + \bar{p}^2 + O(\bar{p}^4).$$

Во втором разделе статьи кратко описываются основные моменты использования метода перевала в функциональных интегралах, связанные с рассмотрением массивной модели. В третьем разделе обсуждается разложение инстантона в ряд по нелинейностям вариационного уравнения. В четвертом разделе описывается схема вычисления асимптотик скейлинговых функций в высоких порядках теории возмущений. В пятом и шестом разделах найдены липатовские асимптотики для $\bar{G}$ и $\tilde{G}$. В седьмом – обсуждается вопрос о канонической нормировке и асимптотике старших порядков ϵ -разложения скейлинговой функции, проведено сравнение с известными результатами точного расчета.

2. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ЛИПАТОВСКОГО ПОДХОДА ПРИ $\tau \neq 0$

Приведем основные положения работ [1]–[3], [7], [8], используемые нами при вычислении липатовских асимптотик разложений скейлинговых функций. Рассматривается теория с ренормированным действием

$$S_R(\phi, g) = \frac{1}{2} Z_\phi^2 \partial_i \phi_\alpha \partial_i \phi_\alpha + \frac{1}{2} Z_\phi^2 Z_\tau \tau \phi^2 + \frac{1}{4!} Z_\phi^4 Z_g g \mu^\epsilon \phi^4 \quad (1)$$

в пространстве размерности $D = 4 - \epsilon$. Здесь ϕ – n -компонентное векторное поле, свертки по повторяющимся векторным индексам и интегрирования по координатам подразумеваются как и в аналогичных формулах в дальнейшем, под ϕ^4 понимается $(\phi^2)^2$; Z_g , Z_τ , Z_ϕ – константы ренормировки.

Вычисление коэффициентов $G_k^{[N]}$ разложения k -хвостой функции Грина

$$G_k(g) = \frac{\int D\phi \phi(\mathbf{x}_1) \dots \phi(\mathbf{x}_k) e^{-S_R}}{\int D\phi e^{-S_R}} = \sum_N g^N G_k^{[N]}$$

по константе связи g в высоких порядках ($N \rightarrow \infty$) осуществляется на основе интегрального представления [1]

$$G_k^{[N]} = \frac{(-1)^N}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{dg}{(-g)^{N+1}} G_k(g) \quad (2)$$

с последующим применением метода перевала по переменной g и полю ϕ (γ – замкнутый контур в комплексной плоскости g , охватывающий ноль). Соответствующие вариационные уравнения, определяющие точку стационарности g_c , ϕ_c (инстантон), имеют вид

$$\begin{aligned} -\Delta \bar{\phi}_\alpha + \tau y^2 \bar{\phi}_\alpha + \frac{\bar{g}}{6} \bar{\phi}^2 \bar{\phi}_\alpha + 4\varrho y^\epsilon \bar{\phi}^2 \bar{\phi}_\alpha \ln\left(\frac{\mathbf{x}}{y}\right)^2 &= 0, \\ \frac{\bar{g}}{4!} \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) &= -1, \quad \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4(\mathbf{x}) \ln\left(\frac{\mathbf{x}}{y}\right)^2 = 0, \\ g_c &= \frac{\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon}}{N}, \quad \phi_c = \bar{\phi} \sqrt{N}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь следует отметить появление масштабного параметра y , который отражает дилатационную инвариантность теории. Использование приема Фаддеева–Попова и последующее растяжение переменных [1] приводит к тому, что инстантон оказывается зависящим от y только через коэффициенты μy , τy^2 , ϱy^ϵ уравнений (3), а интегрирование по этому параметру выделяется в выражении для $G_k^{[N]}$ явно. Введенный множитель Лагранжа ϱ решает проблему отсутствия перевальных точек при $D = 4$ в массивной теории [8], [9].

Для частично ренормированной (с вычитаниями расходимостей подграфов) k -хвостой функции Грина такой подход приводит к выражению [1], [3], [7]:

$$G_k^{[N]}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) = (-1)^N L_k N^N N^{\frac{k+n+3}{2}} \int_0^\infty \frac{d(y^2)}{y^{D+2}} D_{\text{et}} e^{-NJ(\bar{\phi}, \bar{g}, \tau y^2, \varrho y^\epsilon)} \times \\ \times \int d^D \mathbf{x}_0 (\mu y)^{N\epsilon} Z_\phi^{-k} \frac{1}{y^{k(1-\frac{D}{2})}} \bar{\phi}\left(\frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0}{y}\right) \dots \bar{\phi}\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_0}{y}\right) \times \\ \times \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} \left[(1 - Z_g Z_\phi^4) \frac{N \bar{g} \bar{\phi}^4}{4!} \right]^j \sum_{i=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{i!} \left[(1 - Z_\tau Z_\phi^2) \frac{N \tau y^2 \bar{\phi}^2}{2} \right]^i. \quad (4)$$

Здесь введены обозначения

$$J(\phi, g, \tau, \varrho) = \int d\mathbf{x} \left[\frac{1}{2} \partial \phi \partial \phi + \frac{1}{2} \tau \phi^2 + \frac{1}{4!} g \phi^4 + \varrho \phi^4 \ln(\mathbf{x}^2) \right] + \ln(-g), \\ L_k = \frac{(k-1)!! S_n}{n(n+2) \dots (n+k-2)},$$

S_n – площадь поверхности единичной сферы в n -мерном пространстве, D_{et} – детерминант ядра квадратичной формы $\delta^2 J / \delta \{\phi, g\} |_{\phi_c, g_c}$ на линейном функциональном подпространстве, ограниченном дополнительными условиями, фиксирующими положение, масштаб и направление инстантона; $Z_{\tau, \phi, g} = Z_{\tau, \phi, g}(\bar{g}(\mu y)^{-\epsilon}/N)$.

Ренормировка в (4) осуществляется константами $Z_{\tau, \phi, g}$, вычисленными в виде рядов теории возмущений по g . В MS-схеме для констант ренормировки можно ограничиться следующими приближениями [1], [2]:

$$Z_g(g) \approx 1 + \frac{ag}{16\pi^2\epsilon}, \quad a = \frac{n+8}{3}, \\ Z_\phi(g) \approx 1, \quad Z_\tau(g) \approx 1 + b \frac{g}{16\pi^2\epsilon}, \quad b = -\frac{n+2}{3},$$

так как остальные члены не дают вклада в главный порядок по $1/N$. Находящиеся в показателе экспоненты константы ренормировки в размерной регуляризации содержат полюсы по ϵ . Эта экспонента, как подробно обсуждалось в работе [3], должна быть разложена в ряд Лорана (последняя строка выражения (4)) до применения перевального метода.

Метод перевала не может быть распространен на интеграл по масштабному параметру y выражения (4). Интересуясь ϵ -разложением теории, следует [3] рассматривать комбинацию параметров $N\epsilon$ малой. В асимптотике больших N наиболее существенной оказывается область малых y . В интегралах по y перевальная точка в области малых y отсутствует. Таким образом, интеграл по y в (4) является существенно негауссовым и его следует вычислять более аккуратно. Асимптотики больших N оказываются неравномерными по остальным параметрам ϵ, τ, ϱ . Проводя вычисления, будем фиксировать соотношения между этими параметрами, и, исследуя интегралы по y , ограничимся первыми двумя членами разложения скейлинговых функций по их переменным.

Для $J_c \equiv J(\bar{\phi}, \bar{g}, \tau y^2, \varrho y^\epsilon)$ в (4) при малых y будем использовать приближение

$$J_c = J_c|_{\tau, \epsilon=0} + O(\tau y^2, \epsilon) \equiv 1 + \alpha\epsilon - \bar{J}_c \simeq 1 + \alpha\epsilon - \alpha_1 \tau y^2 \ln(\tau y^2) - \alpha_2 \tau y^2. \quad (5)$$

Коэффициенты α_1, α_2 будут обсуждены позднее, множитель α вычислен в работах [7], [3] и имеет вид

$$\alpha = -\frac{1}{2} \ln \pi - \frac{1}{2} \gamma - 1, \quad (6)$$

где γ – постоянная Эйлера. В дальнейшем мы увидим, что все члены в правой части (5) дают вклад в главный порядок по $1/N$ скейлинговой функции, остальные поправки к (5) несущественны.

Рассматривая $(4 - \epsilon)$ -разложение функций Грина, поправками по ϵ к $\bar{\phi}$ и D_{et} при $N \rightarrow \infty$ следует пренебречь по сравнению с $\alpha N \epsilon$ -вкладом в (4). Поэтому инстантон достаточно вычислять в пространстве размерности $D = 4$. Массивные поправки к D_{et} оказываются малыми по сравнению с вкладами третьего и четвертого слагаемых в правой части (5) в выражение (4). Таким образом, вместо вычисления D_{et} в пространстве $D = 4 - \epsilon$ при $\tau \neq 0$ можно в старшем по $1/N$ порядке воспользоваться известными результатами при $D = 4$ и $\tau = 0$. Итак, [2], [3]

$$\begin{aligned} D_{\text{et}} &= 2^{\frac{7-4n}{2}} 3^{\frac{5n}{2}} \pi^{-\frac{5+n}{2}} 5^{-\frac{5}{2}} \exp \left\{ -\frac{4(n+2)}{3} - \frac{7(n+8)}{18} - \frac{R}{12} \right\} e^{U_{\text{reg}}}, \\ R &= \sum_{l=2}^{\infty} (l+1)(l+2)(2l+3) \left\{ \ln \frac{(l-1)(l+4)}{(l+1)(l+2)} + \right. \\ &\quad \left. + (n-1) \ln \frac{l(l+3)}{(l+1)(l+2)} + \frac{2(n+2)}{(l+1)(l+2)} + \frac{2(n+8)}{(l+1)^2(l+2)^2} \right\}, \\ U_{\text{reg}} &= \frac{n+8}{6} (-\gamma + 2 - \ln \pi). \end{aligned} \quad (7)$$

Результат приведен в схеме MS. Содержащиеся в D_{et} расходимости, пропорциональные $1/\epsilon$, сокращаются соответствующими вкладами констант ренормировки Z_g, Z_τ .

3. ИНСТАНТОН В МАССИВНОЙ МОДЕЛИ ϕ^4

Решение первого (дифференциального) уравнения (3) удобно представить в виде функционального интеграла, введя вспомогательное поле аналогично тому, как это обычно делается при рассмотрении стохастических уравнений [5],

$$\bar{\phi} = \int D\varphi D\phi' \varphi \exp(-A) \det \left(\frac{\delta^2 A}{\delta \phi' \delta \varphi} \right), \quad (8)$$

где

$$A = \phi' \left(-\Delta \varphi + \tau \varphi + \frac{\bar{g}}{6} \varphi^3 + 4\varrho \varphi^3 \ln x^2 \right). \quad (9)$$

Напомним, что решение уравнений (3) в безмассовой теории при $D = 4$ найдено в работе [1] и имеет вид сферически-симметричных убывающих функций

$$\bar{\phi}_0(\mathbf{x}) = \frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{1 + |\mathbf{x}|^2} \mathbf{u}, \quad \bar{g}_0 = -16\pi^2, \quad (10)$$

где $\mathbf{u}$ – произвольный n -мерный единичный вектор. Полезна справочная формула перехода к импульсному представлению (при $D = 4$)

$$\frac{\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{1 + \mathbf{x}^2} \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{\pi} (2\pi)^2 \frac{K_1(|p|)}{|p|}, \quad (11)$$

где $K_1(x)$ – функция Макдональда.

Сделав в интеграле (8) сдвиг переменной $\varphi \rightarrow \varphi + \bar{\phi}_0$, получим действие вспомогательной теории в виде

$$A = \phi' \left(-\Delta\varphi + \tau\varphi + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\phi}_0^2 \varphi + \frac{\bar{g}}{2} \bar{\phi}_0 \varphi^2 + \frac{\bar{g}}{6} \varphi^3 + 4\varrho \bar{\phi}_0^3 \ln x^2 + \right. \\ \left. + 12\varrho \bar{\phi}_0^2 \varphi \ln x^2 + 12\varrho \bar{\phi}_0 \varphi^2 \ln x^2 + 4\varrho \varphi^3 \ln x^2 + \tau \bar{\phi}_0 \right). \quad (12)$$

Теория (8) с действием (12) позволяет построить нетривиальное решение $\bar{\phi}$ в виде разложения (8) в ряд по нелинейностям ($\sim g, \varrho$). Начальный отрезок разложения инстантона определяется набором диаграмм

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(py, \tau y^2, \varrho y^\epsilon) = & \text{---} \tau y^2 \text{---} + \\ & + \frac{\bar{g}}{2} \tau y^2 \text{---} \text{---} - \frac{\bar{g}}{2} (\tau y^2)^2 \text{---} \text{---} + \\ & + \frac{\bar{g}}{6} (\tau y^2)^3 \text{---} \text{---} . \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь обычной линии соответствует множитель $1/(p^2 y^2 + \tau y^2)$, волнистой – множитель $\phi_0(py)$ (в координатном представлении – множитель $\phi_0(\mathbf{x}/y - 0)$).

По сумме первых двух диаграмм (13), равной

$$4\sqrt{3}\pi p y K_1(|p|y) (p^2 y^2 + \tau y^2)^{-1},$$

можно вычислить поправку на τy^2 к J_c , т.е. найти коэффициенты α_1, α_2 в (5),

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} - 3 \ln 2 + 3\gamma. \quad (14)$$

Остальные три диаграммы дают лишь вклады в (5) порядка $O((\tau y^2)^2 \ln(\tau y^2))$ и поэтому не учитываются при вычислении J_c .

Рассмотрев первое из уравнений стационарности (3) совместно с уравнением, отражающим специфику преобразования варьируемого функционала J при растяжении координат $x \rightarrow \lambda x$ [9],

$$\left. \frac{\partial J\{\bar{\phi}(\lambda x), \bar{g}, \tau y^2, \varrho y^\epsilon\}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=1} = \int d\mathbf{x} \left[\partial \phi \partial \bar{\phi} + 2\tau y^2 \bar{\phi}^2 + \left(\frac{\bar{g}}{6} + 2\varrho y^\epsilon \right) \bar{\phi}^4 + 4\varrho y^\epsilon \bar{\phi}^4 \ln x^2 \right] = 0, \quad (15)$$

при $D = 4$ получим

$$\tau y^2 \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^2 + 2\varrho y^\epsilon \int d\mathbf{x} \bar{\phi}^4 = 0. \quad (16)$$

Отметим, что вычисленные коэффициенты α_1, α_2 совпадают с результатами работы [8] (хотя приведенное в последней значение ϱ , видимо, вследствие опечатки не удовлетворяет соотношению (16) и, следовательно, масштабному свойству (15)).

4. СКЕЙЛИНГОВАЯ ФУНКЦИЯ ПАРНОГО КОРРЕЛЯТОРА

Перейдя в выражении (4) к импульсному представлению для асимптотики высоких порядков разложения функции Грина (с вычитаниями на расходимости подграфов), можно записать

$$G_2^{[N]}(p, \tau) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(py, \tau y^2)]^2}{(4\pi\sqrt{3})^2} e^{N\bar{J}_c} - 1 \right) (\mu y)^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \times \\ \times \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{1}{j!} \left[\frac{-a[(\mu y)^{-\epsilon} - 1]}{\epsilon} \right]^j \sum_{i=0}^N \frac{1}{i!} \left[\frac{-b}{2} \tau \bar{\phi}^2 \frac{(\mu y)^{-\epsilon} - 1}{\epsilon} \right]^i, \quad (17)$$

где

$$C_k^{[N]} = (-1)^N D_{\text{et}} L_k (4\sqrt{3}\pi)^k N^N N^{\frac{1}{2}(n+k+3)} e^{-N}. \quad (18)$$

Выполненное явно вычитание единицы в (17) соответствует аддитивной ренормировке $\delta\tau$ (равной нулю в MS-схеме).

При выделении ультрафиолетовых расходимостей множитель $\exp(N\alpha_1 y^2 \ln y^2)$ из $\exp(N\bar{J}_c)$ позволяет при больших N в интеграле по y ограничиться рассмотрением области малых y . Поэтому следует разложить $\bar{\phi}$ в окрестности $y = 0$ и подставить это разложение в выражение (17).

Итак, обсудим разложение $\bar{\phi}$ по y^2 . Чтобы его получить, нужно учесть как разложение при малых y известной функции $\bar{\phi}_0$, так и поправочные по нелинейностям члены (8).

Здесь ряд теории возмущений по $\bar{g}$ (13) оказывается очень удобным. Действительно, наличие в вариационных уравнениях (3) членов вида $\tau y^2, \ln(\mathbf{x}/y)$ свидетельствует о том, что малые y соответствуют ИК-области. Безмассовый инстантон ведет здесь себя как $\bar{\phi}_0 \sim 1/x^2$, т.е. имеет определенную каноническую размерность. Значит, для действия (12) применим простой размерный анализ. В ИК-области при $D = 4$ имеем канонические размерности $d_\tau = 2d_p = 2$. Поскольку параметрами (12) являются τy^2 и py , то каноническая размерность и определяет зависимость от y . Имеем $d_{\phi'} = 0$, $d_{\bar{\phi}_0} = d_{\bar{\phi}} =$

2, $d_{\bar{g}} = -2$. Размерность константы связи оказалась отрицательной, т.е. эта константа $\bar{g}$ является ИК-несущественной. Из выражения (16) видно, что $\varrho y^\epsilon \sim \tau y^2 \ln(\tau y^2)$, а так как $d_\varrho = -2$, то влияние ϱ еще менее существенно при малых y , чем влияние $\bar{g}$.

Итак, разложение инстантона по y^2 определяется набором диаграмм (13). Выражения, соответствующие этим диаграммам, должны быть разложены вплоть до требуемого порядка по y и затем вычислены (что удастся сделать лишь в форме разложения по переменным $p/\sqrt{\tau}$ или τ/p^2). Вычисление диаграмм (13) в асимптотике $p^2 \ll \tau$ приводит к следующему разложению инстантона в ряд по y :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(py, \tau y^2) = & \frac{4\sqrt{3}\pi}{(p^2 + \tau)y^2} \left(pyK_1(py) - \frac{3}{4}\tau y^2 \ln^2(\tau y^2) + R_1\tau y^2 \ln(\tau y^2) + R_2\tau y^2 - \right. \\ & \left. - \frac{1}{4}p^2 y^2 \ln\left(\frac{p^2}{\tau}\right) + R_3 p^2 y^2 + o(y^2, p^2) \right), \end{aligned} \quad (19)$$

где $R_1 \simeq 0.649$, $R_2 \simeq 3.32$, $R_3 \simeq 6.84$ (аналитические выражения для R_1 , R_2 и R_3 приведены в приложении). Заметим, что выражение для $\bar{\phi}(p, \tau)$ является аналитическим по p в нуле. В рассматриваемом порядке по y это проявляется в том, что неаналитичность функции Макдональда сокращается логарифмическим по p слагаемым. Это служит проверкой наших вычислений, ибо отражает аналитичность скейлинговой функции $\bar{G}$ по $\bar{p}$.

Далее, интересуясь в (17) асимптотиками $p/\sqrt{\tau} \rightarrow 0$ и $\tau/p^2 \rightarrow 0$, следует провести интегрирование по y , а затем суммирование по j, i , отбирая лишь конечные при $\epsilon \rightarrow 0$ слагаемые в главном порядке по $1/N$ (так как ренормированная корреляционная функция регулярна).

5. АСИМПТОТИКА $p^2 \ll \tau$; СКЕЙЛИНГОВАЯ ФУНКЦИЯ $\bar{G}^{[N]}(\bar{p})$

Положим $\tau = \mu^2$ и рассмотрим асимптотику парного коррелятора при малых p/μ . После замены $y \rightarrow y/\mu$ выражение (17) примет вид

$$\begin{aligned} G_2^{[N]}(\bar{p}) = & \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}(\bar{p}y, y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\tau=1)} - 1 \right) \times \\ & \times y^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{(-a)^j}{j!} \frac{[y^{-\epsilon} - 1]^j}{\epsilon^j}. \end{aligned} \quad (20)$$

Оказывается, из суммы по i в выражении (17), обусловленной константой ренормировки массы Z_τ , все слагаемые, кроме первого (при $i = 0$), дают несущественные по $1/N$ вклады в скейлинговую функцию по сравнению с главным вкладом (поэтому в (20) эти слагаемые опущены, комментарии см. ниже). Также несущественными оказываются поправки порядка $o(y^2)$ к J_c и порядка $o(1)$ к $\bar{\phi}$.

Возводя выражение (19) в квадрат и отбрасывая члены $\phi_c(y) \sim o(1)$, получим

$$\begin{aligned} [y^2 \bar{\phi}_c(py, y^2)]^2 \simeq & \frac{48\pi^2}{(p^2 + 1)^2} (1 + Ay^2 \ln^2(y^2) + By^2 \ln(y^2) + \\ & + Cy^2 + Ep^2 y^2 + Fp^2 y^2 \ln(y^2)), \end{aligned} \quad (21)$$

где для краткости введены следующие обозначения в соответствии с (19):

$$\begin{aligned} A &= -\frac{3}{2}, & B &= 2R_1, & C &= 2R_2, \\ E &= 2R_3 + \gamma - \frac{1}{2} - \ln 2 \simeq 13.06, & F &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим отдельное слагаемое G_j из (20). Раскрытие в нем скобки $[y^{-\epsilon} - 1]^j$ приводит к появлению интегралов вида

$$I_1(s) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} y^s \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}_c(\bar{p}y, y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\tau=1)} - 1 \right), \quad (23)$$

где $s = N\epsilon$. Эти интегралы имеют при малых s полюсные особенности. При их исследовании можно в области малых y заменить $\bar{J}_c$ асимптотическим выражением $\alpha_1 y^2 \ln(y^2) + \alpha_2 y^2$ (5). Затем полюсные особенности несложно выделить явно двукратным интегрированием по частям выражения (23) с учетом обращения в нуль при больших y выражения $\exp(N\bar{J}_c(y))$ (подробности техники вычислений см. в [3]). Таким образом, имеем в старшем по N порядке

$$I_1(s) = \frac{1}{\mu^2(1+\bar{p}^2)^2} \left[\frac{a_1}{s^3} + \frac{b_1}{s^2} + \frac{c_1}{s} + d_1(s) \right], \quad (24)$$

где

$$a_1 = 8A, \quad b_1 = -2N\alpha_1 - 2F\bar{p}^2, \quad c_1 = N\alpha_2 + E\bar{p}^2 \quad (25)$$

и $d_1(s)$ – регулярная в нуле функция,

$$d_1(s) = I_1(s) - \frac{a_1}{s^3} - \frac{b_1}{s^2} - \frac{c_1}{s}. \quad (26)$$

В (25) отброшены несущественные по $1/N$ члены, например, постоянные по сравнению с $N\alpha_1, N\alpha_2$.

С учетом (23) слагаемое G_j из (20) приобретает вид

$$G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \sum_{m=0}^j C_j^m (-1)^m a^j \frac{I_1((N-m)\epsilon)}{\epsilon^j j!} e^{-N\alpha\epsilon}.$$

Разлагая в этом выражении функцию $I_1((N-m)\epsilon)$ в ряд в окрестности нуля, получим

$$\begin{aligned} G_j &= \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \sum_{m=0}^j C_j^m (-1)^m a^j \frac{1}{\epsilon^j j!} \times \\ &\times \left(\frac{a_1}{(N-m)^3 \epsilon^3} + \frac{b_1}{(N-m)^2 \epsilon^2} + \frac{c_1}{(N-m)\epsilon} + d_1(0) + d_1'(0)(N-m)\epsilon + \right. \\ &\left. + \frac{d_1''(0)(N-m)^2 \epsilon^2}{2!} + \dots + \frac{d_1^{(j)}(0)(N-m)^j \epsilon^j}{j!} \right) e^{-N\alpha\epsilon}. \end{aligned}$$

Образовавшиеся в полученном выражении суммы можно преобразовать с учетом равенства

$$\sum_{m=0}^j (-1)^m C_j^m f(m) = (-1)^j \frac{\partial^j f(m)}{\partial m^j} \Big|_{m=\frac{j}{2}}, \quad (27)$$

являющегося точным, если $f(m)$ — полином степени не выше j , и асимптотически точным по $1/N$, если $f(m)$ зависит от разности $(N - m)$ и $j \ll N$. Результатом этих преобразований является формула

$$G_j = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} a^j \left[a_1 \frac{(-1)^j (j+1)(j+2)}{(N\epsilon)^{j+3}} + b_1 \frac{(-1)^j (j+1)}{(N\epsilon)^{j+2}} + \right. \\ \left. + c_1 \frac{(-1)^j}{(N\epsilon)^{j+1}} + \frac{d_1^{(j)}(0)}{j!} \right] e^{-N\alpha\epsilon}.$$

В ренормированную скейлинговую функцию войдут только конечные при $\epsilon \rightarrow 0$ слагаемые, то есть те, в которых полюсы по ϵ сокращаются за счет экспоненциального члена $\exp(-N\alpha\epsilon)$. В итоге, отбирая только эти слагаемые в G_j и затем проводя суммирование по j , получим

$$G^{[N]}(\bar{p}) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{\mu^2(\bar{p}^2 + 1)^2} \left[-a_1 \left(\frac{\alpha^2 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{2e^{\alpha a}}{a^3} - \frac{2}{a^3} \right) + \right. \\ \left. + b_1 \left(\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) - c_1 \left(\frac{e^{\alpha a}}{a} - \frac{1}{a} \right) + d_1(a) \right]. \quad (28)$$

Вычислив $d_1(a)$ с помощью соотношений (26), (25), подставим в (28) значения $a_1, b_1, c_1, d_1(a)$ и отберем старшие по $1/N$ порядки. Заметим, что интеграл $I_1(a)$ оказывается мал в асимптотике больших N , в чем нетрудно убедиться после замены переменной $y \rightarrow y/(\sqrt{N} \ln N)^{1/2}$. Окончательно для скейлинговой функции $\bar{G}(\bar{p})$ в асимптотике малых $\bar{p}$ получим выражение

$$\bar{G}(\bar{p}) = \sum_N g^N \bar{G}^{[N]}(\bar{p}), \quad (29)$$

где

$$\bar{G}^{[N]}(\bar{p}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} \left[-(2N\alpha_1 + 2F\bar{p}^2) \left(\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right) - (E\bar{p}^2 + N\alpha_2) \frac{e^{\alpha a}}{a} \right].$$

Напомним, что параметры $\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ даются выражениями (6), (14), значения E, F приведены в (22)²⁾.

¹⁾ При этом проще положить равным нулю вычитательный (типа $\delta\tau$) член и заменить $\bar{J}_c$ асимптотикой (5), определяющей главный вклад по $1/N$. После замены переменной y асимптотике больших N соответствует первый нетривиальный член разложения ϕ по y . Подробнее о вычислении этого незначительного вклада можно посмотреть в работе [7].

²⁾ Отметим, что повторяя вышеприведенные рассуждения для членов выражения (17), связанных с константой ренормировки массы Z_τ (в сумме по i при $i \neq 0$), можно убедиться в незначительности по $1/N$ их вклада в скейлинговую функцию по сравнению с (29).

При $n = 1$, в частности, имеем

$$\overline{G}^{[N]}(\bar{p}) \simeq \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} (0.0068N - 0.014\bar{p}^2). \quad (30)$$

Понятно, что если бы мы задались целью найти старшие степени $\overline{G}^{[N]}(\bar{p})$ разложения (29) по $\bar{p}^2$, то получили бы выражение

$$\overline{G}^{[N]}(\bar{p}) = \frac{\overline{C}_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{p}^2 + 1)^2} (A_1 N + A_2 \bar{p}^2 + A_3 \bar{p}^4 + A_4 \bar{p}^6 + \dots), \quad (31)$$

где $A_i = \text{const}$ для любого i , в котором в главном по N порядке следует оставить лишь первое слагаемое разложения ($A_1 N$), т.е.

$$\overline{G}^{[N]}(\bar{p}) = \frac{\overline{C}_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{A_1 N}{(\bar{p}^2 + 1)^2}.$$

Однако в обратную корреляционную функцию, или так называемую “собственно-энергетическую часть” (по которой традиционно и осуществляется нормировка скейлинговой функции [5]), множитель $1/(\bar{p}^2 + 1)^2$ не дает вклада, поэтому в нее необходимо входят все члены разложения в скобках (31). Это является проявлением неравномерности асимптотики скейлинговой функции по аргументу.

6. АСИМПТОТИКА $\tau \ll p^2$; СКЕЙЛИНГОВАЯ ФУНКЦИЯ $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$

При обсуждении асимптотики $\tau/p^2 \ll 1$ в скейлинговой функции ограничимся константой и членами порядка $\bar{\tau}$. Для старших порядков парной функции Грина, в которой проведено устранение расхождений подграфов, снова воспользуемся асимптотическим выражением (17). Положим $p = \mu$ и рассмотрим асимптотику парного коррелятора при малых τ/μ^2 . Вклад в эту асимптотику поправок, связанных с ренормировкой массы (суммы по i , $i > 1$) рассматривать не будем, так как они пропорциональны τ^i ; вклад члена с $i = 1$ вновь содержит малую порядка $1/N$ по сравнению с членом с $i = 0$.

После замены $y \rightarrow y/\mu$ выражение (17) примет вид

$$\begin{aligned} G^{[N]}(\bar{\tau}) &= \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} \left(\frac{[y^2 \overline{\phi}(y, \bar{\tau} y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N\bar{J}_c(\bar{\tau} y^2)} - 1 \right) \times \\ &\times y^{N\epsilon} e^{-N\alpha\epsilon} \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}} \frac{(-a)^j}{j!} \frac{[y^{-\epsilon} - 1]^j}{\epsilon^j}. \end{aligned} \quad (32)$$

Аналогично (20) рассмотрим здесь отдельное слагаемое суммы по j , выделим в нем конечную при $\epsilon \rightarrow 0$ часть и просуммируем результат, снова воспользовавшись формулой (27). Здесь в отличие от (20) при выделении полюсных особенностей можно ограничиться беспетлевым приближением в разложении для инстантона (13), так как уже первые две диаграммы дают нетривиальный вклад в рассматриваемые нами члены $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$ (вклады всех петлевых диаграмм (13) обращаются в нуль при $\tau = 0$).

Введем аналогично (24) величину

$$I_2(s) = \int_0^\infty \frac{dy}{y^3} y^s \left(\frac{[y^2 \bar{\phi}_c(y, \bar{\tau} y^2)]^2}{(4\sqrt{3}\pi)^2} e^{N \bar{J}_c(\bar{\tau} y^2)} - 1 \right) = \frac{1}{\mu^2(1 + \bar{\tau}^2)^2} \left[\frac{b_2}{s^2} + \frac{c_2}{s} + d_2(s) \right] \quad (33)$$

с полюсными особенностями в нуле. Для определения b_2 и c_2 в ведущем порядке по $1/N$ для массивного инстантона достаточным оказывается приближение

$$[y^2 \bar{\phi}_c(y, \tau y^2)]^2 \simeq \frac{48\pi^2}{(1 + \tau)^2} \left[1 + y^2 \ln(y) - \left(-\gamma + \frac{1}{2} + \ln 2 \right) y^2 \right]. \quad (34)$$

Проводя вычисления, аналогичные проделанным в предыдущем разделе, получим для скейлинговой функции $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$ при $\bar{\tau} \ll 1$ выражение

$$\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} \left[b_2 \left(\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{1}{a^2} \right) - c_2 \left(\frac{e^{\alpha a}}{a} - \frac{1}{a} \right) + d_2(a) \right], \quad (35)$$

где

$$b_2 = -2N\alpha_1 \bar{\tau} - 1, \quad c_2 = N\alpha_1 \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + N\alpha_2 \bar{\tau} - \left(-\gamma + \frac{1}{2} + \ln 2 \right), \quad (36)$$

$$d_2(a) = I_2(a) - \frac{b_2}{a^2} - \frac{c_2}{a}.$$

При вычислении $I_2(a)$ в интересующем нас порядке по τ можно для $\bar{J}_c$ ограничиться приближением (5).

Выражения (35), (36) являются окончательными для асимптотики больших N и малых $\bar{\tau}$ скейлинговой функции. Решение показывает неравномерность $\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau})$ по универсальной переменной $\bar{\tau}$, в частности, вычисление интеграла $I_2(a)$ сильно зависит от соотношения параметров $\bar{\tau}$ и N .

Наиболее интересной для скейлинговой функции $\tilde{G}$ представляется область очень малых $\bar{\tau} \ll 1/N$. Здесь, ограничившись в I_2 двумя первыми членами разложения $\exp(N \bar{J}_c)$ в ряд, получим

$$I_2(a) = W_1(a) + NW_2(a)\alpha_1 \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + N[W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1] \bar{\tau},$$

где введены обозначения

$$W_1(a) = \int_0^\infty dy y^{a-3} [y K_1(y)]^2, \quad W_1(a)|_{n=1} \simeq 0.925,$$

$$W_2(a) = \int_0^\infty dy y^{a-1} [y K_1(y)]^2, \quad W_2(a)|_{n=1} \simeq 0.867,$$

$$W_3(a) = \int_0^\infty dy y^{a-1} [y K_1(y)]^2 \ln(y^2), \quad W_3(a)|_{n=1} \simeq 0.798.$$

Напомним, что $a = (n + 8)/3$.

Подставляя (36) в (35), получим для $N\bar{\tau} \ll 1$, что

$$\tilde{G}(\bar{\tau}) = \sum_N g^N \tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}), \quad (37)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} & \left\{ - \left(\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right) + \left(-\gamma + \ln 2 + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{\alpha a}}{a} + \right. \\ & + W_1(a) + \left(-\frac{e^{\alpha a}}{a} N\alpha_1 + N W_2(a)\alpha_1 \right) \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + \\ & \left. + \left[-2N\alpha_1 \left(\frac{\alpha e^{\alpha a}}{a} - \frac{e^{\alpha a}}{a^2} \right) - \frac{e^{\alpha a}}{a} N\alpha_2 + N(W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1) \right] \bar{\tau} \right\}. \end{aligned}$$

Выражение (37) позволяет (с учетом известных асимптотических критических индексов для больших N) однозначно восстановить коэффициенты соответствующих членов вильсоновского операторного разложения асимптотики малых $\bar{\tau}$ скейлинговой функции. В частности, при $n = 1$ формула (37) дает

$$\tilde{G}^{[N]}(\bar{\tau}) \simeq \frac{C_2^{[N]}}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} (0.93 + 1.30N\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 2.20N\bar{\tau}). \quad (38)$$

7. КАНОНИЧЕСКАЯ НОРМИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Разлагая скейлинговую функцию обратного парного коррелятора вплоть до членов первого порядка по аргументам, получим

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\bar{\tau}) & \simeq \frac{1}{(\bar{\tau} + 1)^2} [1 + \bar{\tau} + \dots + (\alpha^{[N]} + \beta^{[N]}\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau})g^N] = \\ & = \frac{1}{1 + \bar{\tau} + \dots - g^N(\alpha^{[N]} + \beta^{[N]}\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau})} \end{aligned}$$

при $\bar{\tau} \rightarrow 0$ и

$$\begin{aligned} \bar{G}(\bar{p}) & \simeq \frac{1}{(1 + \bar{p}^2)^2} [1 + \bar{p}^2 + \dots + g^N(A^{[N]} + B^{[N]}\bar{p}^2)] = \\ & = \frac{1}{1 + \bar{p}^2 + \dots - g^N(A^{[N]} + B^{[N]}\bar{p}^2)} \end{aligned}$$

при $\bar{p} \rightarrow 0$.

Чтобы нормировать стандартным образом [5] скейлинговую функцию в N -ом порядке ($\bar{G}(\bar{p}) = 1/(1 + \bar{p}^2)$), необходимо домножить функцию Грина на $(1 - g^N A^{[N]})$ (произвол конечной ренормировки поля), а затем растянуть $\bar{p} \rightarrow \bar{p}(1 - g^N(A^{[N]} - B^{[N]}))$ (след произвола ренормировки τ). Здесь мы уже воспользовались факториальным ростом всех коэффициентов и отобрали старшие по $1/N$ члены. В асимптотике $\bar{\tau} \rightarrow 0$ такое преобразование приведет к дополнительному множителю $(1 - g^N A^{[N]})$, а параметр $\bar{\tau}$ растянется: $\bar{\tau} \rightarrow (1 - g^N(B^{[N]} - A^{[N]}))\bar{\tau}$. В результате для нормированной скейлинговой функции $\tilde{G}_{\text{norm}}(\bar{\tau})$ получим

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} \left[\alpha^{[N]} - A^{[N]} + (\beta^{[N]} - 2A^{[N]} + B^{[N]})\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau} \right].$$

Учитывая, что $B^{[N]} \sim \alpha^{[N]} \sim A^{[N]}/N$, в старшем по N порядке липатовская асимптотика нормированной скейлинговой функции примет окончательно вид

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} \left[-A^{[N]} + (\beta^{[N]} - 2A^{[N]})\bar{\tau} + \gamma^{[N]}\bar{\tau} \ln \bar{\tau} \right]. \quad (39)$$

Здесь в соответствии с формулами (29), (37) имеем

$$\begin{aligned} A^{[N]} &= -\frac{C_2^{[N]}N}{(16\pi^2)^N} \left(\frac{2\alpha\alpha_1 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha_1 e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} \right), \\ \beta^{[N]} &= -\frac{C_2^{[N]}N}{(16\pi^2)^N} \left[\frac{2\alpha\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} - \frac{2\alpha_2 e^{\alpha a}}{a^2} + \frac{\alpha_2 e^{\alpha a}}{a} - (W_2(a)\alpha_2 + W_3(a)\alpha_1) \right], \\ \gamma^{[N]} &= \frac{C_2^{[N]}N}{(16\pi^2)^N} \left(W_2(a)\alpha_1 - \frac{\alpha_1 e^{\alpha a}}{a} \right). \end{aligned} \quad (40)$$

Так, например, при $n = 1$ решение (39), (40) принимает вид

$$\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau}) = \frac{C_2^{[N]}N}{(16\pi^2)^N} \frac{1}{(1 + \bar{\tau})^2} \left(-0.0068N + 1.30N\bar{\tau} + 2.20N\bar{\tau} \ln \bar{\tau} \right).$$

Сравнение нормированного результата $\tilde{G}_{\text{norm}}^{[N]}(\bar{\tau})$ при $N = 3$ ($n = 1$)

$$\frac{g^3}{(16\pi^2)^3} (0.019 - 6.07\bar{\tau} \ln \bar{\tau} - 5.54\bar{\tau})$$

с результатом трехпетлевого расчета [10]

$$\frac{g^3}{(16\pi^2)^3} (0.2003 - 1.1826\bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 0.7038\bar{\tau})$$

показывает³⁾, что вычисленное к настоящему моменту петлевое разложение не выходит на липатовскую асимптотику скейлинговой функции $\tilde{G}$ (как, впрочем, и разложения для критических индексов [3]).

До сих пор мы обсуждали асимптотики высоких порядков разложения по константе связи g . Теперь рассмотрим асимптотику старших порядков ϵ -разложения. Для этого подставим в ряд (37) ϵ -разложение константы связи в фиксированной точке и отберем члены порядка ϵ^N . Для заряда $u \equiv g/(16\pi^2)$ в фиксированной точке имеем [3], [5]

$$u_* = \sum_N u_*^{[N]} \epsilon^N = \frac{\epsilon}{a} - \frac{2\epsilon^2 a_2}{a^3} + \dots, \quad (41)$$

где

$$u_*^{[N]} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} -\frac{Z_g^{[N+1]}}{a^{N+1}} e^{\frac{2a_2}{a}},$$

³⁾В [10] приведено ϵ -разложение скейлинговой функции. Используемое при сравнении выражение для разложения по константе связи восстановлено по нему.

$Z_g^{[N]} = -C_4^{[N]} e^{\alpha a} / (16\pi^2)$, $a_2 = -(3n+14)/6$. Начальный отрезок ряда (37) для нормированной скейлинговой функции⁴⁾ в приближении $\bar{\tau} \rightarrow 0$ имеет вид [5]

$$\tilde{G}_{\text{norm}}(\bar{\tau}) = \frac{1}{1+\bar{\tau}} \left[1 + \bar{\tau} - u \frac{n+2}{6} \bar{\tau} \ln \bar{\tau} - \right. \\ \left. - u^2 \frac{n+2}{18} (C_0 + C_1 \bar{\tau}) - u^2 \frac{(n+2)(4-n)}{72} \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau} \right]. \quad (42)$$

Здесь члены порядка $\bar{\tau}^2$ отброшены, различные по $\bar{\tau}$ члены учтены лишь в первом нетривиальном приближении по u , $C_0 = 2.031302 \dots$, $C_1 = 0.51586 \dots$.

Подставляя в (37) значение u_* (41) и пользуясь тем, что коэффициенты всех рядов факториально растут, в N -ом порядке ϵ -разложения нормированной скейлинговой функции получаем

$$\tilde{G}'_{\text{norm}} \epsilon^N = \left\{ [\bar{A}^{[N]} - (16\pi^2)^N A^{[N]}] + [\bar{B}^{[N]} + (16\pi^2)^N \beta^{[N]} - 2(16\pi^2)^N A^{[N]}] \bar{\tau} + \right. \\ \left. + \bar{\gamma}^{[N]} \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + \bar{\delta}^{[N]} \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau} \right\} \frac{\epsilon^N}{(1+\bar{\tau})^2}, \quad (43)$$

где

$$\bar{A}^{[N]} = -\frac{n+2}{9a} u_*^{[N-1]} C_0, \quad \bar{B}^{[N]} = -\frac{n+2}{9a} u_*^{[N-1]} C_1, \\ \bar{\gamma}^{[N]} = -\frac{n+2}{6} u_*^{[N]}, \quad \bar{\delta}^{[N]} = -\frac{(n+2)(4-n)}{36a} u_*^{[N-1]},$$

коэффициенты $A^{[N]}$, $\beta^{[N]}$ даны в (40).

Сравнение (43) при $n=1$

$$\epsilon^3 (0.855 \cdot 10^{-4} - 2.002 \bar{\tau} - 0.635 \cdot 10^{-3} \bar{\tau} \ln \bar{\tau} + 0.289 \cdot 10^{-4} \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau})$$

с результатами трехпетлевого расчета [10], [5]

$$\epsilon^3 (-0.040 + 0.11 \bar{\tau} + 0.060 \bar{\tau} \ln \bar{\tau} - 0.07 \bar{\tau} \ln^2 \bar{\tau})$$

вновь указывает на значительные отклонения результатов точных вычислений от асимптотики больших N .

Мы ограничились исследованием асимптотик больших N для членов порядка $\bar{p}^2$ в $\bar{G}$ и порядка $\bar{\tau}$ в $\tilde{G}$. Расчет асимптотик следующих членов (порядка $\bar{p}^4$ и $\bar{\tau}^2$) не представляет принципиальных трудностей, но требует громоздких вычислений.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Чтобы получить в разложении (19) коэффициенты R_1 , R_2 , R_3 , диаграммы (13) раскладывались в ряд по параметру p^2/τ . Возникающие при этом логарифмические осо-

⁴⁾ Она восстановлена по данным ϵ -разложения [5].

бенности приходилось выделять явно, получавшиеся интегралы упрощались с помощью пакета “Maple”. Численные значения кратных интегралов в выражениях для R_1 , R_2 , R_3 , содержащих функции Бесселя, вычислялись методом Монте-Карло. Приведем результат:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{3}{2\pi^2} \left[\int_0^\infty dx \frac{\exp(-x^2) - x^2 K^2(x)}{x} - \pi^2 \gamma + \pi^2 \right] \simeq 0.649, \\
 R_2 &= -\frac{6}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \left(\frac{K_1(k)K_1(q)K_1(Q)}{Qqk^3} - \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^4 Q^2} + \right. \\
 &\quad + \frac{e^{-k^2-q^2}}{q^4 k^2 Q^2} - \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^2 q^2 Q^2} + 2kq \cos \theta \frac{e^{-k^2-q^2}}{k^4 q^4 Q^2} - 2kq \cos \theta \frac{e^{-k^2} K_1^2(q)}{k^4 q^2 Q^2} + \\
 &\quad \left. + \frac{1}{k^2 q^2 (k^2 + 1)(q^2 + 1)(Q^2 + 1)} \right) - \\
 &\quad - \frac{3}{2} \int_0^\infty \frac{d\alpha_1}{\alpha_1^2} \int_0^\infty d\alpha_2 e^{-\alpha_2} (1 - e^{-\alpha_1}) \ln \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2} \right) - \\
 &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{\gamma^2}{2} - \frac{\pi^2}{12} + 1 + \gamma \right) + \frac{3\gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty dq \frac{K_1^2(q)q^2 - e^{-q^2}}{q} - \\
 &\quad - \frac{2}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{1}{k^2 q^2 Q^2 (k^2 + 1)(q^2 + 1)(Q^2 + 1)} \simeq 3.32, \\
 R_3 &= -\frac{6}{\pi^3} \int_0^\infty dk k^3 \int_0^\infty dq q^3 \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \frac{3Q^2 - 1}{k^2 q^2 (k^2 + 1)(Q^2 + 1)^3} - \\
 &\quad - \frac{3\gamma}{4} + \frac{45}{8} + \frac{3}{4} \ln \pi + 1.015651206 \simeq 6.84,
 \end{aligned}$$

где

$$Q = \sqrt{k^2 + q^2 + 2(\mathbf{kq})}.$$

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-02-16783) и Конкурсного центра фундаментального естествознания Госкомвуза России (грант № Е00-3-24).

Список литературы

- [1] Л. Н. Лунатов. ЖЭТФ. 1977. Т. 72. С. 411.
- [2] E. Brezin, J. C. Le Guillou, J. Zinn-Justin. Phys. Rev. D. 1977. V. 15. P. 1544.
- [3] М. В. Комарова, М. Ю. Налимов. ТМФ. 2001. Т. 126. № 3. С. 409.
- [4] J. Zinn-Justin. Quantum Field Theory and Critical Phenomena. Oxford: Oxford Univ. Press, 1989.
- [5] А. Н. Васильев. Квантовополе́вая ренормгруппа в теории критического поведения и стохастической динамике. С-Пб.: ПИЯФ, 1998.
- [6] M. Campostrini, A. Pelissetto, P. Rossi, E. Vicari. Phys. Rev. E. 1998. V. 57. P. 184.
- [7] И. М. Суслов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 220.
- [8] И. М. Суслов. ЖЭТФ. 1997. Т. 111. С. 1896.
- [9] V. G. Makhankov. Phys. Lett. A. 1977. V. 61. P. 431.
- [10] A. J. Bray. Phys. Rev. B. 1976. V. 14. P. 1248.

Поступила в редакцию 11.III.2001 г.