Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. М. Лавров, П. Ю. Мошин, Суперполеное квантование в $Sp(2)$ -ковариантном формализме, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 403–414

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf545>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 14:20:17

© 2001 г.

П. М. Лавров*, П. Ю. Мошин*

СУПЕРПОЛЕВОЕ КВАНТОВАНИЕ В $Sp(2)$ -КОВАРИАНТНОМ ФОРМАЛИЗМЕ

Обобщены правила суперполевого $Sp(2)$ -ковариантного квантования произвольных калибровочных теорий на случай введения калибровки с помощью производящих уравнений для калибровочного функционала. Рассмотрены возможные реализации расширенных антискобок и показано, что лишь одна из реализаций совместима с преобразованиями расширенной БРСТ-симметрии в форме супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства.

1. ВВЕДЕНИЕ

Реализация принципа расширенной БРСТ-симметрии, объединяющей преобразования БРСТ- и анти-БРСТ-симметрий (см. соответственно [1] и [2]), естественным образом приводит к объединению переменных, параметризующих калибровку в функциональном интеграле, и переменных, входящих в квантовое действие, определяемое соответствующими производящими уравнениями. В основном это проявляется в расширении конфигурационного пространства квантового действия за счет добавления переменных вспомогательного (калибровочного) сектора (см., например, [3], [4]). В недавних работах [5], [6] концепция производящих уравнений обобщается на случай введения калибровки.

В рамках $Sp(2)$ -ковариантного подхода [3] реализуется расширенная БРСТ-симметрия для калибровочных теорий общего вида. При этом переменные ϕ^A полного конфигурационного пространства [7] объединяются в неприводимые представления группы $Sp(2)$. Эти представления образуют полностью симметричные $Sp(2)$ -тензоры и входят в квантовую теорию равноправно как в терминах квантового действия, так и в терминах введения калибровки.

Суперполевая форма [4] правил $Sp(2)$ -ковариантного квантования [3] позволяет объединить все переменные подхода [3], а именно: поля и антиполя ($\phi^A, \phi_{Aa}^*, \bar{\phi}_A$), входящие в квантовое действие, лагранжевы множители (π^{Aa}, λ^A), служащие для параметризации калибровки, и, наконец, источники J_A для полей ϕ^A — в суперполя $\Phi^A(\theta)$ и суперисточники $\bar{\Phi}_A(\theta)$, определенные на суперпространстве с двумя антикоммутирующими коор-

*Томский государственный педагогический университет, Томск, Россия.
E-mail: lavrov@tspu.edu.ru

динатами θ^a . Квантовое действие теории [4] определяется как функционал суперполей и суперисточников, $S = S(\Phi, \bar{\Phi})$, что позволяет реализовать преобразования расширенной БРСТ-симметрии в форме супертрансляций вдоль грассмановых координат.

В рамках триплектического (полностью антиканонического) формализма в работе [5] предложена модификация $Sp(2)$ -ковариантного подхода [3], основанная на другом расширении конфигурационного пространства квантовой теории. Именно, лагранжины множители π^{Aa} рассматриваются как переменные, антиканонически сопряженные антиполям $\bar{\phi}_A$ при соответствующем переопределении (см. [5]) расширенных антискобок [3], возникающих в производящих уравнениях. Другая особенность триплектического формализма [5] состоит в том, что слагаемое фиксации калибровки X в функциональном интеграле (калибровочный бозон) определяется системой производящих уравнений, аналогичных уравнениям для квантового действия S .

В рамках модифицированного триплектического формализма [6] предлагается видоизменить системы производящих уравнений [5] для квантового действия S и калибровочного бозона X , а также переопределить вакуумный функционал, с тем чтобы обеспечить граничное условие для квантового действия, гарантирующее, что квантовое действие S сводится к классическому действию S_0 при обращении в ноль антиполей и квантовых поправок,

$$S|_{\phi^*=\bar{\phi}=\hbar=0} = S_0,$$

откуда следует, что классическое действие теории удовлетворяет производящим уравнениям для квантового действия

$$\frac{1}{2}(S, S)^a + V^a S = i\hbar \Delta^a S. \quad (1)$$

При этом система производящих уравнений для действия фиксации калибровки, калибровочного бозона X , имеет вид

$$\frac{1}{2}(X, X)^a - U^a X = i\hbar \Delta^a X. \quad (2)$$

Системы производящих уравнений (1), (2) выражаются в терминах расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ и дублетов фермионных операторов Δ^a , V^a , U^a . Расширенные антискобки $(\cdot, \cdot)^a$ и дублет операторов Δ^a совпадают с соответствующими объектами как исходного триплектического [5], так и суперполевого [4] метода, а их алгебраические свойства идентичны свойствам расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ и операторов Δ^a , вводимых в $Sp(2)$ -ковариантном формализме [3].

Как отмечено в [6], операторы V^a , U^a , возникающие в производящих уравнениях (1), (2) модифицированного триплектического формализма, оказываются тесно связанными с операторами, введенными ранее в рамках суперполевого подхода [4] и имеющими геометрический смысл генераторов супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства.

Вакуумный функционал Z в рамках модифицированного триплектического формализма [6] имеет вид

$$Z = \int d\phi d\phi^* d\pi d\bar{\phi} d\lambda \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S + X + \phi_{Aa}^* \pi^{Aa}) \right\}. \quad (3)$$

Подынтегральное выражение в (3) инвариантно относительно преобразований

$$\delta\Gamma = \mu_a(V^a + U^a)\Gamma + (\Gamma, X - S)^a\mu_a, \quad (4)$$

где μ_a – дублет постоянных антикоммутирующих параметров, а Γ обозначает набор переменных $(\phi^A, \phi_{Aa}^*, \pi^{Aa}, \bar{\phi}_A)$, причем $S = S(\Gamma)$, $X = X(\Gamma, \lambda)$. Преобразования (4) играют роль преобразований расширенной БРСТ-симметрии и позволяют установить независимость вакуумного функционала от выбора решений производящих уравнений (2) для калибровочного бозона X , что в соответствии с теоремой эквивалентности [8], [9] означает калибровочную независимость S -матрицы.

В настоящей работе рассматриваются возможности суперполевого реализации расширенной БРСТ-симметрии для калибровочных теорий общего вида при введении калибровки с помощью производящих уравнений для калибровочного функционала.

Отметим, что суперполевым формализм, основанный на расширенной БРСТ-симметрии, допускает различные возможности построения объектов с алгебраическими свойствами расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ и дублета операторов Δ^a . Так, в недавней работе [10] была предложена суперполевая форма правил $osp(1, 2)$ -ковариантного квантования [11] и, в частности, найдена суперполевая реализация исходных расширенных антискобок и операторов Δ^a , введенных в рамках $Sp(2)$ -ковариантного подхода [3].

В данной работе предлагается обобщение правил суперполевого $Sp(2)$ -ковариантного квантования [4], построенное по аналогии с модифицированным триплектическим формализмом [6] и учитывающее возможный произвол в конкретной реализации основных объектов метода. Так, мы постулируем производящие уравнения для суперполевого квантового действия $S(\Phi, \bar{\Phi})$ и калибровочного функционала $X(\Phi, \bar{\Phi})$ в виде, аналогичном (1), (2), т.е. выраженном в терминах расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ и операторов Δ^a, U^a, V^a . В то время как явный вид операторов U^a и V^a задается их интерпретацией как генераторов супертрансляций, остается произвол в построении расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ и операторов Δ^a с данными алгебраическими свойствами [4].

В этой связи нами рассмотрены допустимые суперполевые реализации этих объектов и показано, что они фактически сводятся к двум возможностям, причем компонентный вид этих реализаций в одном случае совпадает с расширенными антискобками и операторами Δ^a исходного $Sp(2)$ -ковариантного формализма [3], а в другом случае – с их аналогами в рамках триплектического подхода [5], [6]. Определяя вакуумный функционал как непосредственное (в смысле (3)) обобщение вакуумного функционала [4], мы показываем, что только одна из двух возможностей реализации объектов $(\cdot, \cdot)^a$ и Δ^a , а именно применяемая в рамках триплектического подхода [5], [6], совместима с требованием расширенной БРСТ-симметрии. БРСТ-симметрия рассматривается в данном случае как обобщение преобразований (4) в виде преобразований суперполей $\Phi^A(\theta)$ и суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$, связанных с супертрансляциями и антиканоническими преобразованиями, генерируемыми расширенными антискобками $(\cdot, \cdot)^a$.

Мы показываем, что возникающие правила квантования, с одной стороны, представляют собой суперполевою форму модифицированного триплектического подхода [6], а с

другой стороны, содержат суперполевым $Sp(2)$ -ковариантный формализм [4] как частный случай выбора решений для калибровочного функционала X .

Статья организована следующим образом. В разделе 2 обобщаются правила квантования [4], вводятся основные объекты $U^a, V^a, \Delta^a, (\cdot, \cdot)^a$ с алгебраическими свойствами [4] и дается их явная реализация. В разделе 3 определяется выбор Δ^a и $(\cdot, \cdot)^a$, совместимый с постулированной формой расширенной БРСТ-симметрии. В разделе 4 обсуждается связь развиваемого суперполевого подхода с методами [4], [6].

В работе используются “конденсированные” обозначения [12] и соглашения, принятые в [4], [6]. В частности, грассмановы координаты θ^a образуют $Sp(2)$ -дублет. Поднятие и опускание $Sp(2)$ -индексов производится по правилу $\theta^a = \varepsilon^{ab}\theta_b$, $\theta_a = \varepsilon_{ab}\theta^b$ с помощью постоянного антисимметричного тензора ε^{ab} , $\varepsilon^{12} = 1$. Для любой функции $f(\theta)$ справедливо компонентное представление

$$f(\theta) = f_0 + \theta^a f_a + \theta^2 f_3, \quad \theta^2 \equiv \frac{1}{2}\theta_a \theta^a,$$

и интегральное представление

$$f(\theta) = \int d^2\theta' \delta(\theta' - \theta) f(\theta'), \quad \delta(\theta' - \theta) = (\theta' - \theta)^2,$$

где интегрирование по θ^a осуществляется по правилу

$$\int d^2\theta = 0, \quad \int d^2\theta \theta^a = 0, \quad \int d^2\theta \theta^a \theta^b = \varepsilon^{ab}.$$

При этом для любой функции $f(\theta)$ имеет место равенство

$$\int d^2\theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta^a} = 0,$$

откуда следует правило интегрирования по частям

$$\int d^2\theta \frac{\partial f(\theta)}{\partial \theta^a} g(\theta) = - \int d^2\theta (-1)^{\varepsilon(f)} f(\theta) \frac{\partial g(\theta)}{\partial \theta^a},$$

где производные по θ^a понимаются как левые.

2. ОБОБЩЕННЫЙ $Sp(2)$ -КОВАРИАНТНЫЙ СУПЕРПОЛЕВОЙ ФОРМАЛИЗМ

Рассмотрим обобщение $Sp(2)$ -ковариантного суперполевого формализма [4], построенное как аналог модифицированного триплектического подхода [6]. С этой целью введем суперпространство (x^μ, θ^a) , где x^μ – координаты пространства-времени, а θ^a – дублет антикоммутирующих координат. Рассмотрим набор суперполей $\Phi^A(\theta)$, $\varepsilon(\Phi^A) = \varepsilon_A$, с граничным условием

$$\Phi^A(\theta)|_{\theta=0} = \phi^A$$

и набор суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$ той же грассмановой четности, $\varepsilon(\bar{\Phi}_A) = \varepsilon_A$.

Определим вакуумный функционал Z в виде следующего функционального интеграла:

$$Z = \int d\Phi d\bar{\Phi} \rho(\bar{\Phi}) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S(\Phi, \bar{\Phi}) + X(\Phi, \bar{\Phi}) + \bar{\Phi}\Phi) \right\}, \quad (5)$$

где $S = S(\Phi, \bar{\Phi})$ – квантовое действие, удовлетворяющее производящим уравнениям

$$\bar{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar} S} = 0, \quad (6)$$

а $X = X(\Phi, \bar{\Phi})$ – бозонный калибровочный функционал, удовлетворяющий уравнениям

$$\tilde{\Delta}^a e^{\frac{i}{\hbar} X} = 0. \quad (7)$$

В (5), кроме того, используется обозначение для функционала $\rho(\bar{\Phi})$, определяющего вес интегрирования по суперисточникам $\bar{\Phi}_A(\theta)$ и имеющего вид функциональной δ -функции:

$$\rho(\bar{\Phi}) = \delta \left(\int d^2\theta \bar{\Phi}(\theta) \right), \quad (8)$$

а также вводится функционал

$$\bar{\Phi}\Phi \equiv \int d^2\theta \bar{\Phi}_A(\theta) \Phi^A(\theta). \quad (9)$$

В (6), (7) использованы обозначения $\bar{\Delta}^a$, $\tilde{\Delta}^a$ для дублетов фермионных операторов:

$$\bar{\Delta}^a = \Delta^a + \frac{i}{\hbar} V^a, \quad \tilde{\Delta}^a = \Delta^a - \frac{i}{\hbar} U^a, \quad (10)$$

где U^a , V^a – дифференциальные операторы первого порядка, обладающие свойствами нильпотентности и антикоммутируемости:

$$U^{\{a} U^{b\}} = 0, \quad V^{\{a} V^{b\}} = 0, \quad V^a U^b + U^b V^a = 0, \quad (11)$$

а Δ^a – дублет дифференциальных операторов второго порядка, подчиненный соотношениям

$$\begin{aligned} \Delta^{\{a} \Delta^{b\}} &= 0, \\ \Delta^{\{a} V^{b\}} + V^{\{a} \Delta^{b\}} &= 0, \\ \Delta^{\{a} U^{b\}} + U^{\{a} \Delta^{b\}} &= 0. \end{aligned} \quad (12)$$

В (11), (12) введена симметризация по $Sp(2)$ -индексам: $A^{\{a} B^{b\}} = A^a B^b + A^b B^a$.

Отметим, что соотношения (11), (12) для произвольных линейно-независимых фермионных дублетов U^a , V^a , Δ^a определяют набор¹⁾ нильпотентных супералгебр Ли $\mathcal{G}$ размерности $6 \leq \dim \mathcal{G} \leq 8$.

¹⁾ Данный набор состоит из одной шестимерной, трех (изоморфных) семимерных и одной восьмимерной супералгебр Ли.

С учетом обозначений (10) производящие уравнения (6), (7) представимы в эквивалентной форме:

$$\frac{1}{2}(S, S)^a + V^a S = i\hbar \Delta^a S, \quad (13)$$

$$\frac{1}{2}(X, X)^a - U^a X = i\hbar \Delta^a X, \quad (14)$$

где $(\cdot, \cdot)^a$ обозначает расширенные антискобки, определяемые действием дублета операторов Δ^a на произведение любых двух функционалов F, G :

$$\Delta^a (F \cdot G) = (\Delta^a F) \cdot G + F \cdot (\Delta^a G) (-1)^{\varepsilon(F)} + (F, G)^a (-1)^{\varepsilon(F)}. \quad (15)$$

Расширенные антискобки обладают следующими свойствами:

$$\varepsilon((F, G)^a) = \varepsilon(F) + \varepsilon(G) + 1,$$

$$(F, G)^a = -(-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)} (G, F)^a,$$

$$D^{\{a} (F, G)^{b\}} = (D^{\{a} F, G)^{b\}} - (F, D^{\{a} G)^{b\}} (-1)^{\varepsilon(F)}, \quad (16)$$

$$(F, GH)^a = (F, G)^a H + (F, H)^a G (-1)^{\varepsilon(G)\varepsilon(H)}, \quad (17)$$

$$((F, G)^{\{a}, H)^{b\}} (-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(H)+1)} + \text{цикл. перестановка } (F, G, H) \equiv 0, \quad (18)$$

где $D^a = (\Delta^a, U^a, V^a)$.

Отметим, что свойство (16) вытекает непосредственно из определения (15) и алгебраических свойств (12), в то время как (17) следует из требования, что операторы Δ^a в (15) являются дифференциальными операторами второго порядка. А обобщенное тождество Якоби (18) вытекает из (12), (15)–(17).

В силу соотношений (11), (12), (16) операторы $\bar{\Delta}^a, \tilde{\Delta}^a$, определенные в (10), обладают свойствами

$$\bar{\Delta}^{\{a} \bar{\Delta}^{b\}} = 0, \quad \tilde{\Delta}^{\{a} \tilde{\Delta}^{b\}} = 0, \quad \bar{\Delta}^{\{a} \tilde{\Delta}^{b\}} + \tilde{\Delta}^{\{a} \bar{\Delta}^{b\}} = 0,$$

а также

$$\bar{\Delta}^{\{a} (F, G)^{b\}} = (\bar{\Delta}^{\{a} F, G)^{b\}} - (F, \bar{\Delta}^{\{a} G)^{b\}} (-1)^{\varepsilon(F)},$$

$$\tilde{\Delta}^{\{a} (F, G)^{b\}} = (\tilde{\Delta}^{\{a} F, G)^{b\}} - (F, \tilde{\Delta}^{\{a} G)^{b\}} (-1)^{\varepsilon(F)}.$$

Для явной реализации производящих уравнений (6), (7), или эквивалентно (13), (14), отождествим операторы U^a, V^a с генераторами преобразования суперполей и суперисточников, связанных с супертрансляциями $\theta^a \rightarrow \theta^a + \mu^a$ вдоль антикоммутирующих координат:

$$\delta \Phi^A(\theta) = \mu_a \frac{\partial \Phi^A(\theta)}{\partial \theta_a} = \mu_a U^a \Phi^A(\theta),$$

$$\delta \bar{\Phi}_A(\theta) = \mu_a \frac{\partial \bar{\Phi}_A(\theta)}{\partial \theta_a} = \mu_a V^a \bar{\Phi}_A(\theta).$$

Генераторы U^a , V^a являются дифференциальными операторами первого порядка, имеющими вид θ -локальных функционалов

$$\begin{aligned} U^a &= \int d^2\theta \frac{\partial \Phi^A(\theta)}{\partial \theta_a} \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)}, \\ V^a &= \int d^2\theta \frac{\partial \bar{\Phi}_A(\theta)}{\partial \theta_a} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\delta_l \Phi^A(\theta)}{\delta \Phi^B(\theta')} &= \delta(\theta' - \theta) \delta_B^A = \frac{\delta \Phi^A(\theta)}{\delta \Phi^B(\theta')}, \\ \frac{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}{\delta \bar{\Phi}_B(\theta')} &= \delta(\theta' - \theta) \delta_A^B. \end{aligned}$$

Из явного вида (19) следуют требуемые алгебраические свойства (11).

Задание операторов U^a , V^a не позволяет однозначно определить явный вид $Sp(2)$ -дублета операторов Δ^a и расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$, возникающих в производящих уравнениях (13), (14).

Рассмотрим множество фермионных дифференциальных операторов второго порядка (на пространстве суперполей и суперисточников) таких, что зависимость от компонент переменных $\Phi^A(\theta)$ и $\bar{\Phi}_A(\theta)$ входит только через производные

$$\frac{\delta}{\delta \Phi^A(\theta)}, \quad \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}. \quad (20)$$

В выделенном множестве содержится всего четыре линейно-независимых $Sp(2)$ -дублета, имеющих вид θ -локальных операторных функционалов. Возможные подынтегральные выражения строятся из функциональных производных (20) и различных комбинаций θ^a и $\partial/\partial\theta^a$. Отметим, что анализ таких комбинаций упрощается благодаря интегрированию по частям и использованию антикоммутиационного соотношения $\{\theta^a, \partial/\partial\theta^b\} = \delta_b^a$. В рассматриваемом множестве операторов содержится только два линейно-независимых $Sp(2)$ -дублета, имеющих вид θ -локальных функционалов и обладающих алгебраическими свойствами (12) операторов Δ^a . В силу дополнительного свойства взаимной антикоммутативности, эти операторы образуют двумерное линейное пространство операторов, обладающих свойствами Δ^a . Базисные элементы Δ_1^a , Δ_2^a этого пространства могут быть выбраны в виде

$$\Delta_1^a = - \int d^2\theta \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_a} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)}, \quad (21)$$

$$\Delta_2^a = \int d^2\theta \frac{\delta_l}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left(\theta^a \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)} \right), \quad (22)$$

где

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \equiv \frac{1}{2} \varepsilon^{ab} \frac{\partial}{\partial \theta^b} \frac{\partial}{\partial \theta^a}.$$

Операторы (21) и (22) генерируют соответствующие расширенные антискобки

$$(F, G)_1^a = \int d^2\theta \left\{ \frac{\delta F}{\delta \Phi^A(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta_a} \frac{\delta G}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A+1} - (F \leftrightarrow G) (-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)} \right\} \quad (23)$$

и

$$(F, G)_2^a = \int d^2\theta \left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\delta F}{\delta \Phi^A(\theta)} \right) \theta^a \frac{\delta G}{\delta \bar{\Phi}_A(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A} - (F \leftrightarrow G) (-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)} \right\}. \quad (24)$$

Выбор операторов Δ^a и антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ в виде (21), (23) совпадает с представлением, использованным в [4], а их выбор в виде (22), (24) был сделан в работе [10].

Отметим, что представлениям (21), (22) соответствуют две разные, но изоморфные супералгебры Ли, определяемые всем набором соотношений (11), (12) для операторов U^a, V^a, Δ^a . Действительно, в каждом из случаев (21), (22) выбора дублета операторов Δ^a возникает супералгебра с базисными элементами U^a, V^a, Δ^a, B , где B – бозонный базисный элемент

$$B = \int d^2\theta \frac{\delta_l}{\delta \Phi(\theta)} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \frac{\delta}{\delta \bar{\Phi}(\theta)} (-1)^{\varepsilon_A}.$$

При этом супералгебра, соответствующая случаю (21), определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \{U^a, U^b\} &= \{V^a, V^b\} = \{\Delta^a, \Delta^b\} = \{U^a, V^b\} = 0, \\ [U^a, B] &= [V^a, B] = [\Delta^a, B] = [B, B] = 0, \\ \{U^a, \Delta^b\} &= -\{V^a, \Delta^b\} = \varepsilon^{ab} B, \end{aligned} \quad (25)$$

а в случае (22) соотношения для супералгебры имеют вид

$$\begin{aligned} \{U^a, U^b\} &= \{V^a, V^b\} = \{\Delta^a, \Delta^b\} = \{U^a, V^b\} = \{U^a, \Delta^b\} = 0, \\ [U^a, B] &= [V^a, B] = [\Delta^a, B] = [B, B] = 0, \\ \{V^a, \Delta^b\} &= -\varepsilon^{ab} B. \end{aligned} \quad (26)$$

Для установления изоморфизма супералгебры, заданной соотношениями для базисных элементов (25), супералгебре, определяемой с помощью (26), достаточно перейти к базису $U'^a, V'^a, \Delta'^a, B'$, где $U'^a = U^a + V^a$, $V'^a = V^a$, $\Delta'^a = \Delta^a$, $B' = B$.

3. РАСШИРЕННАЯ БРСТ-СИММЕТРИЯ

Определим преобразования расширенной БРСТ-симметрии как следующие преобразования глобальной сурперсимметрии:

$$\begin{aligned} \delta \Phi^A(\theta) &= \mu_a U^a \Phi^A(\theta) + (\Phi^A(\theta), X - S)^a \mu_a, \\ \delta \bar{\Phi}_A(\theta) &= \mu_a V^a \bar{\Phi}_A(\theta) + (\bar{\Phi}_A(\theta), X - S)^a \mu_a. \end{aligned} \quad (27)$$

Преобразования (27) являются непосредственным обобщением преобразований (4), введенных в рамках модифицированного триплектического подхода [6].

Отметим, что до введения преобразований (27) явная реализация расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$ в виде (23) не дает очевидного преимущества перед другим выбором (24). Покажем, однако, что лишь одна из двух возможностей, а именно (23), действительно удовлетворяет сформулированному требованию расширенной БРСТ-симметрии (27).

Рассмотрим вариацию подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований (27). Для рассмотрения вариации экспоненты в (5) отметим, что вариация произвольного функционала F при преобразованиях

$$\delta_{(1)}\Phi^A(\theta) = \mu_a U^a \Phi^A(\theta), \quad \delta_{(1)}\bar{\Phi}_A(\theta) = \mu_a V^a \bar{\Phi}_A(\theta),$$

связанных с супертрансляциями, имеет вид

$$\delta_{(1)}F = \mu_a (U^a + V^a)F.$$

В частности, для функционала $\bar{\Phi}\Phi$ (9) имеет место равенство

$$\delta_{(1)}(\bar{\Phi}\Phi) = 0.$$

С другой стороны, в обоих случаях (23), (24) явной реализации расширенных антискобок антиканонические преобразования

$$\delta_{(2)}\Phi^A(\theta) = (\Phi^A(\theta), Y)^a \mu_a, \quad \delta_{(2)}\bar{\Phi}_A(\theta) = (\bar{\Phi}_A(\theta), Y)^a \mu_a, \quad \varepsilon(Y) = 0$$

генерируют соответствующие преобразования произвольного функционала F :

$$\delta_{(2)}F = (F, Y)^a \mu_a.$$

В результате получим следующую вариацию показателя экспоненты из (5) относительно преобразований (27) с $\delta = \delta_{(1)} + \delta_{(2)}$:

$$\delta(S + X + \bar{\Phi}\Phi) = \mu_a ((S, S)^a - (X, X)^a + (U^a + V^a)(S + X)) + \mu_a (\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a. \quad (28)$$

Для рассмотрения вариации меры интегрирования в (5) заметим, что в обоих случаях (23), (24) реализации антискобок весовой функционал $\rho(\bar{\Phi})$ инвариантен относительно преобразований (27), $\delta\rho(\bar{\Phi}) = 0$, а соответствующий якобиан J принимает значение

$$J = e^{2\mu_a \Delta^a S - 2\mu_a \Delta^a X}. \quad (29)$$

Обозначим через I подынтегральное выражение в (5). Тогда в силу (13), (14), (28), (29) вариация δI относительно преобразований (27) имеет вид

$$\delta I = i\hbar^{-1} \mu_a I ((U^a - V^a)(S - X) + (\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a), \quad (30)$$

откуда следует условие инвариантности подынтегрального выражения:

$$(U^a - V^a)(S - X) + (\bar{\Phi}\Phi, S - X)^a = 0. \quad (31)$$

Выполнение условия (31), очевидно, зависит от конкретной реализации расширенных антискобок. В случае антискобок (23) данное условие удовлетворяется в силу тождества

$$(\bar{\Phi}\Phi, F)^a = (V^a - U^a)F,$$

которое согласно (30) означает инвариантность подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований (27).

С другой стороны, в случае расширенных антискобок (24)

$$(\bar{\Phi}\Phi, F)^a \neq (V^a - U^a)F,$$

откуда следует, что уравнение (31) не выполняется тождественно, и, следовательно, подынтегральное выражение неинвариантно относительно преобразований (27) без наложения дополнительных ограничений на оба функционала S, X .

По аналогии с доказательством, данным в рамках модифицированного триплектического подхода [6], нетрудно установить, что реализация расширенных антискобок в виде (23) гарантирует калибровочную независимость S -матрицы.

Данное утверждение вытекает из независимости вакуумного функционала от выбора частных решений для калибровочного функционала X . Для доказательства последнего следует учесть производящие уравнения (6), (7), а также тот факт, что явный вид антискобок (23) обеспечивает инвариантность подынтегрального выражения в (5) относительно преобразований расширенной БРСТ-симметрии (27).

4. ОБСУЖДЕНИЕ

В настоящей работе предложено обобщение суперполевого $Sp(2)$ -ковариантного квантования [4] произвольных калибровочных теорий на случай введения калибровки. Обобщение основано на концепции производящих уравнений (6), (7) для калибровочного функционала, реализованной ранее в рамках полностью антиканонического подхода [5], [6]. Указано, что возможности явной реализации формализма в терминах фермионных операторов Δ^a и расширенных антискобок $(\cdot, \cdot)^a$, обладающих заданными алгебраическими свойствами [4], сводятся к двум различным случаям (см. [4], [10]). Установлено, что лишь одна из двух возможностей, а именно [4], совместима с требованием расширенной БРСТ-симметрии (27), реализованной в терминах супертрансляций вдоль грассмановых координат суперпространства. Отмечено, что требуемая форма преобразований симметрии обеспечивает калибровочную инвариантность S -матрицы.

С одной стороны, правила квантования, основанные на реализации [4] операторов Δ^a и расширенных антискобок, содержат суперполевым $Sp(2)$ -ковариантный формализм [4] как частный случай фиксации калибровки, т.к. всякий функционал

$$X(\Phi) = \frac{1}{2}\varepsilon_{ab}U^aU^bF(\Phi),$$

параметризованный произвольным бозоном $F = F(\Phi)$, является решением производящих уравнений (14). Именно такая форма калибровочного функционала была использована в работе [4].

С другой стороны, развиваемый метод в рамках обсуждаемой в статье [4] реализации расширенных антискобок может рассматриваться как суперполевая форма модифицированного триплектического квантования, предложенного в работе [6]. Действительно, рассмотрим компонентное представление суперполей $\Phi^A(\theta)$ и суперисточников $\bar{\Phi}_A(\theta)$:

$$\begin{aligned}\Phi^A(\theta) &= \phi^A + \pi^{Aa}\theta_a + \frac{1}{2}\lambda^A\theta_a\theta^a, \\ \bar{\Phi}_A(\theta) &= \bar{\phi}_A - \theta^a\phi_{Aa}^* - \frac{1}{2}\theta_a\theta^a J_A.\end{aligned}$$

Набор переменных $\phi^A, \pi^{Aa}, \lambda^A, \phi_{Aa}^*, \bar{\phi}_A, J_A$ совпадает с наборами переменных, которые использовались при построении $Sp(2)$ -ковариантной [3], триплектической [5] и модифицированной триплектической [6] схем квантования.

Обозначим $F(\Phi, \bar{\Phi}) \equiv \tilde{F}(\phi, \pi, \lambda, \bar{\phi}, \phi^*, J)$. Тогда компонентное представление расширенных антискобок (23)

$$(F, G)^a = \frac{\delta \tilde{F}}{\delta \phi^A} \frac{\delta \tilde{G}}{\delta \phi_{Aa}^*} + \varepsilon^{ab} \frac{\delta \tilde{F}}{\delta \pi^{Ab}} \frac{\delta \tilde{G}}{\delta \bar{\phi}_A} - (\tilde{F} \leftrightarrow \tilde{G}) (-1)^{(\varepsilon(F)+1)(\varepsilon(G)+1)}$$

и операторов Δ^a (21)

$$\Delta^a = (-1)^{\varepsilon_A} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A} \frac{\delta}{\delta \phi_{Aa}^*} + (-1)^{\varepsilon_A+1} \varepsilon^{ab} \frac{\delta_l}{\delta \pi^{Ab}} \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_A}$$

совпадает с соответствующими объектами, использованными в работах [5], [6].

Мера интегрирования (5)

$$d\Phi d\bar{\Phi} \rho(\bar{\Phi}) = d\phi d\phi^* d\pi d\bar{\phi} d\lambda dJ \delta(J)$$

и компонентное представление операторов V^a (19)

$$V^a = \varepsilon^{ab} \phi_{Ab}^* \frac{\delta}{\delta \bar{\phi}_A} - J_A \frac{\delta}{\delta \phi_{Aa}^*}$$

позволяют утверждать, что при $J_A = 0$ производящие уравнения (13) для действия $\bar{S} = S|_{J=0}$ совпадают по форме с выражениями, использованными в работе [6] при формулировке модифицированных правил триплектического квантования. Что касается уравнений (14) для определения калибровочного функционала X , заметим прежде всего, что операторы U^a , записанные в виде (19) и имеющие компонентное представление

$$U^a = (-1)^{\varepsilon_A} \varepsilon^{ab} \lambda^A \frac{\delta_l}{\delta \pi^{Ab}} - (-1)^{\varepsilon_A} \pi^{Aa} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A},$$

при $\lambda^A = 0$ совпадают с операторами U^a ,

$$U^a = -(-1)^{\varepsilon_A} \pi^{Aa} \frac{\delta_l}{\delta \phi^A}, \quad (32)$$

использованными в [6] при формулировке производящих уравнений для калибровочного бозона. Далее, учтем, что функционал $\bar{\Phi}\Phi$ в (9) имеет вид

$$\bar{\Phi}\Phi = \bar{\phi}_A \lambda^A + \phi_{Aa}^* \pi^{Aa} - J_A \phi^A.$$

Нетрудно показать, что производящие уравнения для функционала $\bar{X} = X + \bar{\phi}_A \lambda^A$ имеют вид уравнений (14) с операторами U^a (32), т.е. вид производящих уравнений метода модифицированного триплектического квантования, а тогда вакуумный функционал

$$Z = \int d\phi d\phi^* d\pi d\bar{\phi} d\lambda \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (\bar{S}(\phi, \pi, \phi^*, \bar{\phi}) + \bar{X}(\phi, \pi, \phi^*, \bar{\phi}, \lambda) + \phi_{Aa}^* \pi^{Aa}) \right\}$$

представляет собой использованный в [6] функционал (3), ограниченный на случай, когда действие $\bar{S}$ не содержит зависимости от переменных λ^A .

Благодарности. Работа частично поддержана грантом Министерства общего и профессионального образования в области фундаментального естествознания, грант № E00-3.3-461, и грантом РФФИ № 99-02-16617. Работа П.М.Л. также частично поддерживается грантами INTAS № 99-0590 и РФФИ–DFG № 99-02-04022.

Список литературы

- [1] *C. Becchi, A. Rouet, R. Stora.* Phys. Lett. B. 1974. V. 25. P. 344; Commun. Math. Phys. 1975. V. 42. P. 127; *И. В. Тютин.* Калибровочная инвариантность в теории поля и статистической физике в операторном формализме. Препринт № 35. М.: ФИАН, 1975.
- [2] *G. Curci, R. Ferrari.* Phys. Lett. B. 1976. V. 63. P. 91; *I. Ojima.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1979. V. 64. P. 625.
- [3] *I. A. Batalin, P. M. Lavrov, I. V. Tyutin.* J. Math. Phys. 1990. V. 31. P. 1487; 1991. V. 32. P. 532; 1991. V. 32. P. 2513.
- [4] *П. М. Лавров.* ТМФ. 1996. Т. 107. С. 229.
- [5] *I. A. Batalin, R. Marnelius.* Phys. Lett. B. 1995. V. 350. P. 44; Nucl. Phys. B. 1996. V. 465. P. 521; *I. A. Batalin, R. Marnelius, A. M. Semikhatov.* Nucl. Phys. B. 1995. V. 446. P. 249.
- [6] *Б. Гейер, Д. М. Гутман, П. М. Лавров.* ТМФ. 2000. Т. 123. С. 476.
- [7] *I. A. Batalin, G. A. Vilkovisky.* Phys. Lett. B. 1981. V. 102. P. 27; Phys. Rev. D. 1983. V. 28. P. 2567.
- [8] *Р. Е. Каллош, И. В. Тютин.* ЯФ. 1973. Т. 17. С. 190.
- [9] *I. V. Tyutin.* Once again on the equivalence theorem. hep-th/0001050.
- [10] *B. Geyer, D. Mülsch.* J. Math. Phys. 2000. V. 41. P. 7304.
- [11] *B. Geyer, P. M. Lavrov, D. Mülsch.* J. Math. Phys. 1999. V. 40. P. 674; 1999. V. 40. P. 6189.
- [12] *Б. Девитт.* Динамическая теория групп и полей. М.: Мир, 1987.

Поступила в редакцию 19.III.2001 г.