Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Н. Лакаев, С. М. Саматов, О конечности дискретного спектра гамильтониана системы трех произвольных частиц на решетке, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 415–431

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf546>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 16:36:19

О КОНЕЧНОСТИ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ГАМИЛЬТониАНА СИСТЕМЫ ТРЕХ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ЧАСТИЦ НА РЕШЕТКЕ

Для гамильтониана системы трех произвольных частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, доказана конечность числа связанных состояний в случаях, когда: 1) ни одна двухчастичная подсистема не имеет виртуального уровня, 2) только одна двухчастичная подсистема имеет виртуальный уровень.

1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что при некоторых естественных предположениях оператор Шредингера H системы трех попарно взаимодействующих частиц в непрерывном пространстве имеет существенный спектр, совпадающий с полуосью $[\kappa, \infty)$, где $\kappa \leq 0$. В работах [1] и [2] доказано, что при $\kappa < 0$ и достаточно быстром убывании потенциалов взаимодействия в координатном представлении дискретный спектр оператора H является конечным. Изучению случая $\kappa = 0$ посвящены работы [3]–[6], в которых было установлено, что (даже при финитных взаимодействиях между частицами) дискретный спектр оператора H может быть бесконечным. При этом вопрос о бесконечности указанного спектра был связан с наличием так называемых виртуальных уровней в начале непрерывных спектров операторов h_α , $\alpha = 1, 2, 3$, описывающих различные подсистемы из двух частиц. В работе [3] показано, что дискретный спектр оператора H должен быть бесконечен, если виртуальные уровни имеют три или два оператора h_α . Впервые на такой эффект обратил внимание Ефимов [7]. Доказательство конечности дискретного спектра оператора H в случае, если виртуальный уровень имеет только один оператор h_α или виртуальные уровни у операторов h_α отсутствуют, можно найти в работе [8]. Конечность дискретного спектра n -частичных систем, $n \geq 3$, при наличии виртуальных уровней у некоторых двухчастичных подсистем доказана в работе [9].

Что же касается дискретного оператора Шредингера, являющегося решеточным аналогом обычного оператора Шредингера в непрерывном пространстве, то для него также имеет место эффект Ефимова [10]–[12]. Существование бесконечного числа связанных

* Самаркандский государственный университет, Самарканд, Узбекистан

состояний с собственными значениями, лежащими левее существенного спектра, для гамильтонианов систем трех произвольных и трех одинаковых частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения, доказано в работах [12], [13].

В этой статье методы работы [8] были использованы для гамильтониана системы трех произвольных частиц на трехмерной решетке, взаимодействующих с помощью парных контактных потенциалов притяжения. Доказана конечность числа связанных состояний в случаях, если ни одна двухчастичная подсистема не имеет виртуального уровня или только одна двухчастичная подсистема имеет такой уровень.

2. ОПИСАНИЕ ДВУХЧАСТИЧНОГО И ТРЕХЧАСТИЧНОГО ГАМИЛЬТониАНОВ НА РЕШЕТКЕ

Пусть $\mathbb{Z}^3$ – трехмерная целочисленная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций φ , определенных на $(\mathbb{Z})^m$.

В координатном представлении гамильтонианы систем двух и трех произвольных частиц действуют соответственно в пространствах $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ и $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^3)$ и имеют вид

$$\begin{aligned} (\hat{h}_\mu^{(\alpha)} \varphi)(n_\beta, n_\gamma) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [(\ell_\beta + \ell_\gamma) \varphi(n_\beta, n_\gamma) - \ell_\beta \varphi(n_\beta + s, n_\gamma) - \\ &\quad - \ell_\gamma \varphi(n_\beta, n_\gamma + s)] - \mu \delta_{n_\beta n_\gamma} \varphi(n_\beta, n_\gamma), \\ \hat{H} \varphi(n_1, n_2, n_3) &= \frac{1}{2} \sum_{|s|=1} [(\ell_1 + \ell_2 + \ell_3) \varphi(n_1, n_2, n_3) - \ell_1 \varphi(n_1 + s, n_2, n_3) - \\ &\quad - \ell_2 \varphi(n_1, n_2 + s, n_3) - \ell_3 \varphi(n_1, n_2, n_3 + s)] - \\ &\quad - \sum_{\alpha=1; \alpha \neq \beta, \gamma}^3 \mu_\alpha \delta_{n_\beta n_\gamma} \varphi(n_1, n_2, n_3). \end{aligned}$$

Здесь $\mu_\alpha \in \mathbb{R}$ – энергия взаимодействия частиц (например, $\mu_1 > 0$ – энергия взаимодействия второй и третьей частиц), δ_{nm} – символ Кронекера, $m_\alpha = (\ell_\alpha)^{-1}$ – массы частицы; индексы α, β и γ различны и принимают значения 1, 2, 3.

Пусть $\mathbf{T}^3$ – трехмерный тор, $L_2((\mathbf{T}^3)^m)$ – гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbf{T}^3)^m$.

В импульсном представлении гамильтонианы систем двух и трех произвольных частиц действуют соответственно в пространствах $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и $L_2((\mathbf{T}^3)^3)$ по правилам

$$\begin{aligned} (h_\mu^{(\alpha)} f)(k_\beta, k_\gamma) &= (\varepsilon_\beta(k_\beta) + \varepsilon_\gamma(k_\gamma)) f(k_\beta, k_\gamma) - \\ &\quad - \mu \int \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_\beta, k'_\gamma) dk'_\beta dk'_\gamma, \end{aligned}$$

$$(Hf)(k_1, k_2, k_3) = (\varepsilon_1(k_1) + \varepsilon_2(k_2) + \varepsilon_3(k_3))f(k_1, k_2, k_3) - \\ - \sum_{\substack{\alpha=1; \alpha \neq \beta, \gamma \\ \beta < \gamma}}^3 \mu_\alpha \iiint \delta(k_\alpha - k'_\alpha) \delta(k_\beta + k_\gamma - k'_\beta - k'_\gamma) f(k'_1, k'_2, k'_3) dk'_1 dk'_2 dk'_3,$$

где $\delta(k)$ – трехмерная дельта-функция Дирака,

$$\varepsilon_\alpha(p) = \ell_\alpha \sum_{i=1}^3 (1 - \cos p^{(i)}), \quad p = (p^{(1)}, p^{(2)}, p^{(3)}) \in \mathbf{T}^3.$$

Интеграл без указания пределов всюду означает интегрирование по всему тору $\mathbf{T}^3$. Предположим, что на торе выбрана единичная мера, т.е. $\int ds = 1$.

Пусть $k_{(\alpha)} = k_\beta + k_\gamma$ и $K = k_1 + k_2 + k_3$ – квазиимпульсы систем двух и трех частиц, а $\Gamma_{k_{(\alpha)}} = \{(k_\beta, k_\gamma) \in (\mathbf{T}^3)^2 : k_\beta + k_\gamma = k_{(\alpha)}\}$, $F_K = \{(k_1, k_2, k_3) \in (\mathbf{T}^3)^3 : k_1 + k_2 + k_3 = K\}$ – соответственно трехмерное и шестимерное многообразия. Обозначим через $L_2(\Gamma_{k_{(\alpha)}})$ и $L_2(F_K)$ гильбертовы пространства всех квадратично-интегрируемых функций, определенных на $\Gamma_{k_{(\alpha)}}$ и F_K , соответственно. Пространства $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и $L_2((\mathbf{T}^3)^3)$ представляются в виде следующих прямых интегралов (см. [14]):

$$L_2((\mathbf{T}^3)^2) = \int \oplus L_2(\Gamma_{k_{(\alpha)}}) dk_{(\alpha)}, \quad L_2((\mathbf{T}^3)^3) = \int \oplus L_2(F_K) dK.$$

Операторы $h_\mu^{(\alpha)}$ и H коммутируют с группой операторов $\{U_s^{(2)}, s \in \mathbb{Z}^3\}$ и $\{U_s^{(3)}, s \in \mathbb{Z}^3\}$, действующих в пространствах $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и $L_2((\mathbf{T}^3)^3)$, соответственно, по формулам

$$(U_s^{(2)}f)(k_\beta, k_\gamma) = \exp(i(k_\beta + k_\gamma, s))f(k_\beta, k_\gamma), \\ (U_s^{(3)}f)(k_1, k_2, k_3) = \exp(i(k_1 + k_2 + k_3, s))f(k_1, k_2, k_3).$$

Поэтому операторы $h_\mu^{(\alpha)}$ и H разлагаются в прямые интегралы

$$h_\mu^{(\alpha)} = \int \oplus \hat{h}_\mu^{(\alpha)}(k_{(\alpha)}) dk_{(\alpha)}, \quad H = \int \oplus \hat{H}(K) dK,$$

где семейства ограниченных самосопряженных операторов $\{\hat{h}_\mu^{(\alpha)}(k), k \in \mathbf{T}^3\}$ и $\{\hat{H}(K), K \in \mathbf{T}^3\}$ действуют в гильбертовых пространствах $L_2(\Gamma_k)$ и $L_2(F_K)$, соответственно, по формулам

$$\hat{h}_\mu^{(\alpha)}(k)f(q, k - q) = \varepsilon_k^{(\alpha)}(q)f(q, k - q) - \mu \int f(q', k - q') dq', \quad (2.1)$$

$$\hat{H}(K)f(p, q, K - p - q) = \varepsilon_{12}(K; p, q)f(p, q, K - p - q) - \mu_1 \int f(p, q', K - p - q') dq' - \\ - \mu_2 \int f(q', q, K - q - q') dq' - \mu_3 \int f(q', p + q - q', K - p - q) dq', \quad (2.2)$$

где

$$\begin{aligned}\varepsilon_k^{(\alpha)}(q) &= \varepsilon_\beta(q) + \varepsilon_\gamma(k - q), & k \in \mathbf{T}^3, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) &= \varepsilon_\alpha(p) + \varepsilon_\beta(q) + \varepsilon_\gamma(K - p - q), & K \in \mathbf{T}^3.\end{aligned}$$

Пусть семейства самосопряженных операторов $\{h_\mu^{(\alpha)}(k), k \in \mathbf{T}^3\}$ и $\{H(K), K \in \mathbf{T}^3\}$ действуют в пространствах $L_2(\mathbf{T}^3)$ и $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, соответственно, по формулам

$$\begin{aligned}(h_\mu^{(\alpha)}(k)f)(q) &= \varepsilon_k^{(\alpha)}(q)f(q) - \mu \int f(q') dq', \\ H(K) &= H_0(K) - V_1 - V_2 - V_3,\end{aligned}$$

где операторы $H_0(K)$ и V_α определяются формулами

$$\begin{aligned}H_0(K)f(p, q) &= \varepsilon_{12}(K; p, q)f(p, q), & f \in L_2((\mathbf{T}^3)^2), \\ V_1f(p, q) &= \mu_1 \int f(p, s) ds, & V_2f(p, q) = \mu_2 \int f(s, q) ds, \\ V_3f(p, q) &= \mu_3 \int f(s, p + q - s) ds.\end{aligned}$$

Для любых $k \in \mathbf{T}^3$ и $K \in \mathbf{T}^3$ операторы $h_\mu^{(\alpha)}(k)$ и $H(K)$ унитарно-эквивалентны операторам $\hat{h}_\mu^{(\alpha)}(k)$ и $\hat{H}(K)$, действующим по формулам (1.1) и (1.2), соответственно (см. также [12]).

Введем обозначения

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k) &= \min_{q \in \mathbf{T}^3} \varepsilon_k^{(\alpha)}(q), & \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k) &= \max_{q \in \mathbf{T}^3} \varepsilon_k^{(\alpha)}(q), & k \in \mathbf{T}^3, \\ m_K &= \min_{p, q \in \mathbf{T}^3} \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q), & M_K &= \max_{p, q \in \mathbf{T}^3} \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q), & K \in \mathbf{T}^3, \\ \Delta_\mu^{(\alpha)}(k, z) &= 1 - \mu \int (\varepsilon_k^{(\alpha)}(q) - z)^{-1} dq, & z &\in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k)].\end{aligned}$$

Обозначим через $\sigma_{\text{ess}}(H(K))$ – существенный спектр оператора $H(K)$.

ЛЕММА 2.1. А. Число $z \in \mathbb{C} \setminus [\varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k), \varepsilon_{\max}^{(\alpha)}(k)]$ является собственным значением оператора $h_\mu^{(\alpha)}(k)$, $k \in \mathbf{T}^3$, тогда и только тогда, когда $\Delta_\mu^{(\alpha)}(k, z) = 0$.

Б. Оператор $H(K)$, $K \in \mathbf{T}^3$, не имеет точек спектра на полуоси $[M_K, \infty)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если уравнение $h_\mu^{(\alpha)}(k)f(q) = \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k)f(q)$ имеет нетривиальное решение в пространстве $L_p(\mathbf{T}^3)$ при некотором $p \in [1, 3/2)$, то говорят, что оператор $h_\mu^{(\alpha)}(k)$ имеет виртуальный уровень на левом краю непрерывного спектра [8].

Отметим, что наличие виртуального уровня на левом краю непрерывного спектра оператора $h_\mu^{(\alpha)}(k)$ равносильно равенству $\Delta_\mu^{(\alpha)}(k, \varepsilon_{\min}^{(\alpha)}(k)) = 0$.

3. КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА В СЛУЧАЕ ОТСУТСТВИЯ ВИРТУАЛЬНЫХ УРОВНЕЙ

В этом разделе будем считать, что операторы $h_\mu^{(\alpha)}(k)$, $k \in \mathbf{T}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$, не имеют виртуальных уровней.

Функция $\varepsilon_\alpha(p)$, $\alpha = 1, 2, 3$, имеет единственный невырожденный минимум в точке $p = 0 \in \mathbf{T}^3$. Очевидно, что точка $(0, 0) \in (\mathbf{T}^3)^2$ является единственной невырожденной точкой минимума функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(0; p, q)$. Поэтому в силу аналитичности функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q)$ из теоремы о неявной функции следует, что существуют аналитические функции $P_\alpha(k)$ и $P_\beta(K)$, определенные в некоторой окрестности $W_\delta(0)$ точки $K = 0$, и точка $(P_\alpha(K), P_\beta(K)) \in (\mathbf{T}^3)^2$ является точкой невырожденного минимума функции $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q)$, т.е.

$$m_K = \varepsilon_{\alpha\beta}(K; P_\alpha(K), P_\beta(K)), \quad K \in W_\delta(0).$$

Положим

$$\mu_\alpha^\circ(K) = \min_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int (\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - m_K)^{-1} dq \right)^{-1}. \quad (3.1)$$

ТЕОРЕМА 1. Пусть $K \in W_\delta(0)$ и $\mu_\alpha \in (0, \mu_\alpha^\circ(K))$, $\alpha = 1, 2, 3$. Тогда оператор $H(K)$ может иметь не более чем конечное число собственных значений вне существенного спектра.

Сначала докажем вспомогательные утверждения. В дальнейшем через C_1 , C_2 и C_3 обозначаются различные положительные постоянные, значения которых не конкретизированы.

ЛЕММА 3.1. Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $K \in W_\delta(0)$ и $\mu_\alpha < \mu_\alpha^\circ(K)$, $\alpha = 1, 2, 3$, выполняются неравенства:

а) $C_1(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2) \leq \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - m_K \leq C_2(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)$ при $p \in U_\delta(P_\alpha(K))$, $q \in U_\delta(P_\beta(K))$, где $U_\delta(P_\alpha(K))$ — некоторая δ -окрестность точки $p = P_\alpha(K)$;

б) $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - z \geq \varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - m_K > C_1$ при $p \in \mathbf{T}^3 \setminus U_\delta(P_\alpha(K))$, $q \in \mathbf{T}^3$ и $p \in \mathbf{T}^3$, $q \in \mathbf{T}^3 \setminus U_\delta(P_\beta(K))$;

в) $C_1 < \Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K - p, m_K - \varepsilon_\alpha(p)) < C_2$ при всех $p \in \mathbf{T}^3$, $\alpha = 1, 2, 3$.

Аналогичная лемма доказана в работе [12].

Обозначим через $L_2^{(3)}(\mathbf{T}^3)$ пространство вектор-функций ω , компоненты ω_α , $\alpha = 1, 2, 3$, которых принадлежат пространству $L_2(\mathbf{T}^3)$. Пусть оператор $\mathbf{T}(K, z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, $K \in \mathbf{T}^3$, действует в $L_2^{(3)}(\mathbf{T}^3)$, его матричные элементы определяются равенствами $T_{\alpha\alpha}(K, z) = 0$ и при $\alpha \neq \beta$, $\alpha, \beta = 1, 2, 3$,

$$T_{\alpha\beta}(K, z)w_\beta(p) = \mu_\beta \int \frac{(\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K - p, z - \varepsilon_\alpha(p)))^{-1} w_\beta(q) dq}{\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - z}.$$

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторов $H(K)$ и $\mathbf{T}(K, z)$ (см. [12]).

ЛЕММА 3.2. Для любого $K \in \mathbf{T}^3$ число $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ является собственным значением оператора $H(K)$ тогда и только тогда, когда число 1 есть собственное значение оператора $T(K, z)$.

Введем обозначения

$$p_1 = p, \quad p_2 = q, \quad p_3 = K - p - q.$$

Определим оператор $T_\alpha(z)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, $\alpha = 1, 2, 3$, действующий в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, следующим образом:

$$T_\alpha(z)f(p, q) = (\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K - p_\alpha, z - \varepsilon_\alpha(p_\alpha)))^{-1} V_\alpha f, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Обозначим через $R_0(z)$ резольвенту оператора $H_0(K)$, $K \in \mathbf{T}^3$.

ЛЕММА 3.3. Если ψ – собственная функция оператора $H(K)$, отвечающая собственному значению $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$, то справедливо соотношение

$$\psi = \sum_{\alpha=1}^3 R_0(z) T_\alpha(z) R_0(z) (V_\beta + V_\gamma) \psi, \quad (3.2)$$

обычно называемое уравнением Вайнберга.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \sigma_{\text{ess}}(H(K))$ – собственное значение и ψ – соответствующая собственная функция оператора $H(K)$. В силу леммы 3.2 число 1 является собственным значением оператора $T(K, z)$. Собственные функции операторов $H(K)$ и $T(K, z)$ связаны соотношениями

$$w_1(p) = \int \psi(p, s) ds, \quad w_2(p) = \int \psi(s, p) ds, \quad w_3(p) = \int \psi(s, K - p - s) ds, \quad (3.3)$$

$$\psi(p, q) = \frac{\mu_1 w_1(p) + \mu_2 w_2(q) + \mu_3 w_3(K - p - q)}{\varepsilon_{12}(K; p, q) - z}. \quad (3.4)$$

Учитывая равенство $w_\alpha = T_{\alpha\beta}(K, z)w_\beta + T_{\alpha\gamma}(K, z)w_\gamma$, в силу (3.3) и (3.4) имеем

$$\psi = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 R_0(z) T_\alpha(z) R_0(z) (V_\beta + V_\gamma) \psi.$$

Лемма 3.3 доказана.

ЛЕММА 3.4. Для любого $\mu_\alpha \in (0, \mu_\alpha^\circ(K))$ операторы $A_{\alpha\beta}(K, z) = R_0(z) T_\alpha(z) \times R_0(z) V_\beta$, действующие в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, принадлежат при $z \leq m_K$ классу операторов Гильберта–Шмидта и непрерывны в равномерной операторной топологии в точке $z = m_K$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждения леммы для оператора $A_{12}(K, z)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. Ядро $A_{12}(K, z; p, q, q')$ оператора $A_{12}(K, z)$ имеет вид

$$A_{12}(K, z; p, q, q') = \frac{\mu_\alpha \mu_\beta (\Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K - p, z - \varepsilon_\alpha(p)))^{-1}}{(\varepsilon_{12}(K; p, q) - z)(\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q') - z)}.$$

Покажем, что $A_{12}(K, z; p, q, q')$ — квадратично-интегрируемая функция по совокупности переменных.

Из монотонности по $z \leq m_K$ функции $\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, z - \varepsilon_1(p))$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - z$ имеем

$$\iiint |A_{12}(K, z; p, q, q')|^2 dp dq dq' \leq \iiint |A_{12}(K, m_K; p, q, q')|^2 dp dq dq'.$$

Так как в силу леммы 3.1 функция $(\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, m_K - \varepsilon_1(p)))^{-1}$ ограничена при всех $p \in \mathbf{T}^3$ и функция $\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K$ обращается в нуль в точке $(P_\alpha(K), P_\beta(K))$, то достаточно показать, что

$$J(K, m_K) = \int_{U_\delta(P_\alpha(K))} \int_{U_\delta(P_\beta(K))} \int_{U_\delta(P_\beta(K))} \frac{(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-2} dp dq dq'}{(\varepsilon_{12}(K; p, q') - m_K)^2} < \infty.$$

В силу утверждения “а” леммы 3.1 имеем

$$\begin{aligned} J(K, m_K) &\leq \\ &\leq C_1 \int_{U_\delta(P_\alpha(K))} \int_{U_\delta(P_\beta(K))} \int_{U_\delta(P_\beta(K))} \frac{(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)^{-2} dp dq dq'}{(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q' - P_\beta(K)|^2)^2}. \end{aligned}$$

Делая замену переменных $p - P_\alpha(K) = s_1$, $q - P_\beta(K) = s_2$, $q' - P_\beta(K) = s_3$, получим

$$J(K, m_K) \leq C_1 \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{ds_1 ds_2 ds_3}{(|s_1|^2 + |s_2|^2)^2 (|s_1|^2 + |s_3|^2)^2}.$$

Переходим в сферическую систему координат в правой части последнего неравенства,

$$s_\alpha^{(1)} = r_\alpha \sin \varphi_\alpha \sin \psi_\alpha,$$

$$s_\alpha^{(2)} = r_\alpha \sin \varphi_\alpha \cos \psi_\alpha,$$

$$s_\alpha^{(3)} = r_\alpha \cos \psi_\alpha,$$

$$0 < r_\alpha < \delta, \quad 0 < \varphi_\alpha < \pi, \quad 0 < \psi_\alpha < 2\pi, \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Тогда функция $J(K, m_K)$ оценивается следующим образом:

$$\begin{aligned} J(K, m_K) &\leq C_1 \left(\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi d\psi \right)^3 \int_0^\delta \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 dr_1 dr_2 dr_3}{(r_1^2 + r_2^2)^2 (r_1^2 + r_3^2)^2} = \\ &= C_1 \int_0^\delta \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 dr_1 dr_2 dr_3}{(r_1^2 + r_2^2)^2 (r_1^2 + r_3^2)^2}. \end{aligned}$$

Переходим в полярную систему координат

$$\begin{aligned} r_1 &= r \sin \varphi, \\ r_2 &= r \cos \varphi, \quad 0 < r < \delta, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} J(K, m_K) &\leq C_1 \int_0^\delta r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^\delta \frac{r \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}{r^2 \cos^2 \varphi + r_3^2} dr d\varphi = \\ &= C_1 \int_0^\delta r_3^2 dr_3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{\delta^2 \cos^2 \varphi + r_3^2} \right) \sin^2 \varphi d\varphi < C_1 \delta. \end{aligned}$$

Это означает, что при $z \leq m_K$ оператор $A_{\alpha\beta}(K, z)$ принадлежит классу операторов Гильберта–Шмидта.

Докажем, что выполнено соотношение

$$\lim_{z \rightarrow m_K} \iiint |A_{12}(K, z; p, q, q') - A_{12}(K, m_K; p, q, q')|^2 dp dq dq' = 0. \quad (3.5)$$

Для этого достаточно оценить малой величиной равномерно по z интеграл от $|A_{12}(K, z; p, q, q')|^2$ по областям

$$\begin{aligned} \{ &|p - P_\alpha(K)|, |q - P_\beta(K)| < \delta, |q' - P_\beta(K)| > \delta \}, \\ \{ &|p - P_\alpha(K)|, |q' - P_\beta(K)| < \delta, |q - P_\beta(K)| > \delta \}, \\ \{ &|p - P_\alpha(K)|, |q - P_\beta(K)|, |q' - P_\beta(K)| < \delta \}. \end{aligned}$$

Вне этих областей подынтегральная функция в (3.5), очевидно, непрерывна, по z . Оценим сначала интеграл от $|A_{12}(K, z; p, q, q')|^2$ по первой области. В силу леммы 3.1 этот интеграл не превосходит

$$C_1 \int_{U_\delta(P_\alpha(K))} \int_{U_\delta(P_\beta(K))} \frac{dp dq}{(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)^2}.$$

Переходя к сферическим координатам, можно убедиться, что рассматриваемый интеграл не превосходит $C_1 \delta$ при малых $\delta > 0$. Интеграл по второй области рассматривается аналогично первому. Для оценки интеграла по третьей области заметим, что подынтегральная функция оценивается величиной

$$(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)^{-2} (|p - P_\alpha(K)|^2 + |q' - P_\beta(K)|^2)^{-2}.$$

Переходя в сферическую систему координат, получим

$$J(K, m_K) \leq C_1 \int_0^\delta \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{r_1^2 r_2^2 r_3^2 dr_1 dr_2 dr_3}{(r_1^2 + r_2^2)^2 (r_1^2 + r_3^2)^2} \leq C_1 \delta.$$

Здесь постоянная C_1 не зависит от $z \leq m_K$. Это доказывает соотношение (3.5). Отсюда следует, что

$$\|A_{12}(K, z) - A_{12}(K, m_K)\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } z \rightarrow m_K.$$

Лемма 3.4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть оператор $H(K)$, $K \in W_\delta(0)$, имеет бесконечное число собственных значений z_i , $z_i \rightarrow m_K$ при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через ψ_i соответствующие нормированные собственные функции. Из уравнения (3.2) и леммы 3.4 вытекает, что множество $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ является компактным в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, т.е. последовательность $\{\psi_i\}_{i=1}^\infty$ сильно сходится к нулю. Это противоречит ортогональности функций ψ_i при $z_i \leq m_K$. В силу утверждения Б леммы 2.1 оператор $H(K)$, $K \in \mathbf{T}^3$, не имеет собственных значений, лежащих на полуоси $[M_K, \infty)$. Таким образом, теорема 1 доказана.

4. КОНЕЧНОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОПЕРАТОРА $H(K)$ В СЛУЧАЕ ОДНОГО ВИРТУАЛЬНОГО УРОВНЯ

Перейдем к случаю, когда один из операторов $h_\mu^{(\alpha)}(k)$ имеет виртуальный уровень. Будем для определенности считать, что виртуальный уровень имеет оператор $h_\mu^{(1)}(k)$, а операторы $h_\mu^{(2)}(k)$ и $h_\mu^{(3)}(k)$ виртуальных уровней не имеют.

Предположим, что

$$\min_{p \in \mathbf{T}^3} \left(\int (\varepsilon_{\alpha\beta}(K; p, q) - m_K)^{-1} dq \right)^{-1} = \left(\int (\varepsilon_{\alpha\beta}(K; P_\alpha(K), q) - m_K)^{-1} dq \right)^{-1}.$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть $K \in W_\delta(0)$ и $\mu_1 = \mu_1^\circ(K)$, $0 < \mu_2 < \mu_2^\circ(K)$, $0 < \mu_3 < \mu_3^\circ(K)$. Тогда оператор $H(K)$ может иметь не более чем конечное число собственных значений вне существенного спектра.

Сначала докажем вспомогательные утверждения, которые используются при доказательстве теоремы 2.

ЛЕММА 4.1. Существуют числа $C_1, C_2 > 0$ и $\delta > 0$ такие, что для любых $K \in W_\delta(0)$ и $\mu_1 = \mu_1^\circ(K)$, $\mu_2 < \mu_2^\circ(K)$, $\mu_3 < \mu_3^\circ(K)$ выполняются неравенства:

- а) $C_1 |p - P_\alpha(K)| \leq \Delta_{\mu_1^\circ(K)}^{(1)}(K - p, m_K - \varepsilon_1(p)) \leq C_2 |p - P_\alpha(K)|$ при $p \in U_\delta(P_\alpha(K))$;
- б) $C_1 < \Delta_{\mu_\alpha}^{(\alpha)}(K - p, m_K - \varepsilon_\alpha(p)) < C_2$ при $p \in \mathbf{T}^3 \setminus U_\delta(P_\alpha(K))$, если $\alpha = 1$ и при $p \in \mathbf{T}^3$, если $\alpha = 2, 3$.

Пусть операторы Γ и $\Phi_1(z)$ действуют соответственно в пространствах $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и $L_2(\mathbf{T}^3)$ по формулам

$$\Gamma f(p, q) = \omega^\eta(p, q) f(p, q), \quad 0 < \eta < \frac{1}{4},$$

$$(\Phi_1(z) f_1)(p) = (\Delta_{\mu_1^\circ(K)}^{(1)}(K - p, z - \varepsilon_1(p)))^{-1} f_1(p).$$

Здесь $\omega(p, q) = |p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2$ при $(p - P_\alpha(K))^2 + (q - P_\beta(K))^2 < \rho^2$, $\omega(p, q) = 1$ при $(p - P_\alpha(K))^2 + (q - P_\beta(K))^2 \geq \rho^2$, где ρ — некоторая константа.

Пусть B — пространство функций $g(q)$, $q \in \mathbf{T}^3$, образуемое в результате замыкания множества всех гладких функций по норме

$$\|g\|_\theta = \sup_{q \in \mathbf{T}^3, |\Delta| < 1} \left[|g(q)| + \frac{1}{|\Delta|^\theta} |g(q + \Delta) - g(q)| \right], \quad 0 < \theta < \theta_0 < 1.$$

Заменяем уравнение (3.2) системой

$$\begin{cases} f_1 = V_1 R_0(z)(V_2 + V_3)f, \\ f_0 = \sum_{\alpha=2; \alpha \neq \beta, \gamma}^3 \Gamma^{-1} R_0(z) D_{\alpha\beta}(z)f, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $D_{\alpha\beta}(z) = T_\alpha(z)R_0(z)(V_\beta + V_\gamma)$. Тогда легко проверяется, что f строится из функций f_1 и f_0 по формуле

$$f = \Gamma f_0 + R_0(z)\Phi_1(z)f_1. \quad (4.2)$$

ЛЕММА 4.2. Пусть ψ – собственная функция оператора $H(K)$, соответствующая собственному значению $z < m_K$, а функции f_1 и f_0 определяются формулами (4.1), где роль f в правых частях играет ψ . Тогда $f_1 \in B$, $f_0 \in L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, функции f_1 и f_0 удовлетворяют системе (4.1), а функция f , построенная по формуле (4.2), совпадает с ψ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функции f_1 и f_0 получаются применением к квадратично-интегрируемой функции ψ интегрального оператора с гладким ядром при $z < m_K$, то справедливость включений $f_1 \in B$, $f_0 \in L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ проверяется с помощью неравенства Шварца. Далее из определения функции f , равенства $T_1(z) = \Phi_1(z)V_1$ и уравнения (3.2) следует, что $f = \psi$. Следовательно, функции f_0 и f_1 удовлетворяют системе (4.1). Лемма 4.2 доказана.

Предположим, что оператор $H(K)$ имеет бесконечный дискретный спектр z_i , $z_i \rightarrow m_K$ при $i \rightarrow \infty$. Обозначим через $f_1^{(i)}$, $f_0^{(i)}$ функции, удовлетворяющие системе (4.1) при $z = z_i$. Домножая вектор-функции $(f_0^{(i)}, f_1^{(i)})$ на постоянный множитель, можно считать, что

$$\|f_1^{(i)}\|_\theta + \|f_0^{(i)}\| = 1. \quad (4.3)$$

Пусть функции $\{f^{(i)}\}$ строятся из $\{f_0^{(i)}\}$ и $\{f_1^{(i)}\}$ по формуле (4.2). Из леммы 4.2 и ортогональности собственных функций оператора $H(K)$ вытекает соотношение

$$(f^{(i)}, f^{(j)}) = \iint f^{(i)}(p, q) \overline{f^{(j)}(p, q)} dp dq = 0, \quad i \neq j. \quad (4.4)$$

ЛЕММА 4.3. Функции $\{f^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ удовлетворяют оценке

$$|f^{(i)}| < C(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-1} (1 + |p - P_\alpha(K)|^{-1} + |q - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.5)$$

с постоянной C , не зависящей от i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (4.2) и условия нормировки (4.3) вытекает неравенство $\|\Gamma f^{(i)}\| < C$ с постоянной C , не зависящей от i . Далее, применяя неравенство Шварца, пользуясь оценкой $\|\Gamma f^{(i)}\| < C$, найдем, что

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C \left[\iint \frac{\omega^{-2\eta}(p', q') dp' dq'}{(\varepsilon_{12}(K; p', q) - m_K)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

В силу утверждений “а”, “б” леммы 3.1 имеем

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C_1 + C_2 \left[\int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{(|p'|^2 + |q'|^2)^{-2\eta} dp' dq'}{(|p'|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)^2} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Интеграл по q' от $(|p'|^2 + |q'|^2)^{-2\eta}$ оценивается постоянной равномерно по p' , а интеграл от $(|p'|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)^{-2}$ не превосходит $|q - P_\beta(K)|^{-1}$. В итоге получим неравенство

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C(1 + |q - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}}).$$

Совершенно аналогично оцениваются и остальные слагаемые $D_{\alpha\beta}(z_i)f^{(i)}$, $\alpha \neq \beta$, $(\alpha, \beta) \neq (2, 1)$, $\alpha \neq 1$, из правой части второго уравнения (4.1). В итоге получим

$$|\Gamma f_0^{(i)}| < C(\varepsilon_{12}(K; p, q) - z_i)^{-1} (1 + |p_2 - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.6)$$

Пользуясь оценкой (4.6), оценим функцию $f^{(i)}$. Сначала получим оценку для $|\Phi_1(z_i)f_1^{(i)}|$. Из леммы 4.1 и неравенства Шварца найдем, что функции $|\Phi_1(z_i)f_1^{(i)}|$ не превосходят $C(1 + |p - P_\alpha(K)|^{-3/2})$. Теперь из соотношения (4.2) вытекает следующая оценка для $f^{(i)}$:

$$|f^{(i)}| < C(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-1} (1 + |p_1 - P_\alpha(K)|^{-\frac{3}{2}} + |p_2 - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}). \quad (4.7)$$

Вновь пользуясь вторым уравнением (4.1), можно уточнить оценку (4.7). Действительно, например, функции $\{D_{21}(z_i)f^{(i)}\}$ удовлетворяют неравенству

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C \iint \frac{1}{\varepsilon_{12}(K; p', q) - m_K} |f^{(i)}(p', s)| dp' ds.$$

В силу утверждения “а” леммы 3.1 и неравенства (4.7) получим

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C_1 + C_2 \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{(1 + |p'|^{-\frac{3}{2}} + |s|^{-\frac{1}{2}}) dp' ds}{(|p'|^2 + |q - P_\beta(K)|^2)(|p'|^2 + |s|^2)}.$$

В последнем интеграле, переходя в сферическую систему координат, имеем

$$|D_{21}(z_i)f^{(i)}| \leq C(1 + |q - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$|D_{31}(z_i)f^{(i)}| \leq C(1 + |p_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}).$$

Далее, учитывая (4.7) и утверждения лемм 3.1 и 4.1, оценим $T_1(z_i)R_0(z_i)V_2f^{(i)}$:

$$\begin{aligned} |T_1(z_i)R_0(z_i)V_2f^{(i)}| &< \frac{C}{|\Delta_{\mu_1^0}^{(1)}(K - p, m_K - \varepsilon_1(p))|} \times \\ &\times \left[C_1 + C_2 \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{(1 + |p'|^{-\frac{3}{2}} + |q'|^{-\frac{1}{2}}) dp' dq'}{(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q'|^2)(|p'|^2 + |q'|^2)} \right]. \end{aligned}$$

Переходя в сферическую систему координат в правой части последнего неравенства и вычисляя интеграл по сфере, получим

$$|T_1(z_i)R_0(z_i)V_2f^{(i)}| \leq \frac{C}{|\Delta_{\mu_1^0}^{(1)}(K - p, z_i - \varepsilon_1(p))|}.$$

В силу леммы 4.1 имеем

$$|T_1(z_i)R_0(z_i)V_2f^{(i)}| < C(1 + |p - P_\alpha(K)|^{-1}).$$

Аналогичные рассуждения показывают, что

$$|T_1(z_i)R_0(z_i)V_3f^{(i)}| < C(1 + |p - P_\alpha(K)|^{-1}).$$

Значит

$$|\Phi_1(z_i)f_1^{(i)}| < C(1 + |p - P_\alpha(K)|^{-1}).$$

Тогда из уравнения (4.2) вытекает следующая оценка для $f^{(i)}$:

$$|f^{(i)}| < C(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-1} (1 + |p_1 - P_\alpha(K)|^{-1} + |p_2 - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}).$$

Лемма 4.3 доказана.

Теперь можно установить компактность множеств функций $\{f_1^{(i)}\}$ и $\{f_0^{(i)}\}$ соответственно в пространствах B и $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$.

ЛЕММА 4.4. *Множество функций $\{f_1^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ компактно в пространстве B .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно известному условию компактности в пространствах гильбертовских функций достаточно проверить неравенство $\|f_1^{(i)}\|_{\theta_0} < C$ с постоянной C , не зависящей от i . Воспользуемся первым уравнением (4.1), правая часть которого состоит из двух однотипных слагаемых. Рассмотрим, например, функции $V_1 R_0(z_i) V_2 f^{(i)} = g_i$, т.е.

$$g_i(p) = \mu_1 \mu_2 \iint \frac{f^{(i)}(s, q) ds dq}{\varepsilon_{12}(K; p, q) - z_i}, \quad z_i < m_K.$$

Согласно неравенству (4.5) справедлива оценка

$$|g_i(p)| \leq C \iint \frac{(1 + |p'_1 - P_\alpha(K)|^{-1} + |p'_2 - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p'_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}) dp' dq'}{(\varepsilon_{12}(K; p, q') - m_K)(\varepsilon_{12}(K; p', q') - m_K)}.$$

Пользуясь леммой 3.1 и переходя в сферическую систему координат, находим

$$|g_i(p)| < C_1 + C_2 \int_0^\delta \int_0^\delta \frac{(1 + r_1^{-1} + r_2^{-\frac{1}{2}}) r_1^2 r_2^2 dr_1 dr_2}{(|p - P_\alpha(K)|^2 + r_2^2)(r_1^2 + r_2^2)} = \text{const}.$$

Это означает, что $|g_i(p)|$ оценивается некоторой постоянной C , не зависящей от i .

Пусть $Q_{12}(K, z; p, q)$ — ядро оператора $V_1 R_0(z) V_2$, т.е.

$$Q_{12}(K, z; p, q, z) = \mu_1 \mu_2 (\varepsilon_{12}(K; p, q) - z), \quad z < m_K. \quad (4.8)$$

Дифференцируя выражение (4.8) по переменной p_j , $j = 1, 2, 3$, и пользуясь неравенством (4.5), получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial g_i(p)}{\partial p^{(j)}} \right| &< C \iint \left| \frac{\partial \varepsilon_{12}(K; p, q')}{\partial p^{(j)}} \right| (\varepsilon_{12}(K; p, q') - m_K)^{-2} (\varepsilon_{12}(K; p', q') - m_K)^{-1} \times \\ &\times (1 + |p'_1 - P_\alpha(K)|^{-1} + |p'_2 - P_\beta(K)|^{-\frac{1}{2}} + |p'_3 - P_\gamma(K)|^{-\frac{1}{2}}) dp' dq'. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд функцию

$$\varphi(p, q) = \frac{\partial \varepsilon_{12}(K; p, q)}{\partial p^{(j)}}$$

в некоторой окрестности точки $(P_\alpha(K), P_\beta(K))$ и пользуясь утверждениями леммы 3.1, имеем

$$\left| \frac{\partial g_i(p)}{\partial p_j} \right| < C_1 + C_2 \int_{U_\delta^2(0)} \frac{(|p^{(j)} - P_\alpha(K)| + |q'|)(1 + |p'|^{-1} + |q'|^{-\frac{1}{2}})}{(|p - P_\alpha(K)|^2 + |q'|^2)^2 (|p'|^2 + |q'|^2)} dp' dq'.$$

Рассмотрим следующие интегралы:

$$\begin{aligned} J_1(p) &= \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{|p| |s|^{-1}}{(|p|^2 + |q|^2)^2 (s^2 + q^2)} ds dq, \\ J_2(p) &= \int_{U_\delta(0)} \int_{U_\delta(0)} \frac{|q| |s|^{-1}}{(|p|^2 + |q|^2)^2 (s^2 + q^2)} ds dq. \end{aligned}$$

Интегрируя по переменной s в этих интегралах, получим

$$J_1(p) < C_1 \int_{U_\delta(0)} \frac{|p| \ln |q|^{-1} dq}{(|p|^2 + q^2)^2} < C_1 |p| \int_0^\delta \frac{|q|^{-\varepsilon} dq}{(|p|^2 + q^2)^2},$$

$$J_2(p) < C_1 \int_0^\delta \frac{|q|^{1-\varepsilon}}{(|p|^2 + q^2)^2} dq, \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Делая замену переменных $q = |p|q_1$ в последних интегралах и переходя в сферическую систему координат, получим

$$J_1(p) < C_1 |p|^{-\varepsilon} \int_0^\infty \frac{t^{2-\varepsilon} dt}{(1+t^2)^2} < C(1+|p|^{-\varepsilon}),$$

$$J_2(p) < C_1 |p|^{-\varepsilon} \int_0^\infty \frac{t^{3-\varepsilon} dt}{(1+t^2)^2} < C(1+|p|^{-\varepsilon}).$$

Следовательно,

$$\left| \frac{\partial g_i(p)}{\partial p^{(j)}} \right| < C(1+|p - P_\alpha(K)|^{-\varepsilon}), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

Отсюда вытекает, что функции $\{g_i(p)\}$ равномерно по i удовлетворяют по переменной $p^{(j)}$, $j = 1, 2, 3$, условию Гёльдера с показателем $1 - \varepsilon$ и являются ограниченными. Следовательно, для функций $\{g_i\}$ выполнено неравенство $\|g_i\|_{\theta_0} < C$. Лемма 4.4 доказана.

ЛЕММА 4.5. *Множество функций $\{f_0^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ компактно в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользуемся опять вторым уравнением (4.1). Правая часть этого уравнения состоит из нескольких слагаемых. Рассмотрим вначале слагаемое $\Gamma^{-1}R_0(z_i)D_{21}(z_i)f^{(i)}$. Пусть G – оператор умножения на функцию $\omega^{-\tau}(p, q)$, где $1/2 < \tau < 3/4$. Множество функций $G^{-1}f^{(i)}$ равномерно ограничено в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$.

Для доказательства компактности функций $\Gamma^{-1}R_0(z_i)D_{21}(z_i)f^{(i)}$ остается установить, что оператор $\Gamma^{-1}R_0(z)D_{21}(z)G$, действующий в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, принадлежит при $z \leq m_K$ классу Гильберта–Шмидта и сходится при $z \rightarrow m_K$ к $\Gamma^{-1}R_0(m_K)D_{21}(m_K)G$ в равномерной операторной топологии. Ядро рассматриваемого оператора не превосходит

$$C\omega^{-\eta}(p, q)(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-1}(\varepsilon_{12}(K; s, q) - m_K)^{-1}\omega^{-\tau}(s, q'). \quad (4.9)$$

Установим квадратичную интегрируемость функций в (4.9) по совокупности переменных $p, q, s, q' \in \mathbf{T}^3$. В силу условия $4\tau < 3$ интеграл от $\omega^{-2\tau}(s, q')$ ограничен равномерно по $s \in \mathbf{T}^3$. Затем интегрируем по s . В силу утверждений “а” и “б” леммы 3.1 интеграл от $(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-2}$ не превосходит $C_1 + C_2|q - P_\beta(K)|^{-1}$. Таким образом, остается убедиться в конечности интеграла

$$J(K) = \iint \omega^{-2\eta}(p, q)|q - P_\beta(K)|^{-1}(\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-2} dp dq.$$

Пользуясь утверждениями “а”, “б” леммы 3.1 и переходя в сферическую систему координат, для $J(K)$ имеем

$$J(K) \leq C_1 + C_2 \int_0^\delta \frac{dr}{r^{4\eta}}.$$

При условии $4\eta < 1$ последний интеграл сходится. Это означает, что оператор $\Gamma^{-1}R_0(z)D_{21}(z)G$ принадлежит при $z \leq m_K$ классу Гильберта–Шмидта. Доказательство сходимости $\Gamma^{-1}(z)R_0(z)D_{21}(z)G$ при $z \rightarrow m_K$ проводится так же, как в лемме 3.4. Отсюда вытекает компактность множества функций $\{\Gamma^{-1}R_0(z_i)D_{21}(z_i)f^{(i)}\}$ в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$. Остальные слагаемые $\Gamma^{-1}R_0(z_i)D_{\alpha\beta}(z_i)f^{(i)}$, $\{\alpha, \beta\} \neq \{2, 1\}$, $\alpha \neq 1$, входящие в правую часть второго уравнения (4.1), рассматриваются аналогично. Это доказывает компактность множества функций $\{f_0^{(i)}\}_{i=1}^\infty$ в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$. Лемма 4.5 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Согласно леммам 4.4 и 4.5 в случае бесконечности дискретного спектра оператора $H(K)$, $K \in W_\delta(0)$, множества функций $f_0^{(i)}$ и $f_1^{(i)}$ компактны в пространствах $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и B , соответственно. Будем считать, что $f_0^{(i)} \rightarrow f_0^{(0)}$ и $f_1^{(i)} \rightarrow f_1^{(0)}$ при $i \rightarrow \infty$. Покажем, что этот результат противоречит условиям нормировки (4.3) и ортогональности (4.4). Запишем соотношение (4.4) в виде

$$(f^{(i)}, f^{(j)}) = (\Gamma f_0^{(i)}, \Gamma f_0^{(j)}) + (f_0^{(i)}, \Gamma R_0(z_j)\Phi_1(z_j)f_1^{(j)}) + (\Gamma R_0(z_j)\Phi_1(z_j)f_1^{(i)}, f_0^{(j)}) + \\ + (R_0(z_i)\Phi_1(z_i)f_1^{(i)}, R_0(z_j)\Phi_1(z_j)f_1^{(j)}) = 0. \quad (4.10)$$

Известно, что Γ – ограниченный оператор в пространстве $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$ и оператор $\Gamma R_0(z)\Phi_1(z)$, действующий из пространства B в $L_2((\mathbf{T}^3)^2)$, ограничен и непрерывен в равномерной операторной топологии. Отсюда вытекает, что в первых трех слагаемых в (4.10) при фиксированном i можно перейти к пределу $j \rightarrow \infty$ на основании непрерывности скалярного произведения по каждому из аргументов. Последнее слагаемое в (4.10) имеет вид

$$K_{ij} = \iint f_1^{(i)}(p)f_1^{(j)}(p)(\varepsilon_{12}(K; p, q) - z_i)^{-1}(\varepsilon_{12}(K; p, q) - z_j)^{-1} \times \\ \times (\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, z_i - \varepsilon_1(p)))^{-1}(\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, z_j - \varepsilon_1(p)))^{-1} dp dq. \quad (4.11)$$

Для оправдания предельного перехода при $j \rightarrow \infty$ в выражении (4.11) заметим, что подынтегральная функция в (4.11) непрерывно зависит от z_j при $|p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2 \geq \rho^2 > 0$. В то же время интеграл (4.11) по области $\Omega = \{(p, q) \in (\mathbf{T}^3)^2 : |p - P_\alpha(K)|^2 + |q - P_\beta(K)|^2 < \rho^2\}$ может быть сделан малым равномерно по j . Таким образом, соотношение (4.10) приводит к равенству

$$(\Gamma f_0^{(i)}, \Gamma f_0^{(0)}) + (f_0^{(i)}, \Gamma R_0(m_K)\Phi_1(m_K)f_1^{(0)}) + \\ + (\Gamma R_0(z_i)\Phi_1(z_i)f_1^{(i)}f_0^{(0)}) + K_{i0} = 0, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

В первых трех слагаемых (4.12) можно по-прежнему перейти к пределу при $i \rightarrow \infty$ на основании непрерывности скалярного произведения. Из соотношения (4.12) вытекает, что последовательность K_{i0} ограничена при $i \rightarrow \infty$. Покажем, что отсюда следует равенство $f_1^{(0)}(P_\alpha(K)) = 0$. Действительно, по любому $\varepsilon > 0$ найдутся такие I и $\rho' > 0$, что $|f_1^{(i)}(p)f_1^{(0)}(p) - f_1^{(0)}(P_\alpha(K))|^2 < \varepsilon$ при $i > I$, $|p - P_\alpha(K)| < \rho'$, и, следовательно,

$$\operatorname{Re}[f_1^{(i)}(p)f_1^{(0)}(p)] > \frac{1}{2}|f_1^{(0)}(P_\alpha(K))|^2.$$

Поэтому вещественная часть интеграла K_{i0} по области Ω ограничена снизу величиной

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}|f_1^{(0)}(P_\alpha(K))|^2 \int_{\Omega} (\varepsilon_{12}(K; p, q) - z_i)^{-1} (\varepsilon_{12}(K; p, q) - m_K)^{-1} \times \\ & \times (\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, z_i - \varepsilon_1(p)))^{-1} (\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, m_K - \varepsilon_1(p)))^{-1} dp dq. \end{aligned}$$

С помощью леммы 4.1 можно показать, что последний интеграл стремится к ∞ при $i \rightarrow \infty$. В то же время в интеграле от K_{i0} в области $(\mathbf{T}^3)^2 \setminus \Omega$ нетрудно оправдать переход к конечному пределу при $i \rightarrow \infty$. Таким образом, равенство $f_1^{(0)}(P_\alpha(K)) \neq 0$ противоречит ограниченности K_{i0} .

Нам остается оценить интеграл K_{i0} по области Ω малой величиной равномерно по i . Из равенства $f_1^{(0)}(P_\alpha(K)) = 0$ и условия нормировки (4.3) вытекает оценка $|f_1^{(0)}(p)| < |p - P_\alpha(K)|^\lambda$, $\lambda > 0$. В силу (4.3) имеем $\|f_1^{(i)}\|_\theta \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$. Из $f_1^{(i)} \in B$ и определения нормы в B вытекает оценка $|f_1^{(i)}| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$. Поэтому рассматриваемый интеграл не превосходит

$$\int_{\Omega} (\varepsilon_{12}(p, q) - m_K)^{-2} (\Delta_{\mu_1}^{(1)}(K - p, m_K - \varepsilon_1(p)))^{-2} |p - P_\alpha(K)|^\lambda dp dq < C\rho^\lambda.$$

Таким образом, мы оправдали предельный переход при $i \rightarrow \infty$ в равенстве (4.12), откуда следует, что $f^{(0)} = \Gamma f_0^{(0)} - R_0(m_K)\Phi_1(m_K)f_1^{(0)} = 0$. Из равенства $f^{(0)} = 0$ и установленных выше свойств оператора $\Gamma R_0(z)\Phi_1(z)$ вытекает, что

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\Gamma f^{(i)}\| = 0. \quad (4.13)$$

Рассмотрим уравнение (4.1). Пользуясь выражением (4.6) для ядра оператора $V_1 R_0(z) V_2$, получим, что норма Гильберта–Шмидта оператора $V_1 R_0(z) V_2 \Gamma^{-1}$, а также оператора $V_1 R_0(z) V_3 \Gamma^{-1}$ оценивается постоянной, не зависящей от z . Из рассматриваемого уравнения (4.1) тогда следует, что $\|f_1^{(i)}\| < C\|\Gamma f^{(i)}\|$, так что согласно (4.13) $f_1^{(i)} \rightarrow 0$ в $L_2(\mathbf{T}^3)$ при $i \rightarrow \infty$. Так как в то же время $f_1^{(i)} \rightarrow f_1^{(0)}$ при $i \rightarrow \infty$ в пространстве B , то $f_1^{(0)} = 0$.

Из равенства $f^{(0)} = 0$ теперь вытекает, что $f_0^{(0)} = 0$. Это противоречит условию нормировки (4.3). Значит, оператор $H(K)$, $K \in W_\delta(0)$, имеет лишь конечное число собственных значений в $(-\infty, m_K)$. В силу утверждения Б леммы 2.1 оператор $H(K)$, $K \in \mathbf{T}^3$, не имеет точек спектра на полуоси $[M_K, \infty)$. Теорема 2 доказана.

Благодарности. Авторы приносят глубокую благодарность Р. А. Минлосу за внимание и рецензенту за ценные замечания. Работа выполнена при финансовой поддержке DFG (Германия) и ФФИ ГКНТ РУз.

Список литературы

- [1] Д. Р. Яфаев. ДАН СССР. 1972. Т. 206. № 1. С. 68.
- [2] Г. М. Жислин. ДАН СССР. 1972. Т. 207. № 1. С. 25.
- [3] Д. Р. Яфаев. Матем. сб. 1974. Т. 94. С. 567.
- [4] Yu. N. Ovchinnikov, I. M. Sigal. Ann. Phys. 1989. V. 123. P. 274.
- [5] H. J. Tamura. Funct. Anal. 1991. V. 95. P. 433.
- [6] A. V. Sobolev. Commun. Math. Phys. 1993. V. 156. P. 101.
- [7] В. Н. Ефимов. ЯФ. 1970. Т. 12. Вып. 5. С. 1080.
- [8] Д. Р. Яфаев. ТМФ. 1975. Т. 25. № 2. С. 185.
- [9] С. А. Вугальтер, Г. М. Жислин. Труды ММО. 1986. Т. 49. С. 92.
- [10] D. C. Mattis. Rev. Modern. Phys. 1986. V. 58. № 2. P. 361.
- [11] A. I. Mogilner. The problem of a few quasi-particles in solid-state physics. In: Applications of Self-Adjoint Extensions in Quantum Physics. Lect. Notes Phys. V. 324. Eds. P. Exner, P. Šeba. Berlin: Springer, 1988. P. 160.
- [12] С. Н. Лакаев. ТМФ. 1991. Т. 89. № 1. С. 94.
- [13] С. Н. Лакаев. Функц. анализ и его прилож. 1993. Т. 27. Вып. 3. С. 15.
- [14] М. Рид, Б. Саймон. Методы современной математической физики. Т. 4. М.: Мир, 1982.

Поступила в редакцию 10.I.2001 г.