Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Церковников, Двухвременные температурные функции Грина в кинетической теории и молекулярной гидродинамике. III. Учет взаимодействия гидродинамических флуктуаций, *ТМФ*, 2001, том 129, номер 3, 432–463

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf547>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 13:50:44

ДВУХВРЕМЕННЫЕ ТЕМПЕРАТУРНЫЕ
ФУНКЦИИ ГРИНА В КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ
И МОЛЕКУЛЯРНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ.
III. УЧЕТ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ
ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ФЛУКТУАЦИЙ

Излагается регулярный метод построения уравнений для функций Грина в задачах молекулярной гидродинамики и кинетики, позволяющий последовательно учитывать вклад в обобщенные кинетические коэффициенты, обусловленный взаимодействием двух, трех и более гидродинамических мод. В отличие от обычной теории возмущений по константе взаимодействия, последовательные приближения осуществляются по степени учета высших корреляций, описываемых неприводимыми функциями.

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является продолжением работ [1] и [2]. В работе [1] была развита общая методика построения цепочек уравнений дайсоновского типа, связывающих последовательность функций Грина возрастающего порядка, каждая из которых неприводима относительно предыдущих функций и входит в массовый оператор предшествующего уравнения. Эта методика использовалась в работе [2] для вычисления корреляционных функций и функций Грина системы попарно взаимодействующих частиц. В качестве первого звена цепочки принята система линеаризованных уравнений молекулярной гидродинамики для функций Грина, построенных на операторах плотностей сохраняющихся величин, входящих в столбец

$$A_q(\alpha) = \text{col}(\rho_q, J_q^\alpha, \theta_q) \quad (1.1)$$

и в сопряженную строку

$$A_q^+(\beta) = (\rho_{-q}, J_{-q}^\beta, \theta_{-q}),$$

---

* Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

где

$$\begin{aligned}
 \theta_q &= h_q - (h_q | \rho_{-q}) (\rho_q | \rho_{-q})^{-1} \rho_q, \\
 \rho_q &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p a_q(p), \\
 J_q^\alpha &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} a_q(p), \\
 h_q &= h_q^{\text{kin}} + h_q^{\text{int}}, \\
 h_q^{\text{kin}} &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) a_q(p), \\
 h_q^{\text{int}} &= \frac{1}{2\sqrt{N}V} \sum_{f=(p,p_1,k)} \nu(k) a_q(f) = \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_k \nu(k) \rho_k \rho_{-k+q} - \frac{1}{2V} \sum_k \nu(k) \rho_q.
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

В этих равенствах $\nu(k)$ – фурье-образ потенциала взаимодействия,

$$\begin{aligned}
 a_q(p) &= a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}, \\
 a_q(f) &= a_q(p, p_1, k) = a_{p+\frac{k-q}{2}}^+ a_{p_1-\frac{k}{2}}^+ a_{p_1+\frac{k}{2}} a_{p-\frac{k-q}{2}}, \\
 q &= (q_x, q_y, q_z), \quad k = (k_x, k_y, k_z), \quad p = (p_x, p_y, p_z, \sigma).
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Для определенности в дальнейшем будем рассматривать только систему бозе-частиц, полагая $\sigma = 0$.

Обобщенные кинетические коэффициенты в уравнениях гидродинамики представляют собой неприводимые функции Грина, построенные на операторах, входящих в столбец

$$a'_q = \text{col}(iJ_q^\alpha, i\dot{\theta}_q), \tag{1.4}$$

где

$$i\dot{\theta}_q = i\dot{h}_q - (h_q | \rho_{-q}) (\rho_q | \rho_{-q})^{-1} i\dot{\rho}_q.$$

Производные по времени плотностей сохраняющихся величин могут быть вычислены исходя из уравнения движения для оператора $a_q(p)$ (1.3)

$$\begin{aligned}
 i\frac{d}{dt} a_q(p) &= [a_q(p), H]_- = \frac{(p, q)}{m} a_q(p) + \\
 &+ \frac{\sqrt{N}}{V} \sum_{k, p_1} \nu(k) \left(\delta_{p_1, p-\frac{k}{2}} - \delta_{p_1, p+\frac{k}{2}} \right) a_{p_1+\frac{k-q}{2}}^+ \rho_k a_{p_1-\frac{k-q}{2}}.
 \end{aligned} \tag{1.5}$$

В результате будем иметь

$$i\dot{J}_q^\alpha = [J_q^\alpha, H]_- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} \frac{(p, q)}{m} a_q(p) + \\ + \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_k \left\{ \nu(k) \frac{k_\alpha}{m} + \nu(-k+q) \frac{-k_\alpha + q_\alpha}{m} \right\} \rho_k \rho_{-k+q}, \quad (1.6)$$

$$i\dot{h}_q = [h_q, H]_- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \frac{(p, q)}{m} a_q(p) + \\ + \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_{k, \beta} \left\{ \frac{\nu(k) - \nu(-k+q)}{2} k_\beta + \frac{\nu(k) + \nu(-k+q)}{2} q_\beta \right\} [\rho_k, J_{-k+q}^\beta]_+ - \\ - \frac{1}{2V} \sum_k \nu(k) i\dot{\rho}_q. \quad (1.6a)$$

В формулах (1.5) и (1.6) $H = \sqrt{N} h_0$ – гамильтониан системы (см. (1.2)), $[\dots, \dots]_\mp$ – коммутатор или антикоммутатор. Производная

$$i\dot{\rho}_q = (q, J_q) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{(p, q)}{m} a_q(p)$$

не входит в столбец (1.4), так как выражается через оператор потока частиц J_q^α , входящий в набор базисных операторов (1.1).

Поскольку J_q^α и h_q представляют собой квазиинтегралы движения, первый и второй члены в правых частях (1.6) и (1.6a) имеют одинаковый порядок по q при $q \rightarrow 0$, но разный порядок по взаимодействию $\nu(k)$. При непосредственном вычислении коэффициентов переноса, т.е. функций Грина, построенных на операторах (1.4), пришлось бы появляющиеся при этом различные слагаемые вычислять с разной степенью точности. Поэтому в предыдущих работах [2], [3] для вычисления кинетических коэффициентов использовались уравнения второго звена цепочки для функций Грина, построенных на операторах, входящих в столбец (1.4). В качестве коэффициентов в эти уравнения входят функции более высокого порядка неприводимости, построенные на производных по времени операторов $i\dot{J}_q^\alpha$ (1.6) и $i\dot{h}_q$ (1.6a), не являющихся квазиинтегралами движения (в отличие от J_q^α и h_q):

$$i^2 \ddot{J}_q^\alpha = [i\dot{J}_q^\alpha, H]_- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} \left(\frac{(p, q)}{m} \right)^2 a_q(p) + \\ + \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_{k, \beta} \left\{ \nu(k) \left(\frac{(k, q)}{m} \delta_{\alpha, \beta} + \frac{k_\alpha q_\beta}{m} \right) + \right. \\ \left. + \left(\nu(k) \frac{q_\alpha}{m} + (\nu(k) - \nu(-k+q)) \frac{k_\alpha - q_\alpha}{m} \right) (-k_\beta + q_\beta) \right\} [\rho_k, J_{-k+q}^\beta]_+, \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned}
 i^2 \ddot{h}_q = [i\dot{h}_q, H]_- = & \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \left(\frac{p^2}{2m} - \frac{q^2}{8m} \right) \left(\frac{(p, q)}{m} \right)^2 a_q(p) + \\
 & + \frac{\sqrt{N}}{8V} \sum_k \left\{ \nu(k) \frac{q^2}{m} + (\nu(k) - \nu(-k+q)) \frac{(k, q)}{m} \right\} \frac{(k, k-q)}{m} \rho_k \rho_{-k+q} + \\
 & + \frac{1}{2V} \sum_{p, k} \left\{ \nu(k) \left(\frac{(p, q)}{m} \right)^2 - \frac{\nu(k) - \nu(-k+q)}{2} \left(\frac{(p, -k+q)}{m} \right)^2 \right\} [\rho_k, a_{-k+q}(p)]_+ + \\
 & + \frac{N}{2V^2} \sum_{k, k_1} \nu(k_1) \left\{ (\nu(k) - \nu(-k+q)) \frac{(k, k-q)}{m} + \nu(k) \frac{(k_1, q)}{m} \right\} \rho_k \rho_{k_1} \rho_{-k_1-k+q} + \\
 & + \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_{k, \alpha, \beta} \nu(k) k_\alpha q_\beta [J_k^\alpha, J_{-k+q}^\beta]_+ + \frac{\sqrt{N}}{2V} \sum_k \nu(k) \frac{(k, q)}{m} [\rho_k, \tilde{h}_{-k+q}]_+ - \\
 & - \frac{1}{2V} \sum_k \nu(k) i^2 \ddot{\rho}_q,
 \end{aligned} \tag{1.8}$$

где $\tilde{h}_q = h_q + \frac{1}{2V} \sum_k \nu(k) \rho_q$ (см. (1.2)) и $i^2 \ddot{\rho}_q = \sum_\alpha q_\alpha i J_q^\alpha$ – величина, пропорциональная q^2 . В гидродинамическом пределе функции, построенные на операторах (1.7), (1.8), определяют обратные времена релаксации, пропорциональные квадрату константы взаимодействия, так как в отличие от (1.5) и (1.6) члены в правых частях (1.7) и (1.8), выражаемые через оператор $a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$, имеют более высокий порядок по q ($\sim q^2$) и выпадают в пределе при $q \rightarrow 0$. Кроме того, некоторые члены в правой части, зависящие от взаимодействия, также оказываются пропорциональными q^2 . Это особенно хорошо видно, если положить $\nu(k) \cong U = \text{const}$. Основной вклад во времена релаксации и, следовательно, в кинетические коэффициенты дают члены, выражаемые через произведения плотностей сохраняющихся величин $\rho_k J_{-k+q}^\beta$, $J_k^\alpha J_{-k+q}^\beta$, $\rho_k h_{-k+q}$, которые, кроме $\rho_k h_{-k+q}$, полностью выражаются через произведение одночастичных операторов $a_q(f) = a_q(p, p_1, k)$ (1.3). В работах [2], [3] для вычисления времен релаксации использовалась функция Грина, построенная на операторах $a_q(f)$ и $a_q^+(f')$, учитывающая вклад взаимного рассеяния частиц. Однако при вычислении таких функций в приближении малой плотности мы теряем вклад, возникающий от взаимодействия гидродинамических мод, существенный в случае, когда плотность системы нельзя считать малой. В данной работе мы учтем такой вклад, используя в качестве четвертого звена, следующего после уравнений, основанных на $A_q(\alpha)$, a'_q и $a_q(p)$ (см. (1.1), (1.4) и (1.3)), уравнения, построенные непосредственно на произведениях плотностей сохраняющихся величин, входящих в правые части (1.7) и (1.8). Эти произведения удобно представить в виде прямого произведения столбцов $A_k(\alpha)$ и $A_{-k+q}(\beta)$ (см. (1.1)), определяемого соотношением

$$A_k(\alpha) \times A_{-k+q}(\beta) = \text{col}(A_k(\alpha) \rho_{-k+q}, A_k(\alpha) J_{-k+q}^\beta, A_k(\alpha) \theta_{-k+q}) =$$

$$\begin{aligned}
&= \text{col}(\rho_k \rho_{-k+q}, J_k^\alpha \rho_{-k+q}, \theta_k \rho_{-k+q}, \rho_k J_{-k+q}^\beta, J_k^\alpha J_{-k+q}^\beta, \\
&\quad \theta_k J_{-k+q}^\beta, \rho_k \theta_{-k+q}, J_k^\alpha \theta_{-k+q}, \theta_k \theta_{-k+q}). \quad (1.9)
\end{aligned}$$

Следующее, пятое звено цепочки составляют уравнения, основанные на операторах, входящих в столбец

$$A_k(\alpha) a_{-k+q}(p) = \text{col}(\rho_k a_{-k+q}(p), J_k^\alpha a_{-k+q}(p), \theta_k a_{-k+q}(p)), \quad (1.10)$$

и только на шестом шаге будет рассмотрено уравнение, построенное на произведении

$$a_k(p_1) a_{-k+q}(p) = a_{p_1 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_1 + \frac{k}{2}} a_{p + \frac{k-q}{2}}^+ a_{p - \frac{k-q}{2}}. \quad (1.11)$$

Тем самым мы получим более детальное описание взаимодействия, чем при использовании в качестве четвертого звена уравнения, сразу основанного на $a_q(f)$ (1.3).

План дальнейшего изложения состоит в следующем. Во втором разделе будет представлен более простой и удобный вывод основных соотношений работы [1], используемых для построения цепочки уравнений. В третьем разделе кратко обсуждены полученные в работе [2] уравнения первого и второго звена цепочки, построенные соответственно на операторах (1.1) и (1.4). В четвертом разделе подробно рассмотрено уравнение третьего звена, основанное на операторе $a_q(p)$ (1.3) [2]. В пятом разделе получены уравнения, основанные на операторах, составляющих столбец (1.9), и описывающие взаимодействие гидродинамических мод. В шестом и седьмом разделах дан вывод уравнений для функций Грина, основанных соответственно на операторах (1.10) и (1.11). Восьмой раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

2. УРАВНЕНИЯ ДЛЯ НЕПРИВОДИМЫХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Как и в предыдущих статьях [1], [2], будем рассматривать главным образом запаздывающие функции Грина

$$((A | B^+))_E = -i \int_0^\infty e^{iEt} (A(t) | B^+) dt, \quad \text{Im } E > 0, \quad (2.1)$$

где

$$(A(t) | B^+) = \int_0^\beta \{ \langle A(t - i\tau) B^+ \rangle - \langle A \rangle \langle B^+ \rangle \} d\tau, \quad (2.2)$$

$\beta = 1/\theta$, $\theta = kT$, $A(t) = e^{i\mathcal{H}t} A e^{-i\mathcal{H}t}$ (в единицах $\hbar = 1$), $\mathcal{H} = H - \mu N$, $H = \sqrt{N} h_0$ — гамильтониан системы (см. (1.2)), N — оператор полного числа частиц. Усреднение

в (2.2) ведется по большому каноническому ансамблю. Изотермическая восприимчивость $(A(t) | B^+)$ в случае выполнения условий эргодичности [4], [5] совпадает с функцией релаксации Кубо [6]

$$(A(t) | B^+)^K = i \int_t^\infty \langle [A(t'), B^+]_- \rangle dt'. \quad (2.3)$$

Билинейные формы (2.2) и (2.3) обладают всеми свойствами скалярного произведения. Заменяя в (2.1) $(A(t) | B^+)$ на усредненный коммутатор $\langle [A(t), B^+]_- \rangle$, получим выражение для обычной коммутаторной функции Грина $\langle \langle A | B^+ \rangle \rangle_E$. Все полученные для функций (2.1)–(2.3) соотношения могут быть легко для нее переформулированы [1].

Функция (2.1) удовлетворяет уравнению

$$E((A | B^+))_E = \chi_{AB^+} + ((i\dot{A} | B^+))_E = \chi_{AB^+} + ((A | -i\dot{B}^+))_E, \quad (2.4)$$

где

$$\chi_{AB^+} = \lim_{E \rightarrow \infty} E((A | B^+))_E = (A | B^+). \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь упорядоченную последовательность $a(n)$ (и $a^+(n')$), $n = 1, 2, 3, \dots$, произвольных (пока) операторов или столбцов, составленных из операторов ($a^+(n')$ при этом будет сопряженной строкой). Индекс n означает как порядковый номер, так и совокупность квантовых (импульсы, спины и т.д.) и векторных индексов, соответствующих номеру n . В $a(n)$ и $a^+(n')$ при данном n эти индексы могут иметь разные значения, что отмечается штрихом. Воспользовавшись билинейной формой (2.1), произведем “ортогонализацию” операторов $a(n)$, положив $A_E(1) \equiv a(1)$ и (при $n > 1$)

$$A_E(n) = a(n) - \sum_{m=1}^{n-1} ((a(n) | A_E^+(\bar{m}'))_E G_E^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) A_E(\bar{m})), \quad (2.6)$$

$$A_E^+(n') = a^+(n') - \sum_{m=1}^{n-1} A_E^+(\bar{m}') G_E^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) ((A_E(\bar{m}) | a^+(n'))_E). \quad (2.7)$$

Черта над стоящими рядом индексами $\bar{m}$ и $\bar{m}'$, $\bar{m}$ и $\bar{m}'$, не разделенными вертикальной чертой, означает свертку по соответствующим номеру m квантовым состояниям и векторным индексам, если $a(n)$ и $a(n')$ соответственно столбец и сопряженная строка. Операторы $A_E(n)$ и $A_E^+(m')$ при $n \neq m$ ортогональны относительно билинейной формы (2.1). Поэтому

$$((A_E(n) | A_E^+(m'))_E = ((A_E(n) | A_E^+(n'))_E \delta_{n,m} = G_E(n | n') \delta_{n,m}, \quad (2.8)$$

где диагональная по номеру n (вообще говоря, матричная) функция

$$G_E(n | n') = ((A_E(n) | A_E^+(n')))_E = ((A_E(n) | a^+(n')))_E = ((a(n) | A_E^+(n')))_E. \quad (2.9)$$

Обратная матрица $G_E^{-1}(n | n')$ определяется равенствами

$$\begin{aligned} G_E(n | \bar{n}') G_E^{-1}(\bar{n}' | n') &= \delta(n; n'), \\ G_E^{-1}(n | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n') &= \bar{\delta}(n; n'). \end{aligned} \quad (2.10)$$

Обобщенные символы Кронекера $\delta(n; n')$ и $\bar{\delta}(n; n')$ строятся в соответствии с симметрией операторов $a(n)$ относительно квантовых индексов и должны удовлетворять соотношениям

$$\delta(n; \bar{n}) \delta(\bar{n}; n') = \delta(n; n'), \quad (2.11)$$

$$\bar{\delta}(n; \bar{n}) \bar{\delta}(\bar{n}; n') = \bar{\delta}(n; n'),$$

$$\delta(n; \bar{n}) a(\bar{n}) = a(n), \quad (2.12)$$

$$a^+(\bar{n}) \bar{\delta}(\bar{n}; n') = a^+(n').$$

Соотношения (2.10)–(2.12) налагают ограничения на выбор операторов в последовательности $a(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$. При $E \rightarrow \infty$ вместо $A_E(n)$ (2.6) получаем

$$A(n) = a(n) - \sum_{m=1}^{n-1} (a(n) | A^+(\bar{m}')) \chi^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) A(\bar{m}) \quad (2.13)$$

(см. (1.3.8) и (1.3.9); 1 (или 2) перед номером формулы означает, что соответствующая формула взята из работы [1] (или [2])). Далее, при $E \rightarrow \infty$ согласно (2.8) и (2.9) имеем

$$(A(n) | A^+(m')) = (A(n) | A^+(n')) \delta_{n,m} = \chi(n | n') \delta_{n,m}, \quad (2.14)$$

$$\chi(n | n') = (A(n) | A^+(n')) = (A(n) | a^+(n')) = (a(n) | A^+(n')). \quad (2.15)$$

Обратная матрица $\chi^{-1}(n | n')$ определяется соотношениями (2.10), в которых надо заменить $G_E(n | n')$ на $\chi(n | n')$.

Пусть теперь A и B^+ — операторы, не сводящиеся соответственно к $a(m)$ и $a^+(m')$ при $m < n$. Определим с помощью (2.6), (2.7) неприводимые относительно $a(m)$ и $a^+(m')$

функции

$$\begin{aligned} ((a(n) | B^+))_{n-1,E} &\equiv ((A_E(n) | B^+))_E = ((a(n) | B^+))_E - \\ &- \sum_{m=1}^{n-1} ((a(n) | A_E^+(\overline{m}'))_E G_E^{-1}(\overline{m}' | \overline{m}) ((A_E(\overline{m}) | B^+))_E, \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} ((A | a^+(n'))_{n-1,E} &\equiv ((A | A_E^+(n'))_E = ((A | a^+(n'))_E - \\ &- \sum_{m=1}^{n-1} ((A | A_E^+(\overline{m}'))_E G_E^{-1}(\overline{m}' | \overline{m}) ((A_E(\overline{m}) | a^+(n'))_E, \end{aligned} \quad (2.16a)$$

где $n = 1, 2, 3, \dots$. При $n = 1$ имеем

$$\begin{aligned} ((a(1) | B^+))_{0,E} &= ((a(1) | B^+))_E, \\ ((A | a^+(1'))_{0,E} &= ((A | a^+(1'))_E. \end{aligned}$$

Заменим в (2.16) $a(n)$ на произвольный оператор A и в (2.16a) $a^+(n')$ на оператор B^+ . В результате получим определение неприводимой относительно $a(m)$ и $a^+(m')$ (при $m < n$) функции Грина для произвольных операторов A и B^+ , имеющее вид

$$\begin{aligned} ((A | B^+))_{n-1,E} &= ((A | B^+))_E - \\ &- \sum_{m=1}^{n-1} ((A | a^+(\overline{m}'))_{m-1,E} G_E^{-1}(\overline{m}' | \overline{m}) ((a(\overline{m}) | B^+))_{m-1,E} = ((A | B^+))_{n-2,E} - \\ &- ((A | a^+(\overline{n-1}'))_{n-2,E} G_E^{-1}(\overline{n-1}' | \overline{n-1}) ((a(\overline{n-1}) | B^+))_{n-2,E}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

При этом, используя обозначения, введенные в (2.16) и (2.16a), функцию $G_E(n | n')$ (2.9) можем представить в виде

$$G_E(n | n') = ((a(n) | a^+(n'))_{n-1,E} = ((A(n) | A^+(n'))_{n-1,E}. \quad (2.18)$$

Аналогично при $E \rightarrow \infty$ получаем

$$(A | B^+)_{n-1} = (A | B^+) - \sum_{m=1}^{n-1} (A | A^+(\overline{m}')) \chi^{-1}(\overline{m}' | \overline{m}) (A(\overline{m}) | B^+), \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} (A | a^+(m'))_{m-1} &= (A | A^+(m')), \\ (a(m) | B^+)_{m-1} &= (A(m) | B^+), \\ \chi(n | n') &= (a(n) | a^+(n'))_{n-1} = (A(n) | a^+(n')) = (a(n) | A^+(n')) = (A(n) | A^+(n')). \end{aligned} \quad (2.20)$$

Неприводимость соотношений (2.16)–(2.19) состоит в том, что при замене A или B^+ соответственно на $a(m)$ и $a^+(m')$ ($m \leq n-1$) они обращаются в нуль.

Воспользовавшись уравнением (2.4), построим уравнение для неприводимой функции $((a(n) | B^+))_{n-1,E} \equiv ((A(n) | B^+))_{n-1,E}$ (2.16). Имеем

$$\begin{aligned} E((A(n) | B^+))_{n-1,E} &= (A(n) | B^+) + ((i\dot{A}(n) | B^+))_E - \\ &\quad - \sum_{m=1}^{n-1} ((i\dot{A}(n) | A_E^+(\bar{m}'))_E G_E^{-1}(\bar{m}' | \bar{m}) ((A_E(\bar{m}) | B^+))_E = \\ &= (A(n) | B^+) + ((i\dot{A}(n) | B^+))_{n-1,E}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где мы воспользовались тем, что $(A(n) | A^+(m')) = 0$ и, следовательно,

$$E((A(n) | A_E^+(m'))_E = ((i\dot{A}(n) | A_E^+(m'))_E = ((i\dot{A}(n) | A^+(m'))_{n-1,E}.$$

С другой стороны, исходя из определения неприводимой функции (2.17) имеем

$$\begin{aligned} E((A(n) | B^+))_{n-1,E} &= (A(n) | B^+) + ((i\dot{A}(n) | B^+))_{n,E} + \\ &\quad + ((i\dot{A}(n) | A^+(\bar{n}'))_{n-1,E} G_E^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) ((A(\bar{n}) | B^+))_{n-1,E} = \\ &= (A(n) | B^+) + ((i\dot{A}(n) | B^+))_{n,E} + \{E((A(n) | A^+(\bar{n}'))_{n-1,E} - \chi(n | \bar{n}')\} \times \\ &\quad \times G_E^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) ((A(\bar{n}) | B^+))_{n-1,E}. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Сумма двух последних членов в правой части (2.22) равна второму члену в правой части (2.21), а члены, пропорциональные E в правой и левой частях (2.22), взаимно сокращаются. Воспользовавшись соотношениями (2.10)–(2.12) и (2.22), получаем

$$((A(n) | B^+))_{n-1,E} = G_E(n | \bar{n}') \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) \{ (A(\bar{n}) | B^+) + ((i\dot{A}(\bar{n}) | B^+))_{n,E} \}. \quad (2.23)$$

Аналогично получается сопряженное соотношение

$$((A | A^+(n'))_{n-1,E} = \{ (A | A^+(\bar{n}')) + ((A | -i\dot{A}^+(\bar{n}'))_{n,E} \} \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n'). \quad (2.24)$$

Полагая в (2.21) $B^+ = A^+(n)$ и подставляя $((i\dot{A}(n) | A^+(n'))_{n-1,E}$ из (2.24) при $A = i\dot{A}(n)$ в (2.21), приходим к следующему уравнению для диагональной по номеру n функции $G_E(n | n') = ((A(n) | A^+(n'))_{n-1,E}$ (2.9), (2.18):

$$\begin{aligned} EG_E(n | n') &= \chi(n | n') + \{ (i\dot{A}(n) | A^+(\bar{n}')) + ((i\dot{A}(n) | -i\dot{A}^+(\bar{n}'))_{n,E} \} \times \\ &\quad \times \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | n'), \end{aligned} \quad (2.25)$$

где

$$(i\dot{A}(n) | A^+(n')) = \langle [A(n), A^+(n')]_- \rangle$$

и $n = 1, 2, 3, \dots$. Заменяя в соотношении (2.17) n на $n + 1$ и объединив его с (2.23) и (2.24), получим формулу, связывающую функции Грина разной степени неприводимости,

$$\begin{aligned} ((A | B^+))_{n-1, E} &= ((A | B^+))_{n, E} + \\ &+ \{ (A | A^+(\bar{n}')) + ((A | -i\dot{A}^+(\bar{n}'))_{n, E} \} \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) G_E(\bar{n} | \bar{n}') \chi^{-1}(\bar{n}' | \bar{n}) \times \\ &\times \{ ((i\dot{A}(\bar{n}) | B^+))_{n, E} + (A(\bar{n}) | B^+) \}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Далее будем считать, что последовательность $a(n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, определяется уравнениями движения, представимыми в достаточно общем виде,

$$i\dot{a}(n) = \omega(n | \bar{n}) a(\bar{n}) + \nu(n | \overline{n+1}) a(\overline{n+1}). \quad (2.27)$$

Уравнения (2.25) с учетом (2.27) превращаются в бесконечную систему зацепляющихся уравнений для диагональных по номеру n функций $G_E(n | n')$ (2.18). Вместе с (2.26) и (2.27) они являются основными соотношениями, используемыми в предлагаемом методе вычисления функций Грина (2.1). Зная решения $G_E(n | n')$ цепочки уравнений (2.25), мы можем теперь с помощью (2.26) выразить через них любые недиагональные по номерам n и m ($n \neq m$) функции и функции с пониженной степенью неприводимости. Многократно применяя формулу (2.26), можно, таким образом, получить выражение полной функции Грина $((a(n) | a^+(n'))_E$ через неприводимые функции $G_E(1 | 1'), G_E(2 | 2'), \dots, G_E(n | n')$, являющиеся решениями первых n уравнений цепочки (2.25). Заметим, что в получаемые таким способом соотношения войдут скалярные произведения (см. $(A | A^+(n'))$ и $(A(n) | B^+)$ в формуле (2.26)). Уравнения для них можно получить, воспользовавшись уравнениями для коммутаторных функций $\langle\langle A | B^+ \rangle\rangle_E$ и соотношением $(A | B^+) = -\langle\langle A | B^+ \rangle\rangle_{E=0}$ (подробнее об этом см. в статье [1]).

В процессе построения уравнений (2.25) для функций $G_E(n | n')$ (2.18) может оказаться, что при некотором n какие-то из операторов последовательности $a(1), a(2), \dots, a(n-1)$, предшествующие $a(n-1)$, полностью или частично выражаются через этот же оператор (см., например, выражения для ρ_q, J_q^α и h_q^{kin} (1.2) через $a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$ (1.3)). Тогда, выделяя из $a(m)$ при $m < n-1$ операторы $a(n-1)$, мы получим новую последовательность $a(\tilde{1}), a(\tilde{2}), \dots, a(\tilde{n}-1)$, где $a(\tilde{1}) \equiv a(n-1)$ и $\tilde{n}$ может быть меньше n , если какие-то из операторов $a(m)$ полностью выражаются через $a(n-1)$ (как ρ_q и J_q^α в приведенном выше примере). Ортогонализуя эту новую последовательность, получим

для $A_E(n)$ (2.6) и $A(n)$ (2.13), $((A | B^+))_{n-1,E}$ (2.17) и $(A | B^+)_{n-1}$ (2.19) эквивалентные представления, основанные на последовательности операторов, отмеченных номерами с тильдой. Так, для $A_E(n)$ (2.6) будем иметь выражение с измененной структурой правой части

$$A_E(n) = a(n) - \sum_{\tilde{m}=1}^{\tilde{n}-1} ((a(n) | A^+(\tilde{m}'))_E G_E^{-1}(\tilde{m}' | \tilde{m}) A_E(\tilde{m})) \quad (2.28)$$

и, как следствие, тождественные равенства

$$\begin{aligned} ((A | B^+))_{n-1,E} &\equiv ((A | B^+))_{\tilde{n}-1,E}, \\ (A | B^+)_{n-1} &\equiv (A | B^+)_{\tilde{n}-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Этим приемом мы будем часто пользоваться в дальнейшем.

3. УРАВНЕНИЯ МОЛЕКУЛЯРНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ. ДВА ПЕРВЫХ ЗВЕНА БЕСКОНЕЧНОЙ ЦЕПОЧКИ

При вычислении функций Грина коллективных переменных оптимальным оказывается выбор в качестве первого звена цепочки уравнений обобщенной (молекулярной) гидродинамики для матричной функции $G_E(1 | 1') \equiv G_{q,E}(\alpha | \beta) = ((A_q(\alpha) | A_q^+(\beta)))_E$. Функции Грина, составляющие матрицу $G_{q,E}$ размерности 3×3 (векторные индексы α и β , где это можно, опускаем), построены на операторах плотностей сохраняющихся величин $\rho_q, J_q^\alpha, \theta_q$ (1.2), входящих в столбец A_q (1.1) и сопряженную строку A_q^+ . Согласно (2.25) при $n = 1$ для $G_{q,E}$ имеем уравнение (см. формулы (2.3.2) и (2.3.3), а также работы [3])

$$EG_{q,E} = \chi_q + \{ \langle [A_q, A_q^+]_- \rangle + ((i\dot{A}_q | -i\dot{A}_q^+))_{1,E} \} \chi_q^{-1} G_{q,E}, \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_q &= (A_q | A_q^+) = \text{diag}(\chi_q^\rho, \chi_q(\alpha | \beta), \chi_q^\theta), \\ \chi_q^\rho &= (\rho_q | \rho_{-q}), \\ \chi_q(\alpha | \beta) &= (J_q^\alpha | J_{-q}^\beta) = \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta m^{-1} + (\delta_{\alpha,\beta} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta) \chi_q^\perp, \\ \hat{n}_\alpha &= \frac{q_\alpha}{q}, \\ \chi_q^\theta &= (\theta_q | \theta_{-q}) = (h_q | h_{-q}) - (h_q | \rho_{-q}) (\rho_q | \rho_{-q})^{-1} (\rho_q | h_{-q}). \end{aligned}$$

В матрице коэффициентов $((i\dot{A}_q | -i\dot{A}_q^+))_{1,E}$ первая строка и первый столбец равны нулю, так как в силу неприводимости по операторам из $A(1) \equiv A_q$ (см. (1.1)) $((i\dot{\rho}_q | \dots))_{1,E} = \mathbf{q} \cdot ((\mathbf{J}_q | \dots))_{1,E} = 0$ и $((\dots | -i\dot{\rho}_{-q}))_{1,E} = 0$. Остальные не равные нулю компоненты $((i\dot{j}_q^\alpha | -i\dot{j}_{-q}^\beta))_{1,E}$, $((i\dot{j}_q^\alpha | -i\dot{\theta}_{-q}))_{1,E}$, $((i\dot{\theta}_q | -i\dot{j}_{-q}^\beta))_{1,E}$ и $((i\dot{\theta}_q | -i\dot{\theta}_{-q}))_{1,E}$ представляют собой обобщенные кинетические коэффициенты. Матричные уравнения для этих функций получим на основании столбца (1.4) и соответствующей сопряженной строки, предварительно произведя ортогонализацию операторов $i\dot{j}_q^\alpha$ и $i\dot{\theta}_q$ относительно A_q (1.1):

$$\begin{aligned} J_q'^\alpha &= i\dot{j}_q^\alpha - (i\dot{j}_q^\alpha | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q, \\ \theta_q' &= i\dot{\theta}_q - (i\dot{\theta}_q | A_q^+) \chi_q^{-1} A_q. \end{aligned} \quad (3.2)$$

В результате вместо (1.4) получим

$$\begin{aligned} A(2) &\equiv A_q' = \text{col}(J_q'^\alpha, \theta_q'), \\ A^+(2') &\equiv A_q'^+ = (-J_{-q}'^\beta, -\theta_{-q}'). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Далее, положив в уравнении (2.25) $n = 2$, получим для функции $G_E(2 | 2') \equiv G_{q,E}' = ((A_q' | A_q'^+))_{1,E}$ следующее уравнение (см. также формулы (2.3.17)–(2.3.19)):

$$EG_{q,E}' = \chi_q' + \{ \langle [A_q', A_q'^+]_- \rangle + ((i\dot{A}_q' | -i\dot{A}_q'^+))_{2,E} \} \chi_q'^{-1} G_{q,E}', \quad (3.4)$$

где

$$\begin{aligned} \chi_q' &= (A_q' | A_q'^+) = \text{diag} \left(\left(\frac{q}{m} \right)^2 \chi_q'(\alpha | \beta), \frac{q^2}{m} \chi_q^{\theta'} \right), \\ \chi_q'(\alpha | \beta) &= \left(\frac{m}{q} \right)^2 (J_q'^\alpha | -J_{-q}'^\beta) = \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta \chi_q^{\rho''} + (\delta_{\alpha,\beta} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta) \chi_q^{\prime\perp}, \\ \chi_q^{\theta'} &= \frac{m}{q^2} (\theta_q' | -\theta_{-q}'), \\ \chi_q^{\rho''} &= \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 (i^2 \ddot{\rho}_q | i^2 \ddot{\rho}_{-q}) \end{aligned} \quad (3.5)$$

и $((i\dot{A}_q' | -i\dot{A}_q'^+))_{2,E}$ – матрица размерности 2×2 , компонентами которой являются функции Грина

$$\begin{aligned} ((i\dot{j}_q'^\alpha | i\dot{j}_{-q}'^\beta))_{2,E} &= ((i^2 \ddot{j}_q^\alpha | i^2 \ddot{j}_{-q}^\beta))_{2,E}, \\ ((i\dot{j}_q'^\alpha | i\dot{\theta}_{-q}'))_{2,E} &= ((i^2 \ddot{j}_q^\alpha | i^2 \ddot{h}_{-q}))_{2,E}, \quad \dots, \end{aligned}$$

неприводимые относительно операторов, входящих как в $A(1)$ (1.1), так и в $A(2)$ (3.3). Матрицу недиагональных функций $((A_q | A_q^+))_E$, а также $((A'_q | A_q'^+))_E$ можно выразить с помощью формулы (2.26) через решения $G_{q,E}$ и $G'_{q,E}$ уравнений (3.1), (3.4). Таким образом, с учетом того что $(A'_q | A_q^+) = 0$, получаем полный набор функций Грина молекулярной гидродинамики, основанных на операторах A_q и A'_q :

$$\begin{aligned} ((A_q | A_q^+))_E &= G_{q,E}, \\ ((A_q | A_q'^+))_E &= G_{q,E} \chi_q^{-1} ((i\dot{A}_q | A_q'^+))_{1,E} = G_{q,E} \chi_q^{-1} U G'_{q,E}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$((A'_q | A_q'^+))_E = G'_{q,E} + G'_{q,E} U^T \chi_q^{-1} G_{q,E} \chi_q^{-1} U G'_{q,E}, \quad (3.7)$$

где $U = (i\dot{A}_q | A_q'^+) \chi_q'^{-1}$ — матрица размерности 3×2 с двумя отличными от нуля компонентами $U_{2,1} = U_{1,2} = 1$.

Уравнения обобщенной (молекулярной) гидродинамики (3.1), (3.4)–(3.7) справедливы при любых значениях E и q . В гидродинамическом пределе (3.1) переходит в систему линеаризованных уравнений гидродинамики. Через предельные значения матрицы коэффициентов $((i\dot{A}'_q | -i\dot{A}_q'^+))_{2,E}$ уравнения (3.4) для $G'_{q,E}$ естественным образом определяются времена релаксации τ , τ' и τ'' :

$$\lim_{q \rightarrow 0} \left(\frac{m}{q^2} \right)^2 i((i^2 \ddot{J}_q^\alpha | i^2 \ddot{J}_{-q}^{\bar{\alpha}}))_{2,E=i\varepsilon} \chi_q'^{-1} (\bar{\alpha} | \beta) = \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta \frac{1}{\tau} + (\delta_{\alpha,\beta} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta) \frac{1}{\tau''}, \quad (3.8)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{m}{q^2} i((i^2 \ddot{h}_q | i^2 \ddot{h}_{-q}))_{2,E=i\varepsilon} (\chi_q^{\theta'})^{-1} = \frac{1}{\tau'}. \quad (3.9)$$

При этом кинетические коэффициенты следующим образом выражаются через предельные значения компонент самой матричной функции $G'_{q,E} = ((A'_q | A_q'^+))_{1,E}$ (см. (3.4)):

$$\begin{aligned} \lim_{q \rightarrow 0} \frac{m}{q^2} i((i\dot{J}_q^\alpha | -i\dot{J}_{-q}^{\bar{\alpha}}))_{1,E=i\varepsilon} \chi_q^{-1} (\bar{\alpha} | \beta) &= \\ &= \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta \chi_q^{\rho''} \tau + (\delta_{\alpha,\beta} - \hat{n}_\alpha \hat{n}_\beta) \frac{\chi_{\perp}'}{m\chi_{\perp}} \tau'', \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$\lim_{q \rightarrow 0} \frac{m}{q^2} i((i\dot{h}_q | -i\dot{h}_{-q}))_{1,E=i\varepsilon} (\chi_q^\theta)^{-1} = \frac{\chi^{\theta'}}{\chi^\theta} \tau' \quad (3.11)$$

(см. формулы (2.3.9), (2.3.10), (2.3.24)–(2.3.28)). Времена релаксации τ , τ' и τ'' оказываются обратно пропорциональными квадрату константы взаимодействия, т.к. первые

члены в правых частях (1.7) и (1.8), выражающиеся через $a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$, выпадают в пределе при $q \rightarrow 0$ и остаются только члены, зависящие от взаимодействия. Вычисление корреляционных функций в левых частях (3.8), (3.9) в приближении классического идеального газа [3] приводит к выражениям для времен релаксации, которые совпадают с результатами, полученными для слабо неидеального газа на основании кинетического уравнения [7],

$$\tau = \tau'' = \frac{2}{3} \tau' = \frac{5}{16} \sqrt{\frac{m}{\pi \theta}} \frac{1}{na^2}, \quad (3.12)$$

где $\theta = kT$, a – диаметр твердой сферы. В более реалистичном случае, когда взаимодействие нельзя считать малым, следует включить в рассмотрение уравнения следующих звеньев цепочки для функций, через которые выражаются коэффициенты уравнений (3.4), $((i^2 \ddot{J}_q^\alpha | i^2 \ddot{J}_{-q}^\beta))_{2,E}$, $((i^2 \ddot{h}_q | i^2 \ddot{J}_{-q}^\beta))_{2,E}$, ..., и времена релаксации (3.8), (3.9). В работе [2] – это уравнения третьего и четвертого звена соответственно для функций $G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{2,E}$ и $G_{q,E}(f | f') = ((a_q(f) | a_q^+(f'))_{3,E}$, построенных на операторах $a_q(p)$ и $a_q(f)$ (см. (1.3), (1.7) и (1.8)). Оператор $a_q(f)$ входит в правые части уравнений движения через произведения плотностей сохраняющихся величин $\rho_k \rho_{-k+q}$, $\rho_k J_{-k+q}^\beta, \dots$. В данной статье в качестве четвертого звена будут приняты уравнения для функций Грина, построенные на самих произведениях плотностей, составляющих столбец (1.9). Это позволит учесть взаимодействие гидродинамических мод. Однако сначала более подробно обсудим уравнение третьего звена для функции $G_{q,E}(p | p')$ [2], поскольку она связана с одночастичной функцией распределения, являющейся предметом многих исследований в рамках неравновесной статистической механики. Кроме того, рассмотрение этого примера позволит проиллюстрировать все характерные приемы, используемые в предлагаемой методике.

4. УРАВНЕНИЕ ТРЕТЬЕГО ЗВЕНА ЦЕПОЧКИ. ОДНОЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛАБО НЕРАВНОВЕСНОЙ СИСТЕМЫ

Полагая $a(3) \equiv a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$, построим уравнение для функции Грина $G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{2,E}$, неприводимой относительно A_q (1.1) и A'_q (3.3). Следуя сформулированным выше правилам, ортогонализуем $a_q(p)$ относительно A_q и A'_q . Предварительно удобно перераспределить входящие в A_q и A'_q операторы, положив $\tilde{A}_q = \text{col}(\rho_q, J_q^\alpha)$, где оставлены операторы, выражаемые только через $a_q(p)$, перенесены θ_q из A_q в $\tilde{A}'_q = \text{col}(\theta_q, J_q'^\alpha, \theta'_q)$. Тогда согласно (2.13) при $n = 3$ будем иметь

$$A(3) \equiv A_q(p) = a_q(p) - (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q - (a_q(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}'_q, \quad (4.1)$$

где $\tilde{\chi}_q = (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+)$ и $\tilde{\chi}'_q = (\tilde{A}'_q | \tilde{A}'_q{}^+)$. Ортогонализированный оператор $A_q(p)$ обладает очевидным свойством

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p A_q(p) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_p \frac{p_\alpha}{m} A_q(p) = 0, \quad (4.2)$$

которое вытекает из определений ρ_q и J_q^α (1.2), составляющих столбец $\tilde{A}_q$, и свойства ортогональности $(\tilde{A}'_q | \tilde{A}_q^+) = 0$. Равенства (4.2) можно представить в матричном виде

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}) = 0, \quad (4.2a)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_q(p | p') &= (a_q(p) | a_q^+(p')), \\ \tilde{\chi}_q(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \delta_{p,p'}. \end{aligned}$$

Используя соотношение (4.2a), можем вместо (4.1) написать выражение

$$A_q(p) = \delta_q(p; \bar{p}) \tilde{A}_q(\bar{p}) = \delta_q(p; \bar{p}) \{ a_q(\bar{p}) - (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}'_q{}^+) \tilde{\chi}'_q{}^{-1} \tilde{A}'_q \}, \quad (4.3)$$

где

$$\delta_q(p; p') = \delta_{p,p'} - (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1}(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') \quad (4.4)$$

и определение $\tilde{A}_q(p)$ следует из второго равенства в (4.3). Легко убедиться в том, что

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \delta_q(\bar{p}; p') &= 0, \\ \delta_q(p; \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Первое из равенств (4.5) обеспечивает выполнение соотношений (4.2) и (4.2a). Аналогично получаются соотношения и для сопряженного оператора $A_q^+(p') = \tilde{A}_q^+(\bar{p}') \times \bar{\delta}_q(\bar{p}', p')$. В соответствии с (4.3) и (4.4) для $\chi_q(p | p') = (A_q(p) | A_q^+(p'))$ получаем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \chi_q(p | p') &= (A_q(p) | A_q^+(p')) = (A_q(p) | \tilde{A}_q^+(p')) = \\ &= \delta_q(p; \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_q(p | \bar{p}) \bar{\delta}_q(\bar{p}; p'), \end{aligned} \quad (4.6)$$

где

$$\tilde{\chi}_q(p | p') = (\tilde{A}_q(p) | \tilde{A}_q^+(p')) = \tilde{\chi}_q(p | p') - (a_q(p) | \tilde{A}'_q{}^+) \tilde{\chi}'_q{}^{-1}(\tilde{A}'_q | a_q^+(p')). \quad (4.7)$$

Обратная матрица $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$ определяется исходя из требования

$$\tilde{\chi}_q(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') = \delta_{p,p'}$$

и равна

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') + \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p})(a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1}(\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \\ &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') + \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p})(a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q'^+)(\chi_q^{\text{int}})^{-1}(\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | p'), \end{aligned} \quad (4.8)$$

где $\chi_q^{\text{int}} = (A_q^{\text{int}} | (A_q^{\text{int}})^+)$ и A_q^{int} — часть $\tilde{A}_q'$, зависящая только от взаимодействия и ортогональная оператору $a_q(p)$ (см. (1.2), (1.5), (1.6)),

$$A_q^{\text{int}} = \tilde{A}_q' - (\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q'^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}). \quad (4.9)$$

Первое равенство в правой части (4.8) есть уравнение с факторизованным ядром для $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$, второе равенство является его решением. Обратная матрица $\chi_q^{-1}(p | p')$ не может быть получена как $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$ или $\tilde{\chi}_q'^{-1}(p | p')$ исходя из равенства $\chi_q(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \delta_{p,p'}$, так как, подействовав на обе его части оператором $(\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q'^{-1}(\bar{p}' | p')$, мы приходим к противоречию (слева — нуль, а справа — величина, отличная от нуля). Воспользовавшись же тем, что $\delta_q(p; p')$ и $\bar{\delta}_q(p; p')$ в пространстве, ортогональном $\tilde{A}_q$ и $\tilde{A}_q'$ (или A_q и A_q'), действуют с учетом (4.5) как обычные символы Кронекера, определим $\chi_q^{-1}(p | p')$ с помощью соотношений

$$\chi_q(p | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | p') = \delta_q(p; p'), \quad \chi_q^{-1}(p | \bar{p}) \chi_q(\bar{p} | p') = \bar{\delta}_q(p; p'). \quad (4.10)$$

Из (4.6) и (4.10) следует, что

$$\chi_q^{-1}(p | p') = \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \delta_q(\bar{p}; p') = \bar{\delta}_q(p; \bar{p}') \tilde{\chi}_q'^{-1}(\bar{p}' | p'). \quad (4.11)$$

Поскольку все необходимые условия (2.11), (2.12) при этом оказываются выполненными, мы можем сразу же написать уравнение для неприводимой относительно A_q и A_q' функции $G_{q,E}(p | p') = ((a_q(p) | a_q^+(\bar{p}'))_{2,E})$ в стандартном виде (2.25) при $n = 3$,

$$\begin{aligned} EG_{q,E}(p | p') &= \chi_q(p | p') + \{ \langle [A_q(p), A_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + \\ &+ ((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{3,E} \} \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(p | p'), \end{aligned} \quad (4.12)$$

где $G_{q,E}(p | p')$ удовлетворяет вытекающему из (4.2а) условию

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') = 0. \quad (4.13)$$

Аналогичные условия выполняются для всех членов в правой части (4.12), где

$$\langle [A_q(p), A_q^+(p')]_- \rangle = (i\dot{A}_q(p) | A_q^+(p')).$$

Неприводимость матрицы коэффициентов $((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(p'))_{3,E})$ по $\tilde{A}_q$, $\tilde{A}'_q$ и $A_q(p)$, отмеченная индексом 3, эквивалентна неприводимости по $a_q(p) = a_{p-\frac{q}{2}}^+ a_{p+\frac{q}{2}}$ и A_q^{int} (4.9). Поэтому в соответствии с (2.28) имеем

$$\begin{aligned} ((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(p'))_{3,E}) &= ((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(p'))_{\tilde{2},E}) = ((i\dot{A}_q(p) | -i\dot{A}_q^+(p'))_{\tilde{1},E}) - \\ &- ((i\dot{A}_q(p) | (A_q^{\text{int}})^+))_{\tilde{1},E} (G_{q,E}^{\text{int}})^{-1} ((A_q^{\text{int}} | -i\dot{A}_q^+(p'))_{\tilde{1},E}), \end{aligned} \quad (4.14)$$

где $\tilde{2}$ означает неприводимость по $a_q(p)$ и A_q^{int} , $\tilde{1}$ – неприводимость только по $a_q(p)$ и

$$G_{q,E}^{\text{int}} = ((A_q^{\text{int}} | (A_q^{\text{int}})^+))_{\tilde{1},E}.$$

Воспользовавшись полученными выше соотношениями (4.3), (4.6), (4.11), представим уравнение (4.12) в виде (см. формулы (2.4.16)–(2.4.18))

$$\begin{aligned} \delta_q(p; \bar{p}) \{ EG_{q,E}(\bar{p} | p') - (\langle [\tilde{A}_q(\bar{p}), \tilde{A}_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_q(\bar{p}) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2},E}) \times \\ \times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') - \tilde{\chi}_q(\bar{p} | p') \} = 0. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Учитывая второе из равенств (4.5), уравнение (4.15) можно переписать в альтернативной форме

$$\begin{aligned} EG_{q,E}(p | p') - \{ \langle [\tilde{A}_q(p), \tilde{A}_q^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_q(p) | -i\dot{\tilde{A}}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2},E} \} \times \\ \times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_q(p | p') + (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q,E}(p'), \end{aligned} \quad (4.15a)$$

где двухкомпонентный столбец $F_{q,E}(p')$ определяется из условий (4.13). Из производной

$$i\dot{\tilde{A}}_q(p) = i\dot{a}_q(p) - (a_q(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} i\dot{\tilde{A}}_q'$$

в коэффициенты уравнений (4.15), (4.15а) войдут второй член из правой части $i\dot{a}_q(p)$ (1.5), вторые и последующие члены из правых частей операторов $i^2 \dot{J}_q^\alpha$ (1.7) и $i^2 \dot{h}_q$ (1.8), входящих в $i\dot{\tilde{A}}_q'$. Остальные члены, в том числе $i\dot{\theta}_q$ из $i\dot{\tilde{A}}_q'$, вследствие ортогональности и неприводимости вклада в коэффициенты не дадут.

Уравнение (4.15) напоминает обычное кинетическое уравнение. Однако благодаря условию (4.13) из него исключен вклад гидродинамических переменных ρ_q и J_q^α . Ввиду значительной сложности этого уравнения проследим процесс исключения гидродинамических мод на более простом примере кинетической модели типа БГК [8].

Решение уравнения (4.15) в рамках кинетической модели. Воспользовавшись равенством

$$(\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) i \dot{A}_q(\bar{p}) = i \dot{A}_q - (\tilde{A}_q | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} i \dot{A}_q' = i \dot{A}_q$$

и учитывая неприводимость, отмеченную индексом $\tilde{2}$, получаем

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) ((i \dot{A}_q(\bar{p}) | -i \dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2}, E} &= 0, \\ ((i \dot{A}_q(\bar{p}) | -i \dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2}, E} \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) &= 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Подобным же свойством обладают обобщенные символы Кронекера $\delta_q(p; p')$ и $\bar{\delta}_q(p; p')$ (см. первое из равенств (4.5)). Поэтому полагая, что

$$\begin{aligned} ((i \dot{A}_q(p) | -i \dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2}, E} &= \delta_q(p; \bar{p}) ((i \dot{A}_q(\bar{p}) | -i \dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{\tilde{2}, E} \bar{\delta}_q(\bar{p}'; p') \cong \\ &\cong \delta_q(p; \bar{p}) \left\{ -i \frac{\chi_q(\bar{p})}{\tau_q(\bar{p})} \right\} \bar{\delta}_q(\bar{p}; p'), \end{aligned} \quad (4.17)$$

где $\chi_q(p) = \tilde{\chi}_q(p | p)$ и $\tau_q(p)$ – величина порядка времени релаксации, мы получаем модельное представление для оператора столкновений, сохраняющее свойства (4.16). Подставив (4.17) в обычное кинетическое уравнение, мы получим модельное уравнение, решение которого благодаря структуре правой части выражения для $\delta_q(p; p')$ (4.4) имеет правильную гидродинамическую асимптотику. Благодаря проектированию, осуществляемому оператором $\delta_q(p; p')$, подстановка приближенного выражения (4.17) в уравнение третьего звена (4.15) приводит к исключению из входящих в (4.17) обобщенных символов Кронекера $\delta_q(p; \bar{p})$ и $\bar{\delta}_q(\bar{p}; p')$ вторых членов, которые и формируют вклад гидродинамических мод. Действительно, в (4.15) при этом имеем

$$\begin{aligned} \delta_q(p; \bar{p}) \delta_q(\bar{p}; p') &= \delta_q(p; \bar{p}) \delta_{\bar{p}, p'}, \\ \bar{\delta}_q(p; \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p') &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}') \delta_q(\bar{p}'; \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p') = \\ &= \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p') \end{aligned}$$

(см. (4.11)). В результате вместо (4.15а) получаем

$$\begin{aligned} EG_{q, E}(p | p') - \left\{ \langle [\tilde{A}_q(p), \tilde{A}_q^+(\bar{p}')]_- \rangle - i \frac{\chi_q(p)}{\tau_q(p)} \delta_{p, \bar{p}'} \right\} \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q, E}(\bar{p} | p') &= \\ = \tilde{\chi}_q(p | p') + (a_q(p) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q, E}(p'). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Воспользовавшись функцией $\tilde{G}_{q,E}(p | p')$ – решением уравнения (4.18) при $F_{q,E}(p') = 0$, выразим через нее формальное решение уравнения (4.18) в виде

$$\begin{aligned} G_{q,E}(p | p') &= \tilde{G}_{q,E}(p | p') + \tilde{G}_{q,E}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) \cdot F_{q,E}(p') = \\ &= \tilde{G}_{q,E}(p | p') - \tilde{G}_{q,E}(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) \tilde{G}_{q,E}^{-1} \times \\ &\quad \times (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E}(\bar{p} | p'), \end{aligned} \quad (4.19)$$

где

$$\tilde{G}_{q,E} = (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E}(\bar{p} | \bar{p}') \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+). \quad (4.20)$$

Заметим, что $\tilde{G}_{q,E} \neq ((\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+))_E = \tilde{G}_{q,E}$, так как $\tilde{G}_{q,E}(p | p') \neq ((a_q(p) | a_q^+(p')))_E$. В первом равенстве (4.19) $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$ можно заменить на $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$, так как $(\tilde{A}_q' | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) = (\tilde{A}_q' | \tilde{A}_q^+) = 0$ (см. (4.8)). Второе равенство (4.19) получено путем исключения $F_{q,E}(p')$ исходя из условий (4.13). Таким образом, задача свелась к решению уравнения для $\tilde{G}_{q,E}(p | p')$, которое можно представить в виде

$$\begin{aligned} E \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E}(\bar{p} | p') &= \delta_{p,p'} + \tilde{\chi}_q^{-1}(p | \bar{p}) \left\{ (i \dot{\tilde{A}}_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+(\bar{p}')) - i \frac{\chi_q(\bar{p})}{\tau_q(\bar{p})} \delta_{\bar{p},\bar{p}'} \right\} \times \\ &\quad \times \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E}(p | p'). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Если ограничиться в уравнении (4.21) учетом только операций проектирования, положив в $i \dot{\tilde{A}}_q(p)$ (см. (1.5)) $i \dot{a}_q(p) \cong \frac{(p,q)}{m} a_q(p)$ и в $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p')$ (4.8) $\tilde{\chi}_q^{-1}(p | p') \cong \chi_q^{-1}(p) \delta_{p,p'}$, где $\chi_q(p) \cong (n_{p-\frac{q}{2}} - n_{p+\frac{q}{2}}) / \frac{(p,q)}{m}$, получим интегральное уравнение с факторизующимся ядром

$$\left\{ E - \frac{(p,q)}{m} + \frac{i}{\tau_q(p)} \right\} \tilde{G}_{q,E}(p | p') = \chi_q(p) \delta_{p,p'} + \chi_q(p) U_q^T(p) X_{q,E}^{-1} U_q(\bar{p}) \tilde{G}_{q,E}(\bar{p} | p'). \quad (4.22)$$

Его решение имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q,E}(p | p') &= G_{q,E}^{(0)}(p) \delta_{p,p'} + \\ &+ G_{q,E}^{(0)}(p) U_q^T(p) \{ X_{q,E} - U_q(\bar{p}) G_{q,E}^{(0)}(\bar{p}) U_q^T(\bar{p}) \}^{-1} U_q(p') G_{q,E}^{(0)}(p'), \end{aligned} \quad (4.23)$$

где

$$G_{q,E}^{(0)}(p) = \frac{\chi_q(p)}{E - \frac{(p,q)}{m} + \frac{i}{\tau_q(p)}}. \quad (4.24)$$

Здесь $U_q(p)$ – трехкомпонентный столбец, $U_q^T(p)$ – сопряженная строка и $X_{q,E}$ – матрица размерности 3×3 . Для дальнейшего изложения нет необходимости выписывать эти величины, явный вид которых может быть легко восстановлен. Нам важно лишь то, что в результате подстановки $\tilde{G}_{q,E}(p | p')$ (4.23) в (4.19) мы получаем решение уравнения третьего звена, удовлетворяющее условию (4.13), временная эволюция которого определяется знаменателем выражения (4.24) для функции $G_{q,E}^{(0)}(p)$.

Остающееся пока неизвестным время релаксации $\tau_q(p)$ может быть получено следующим образом. Воспользовавшись соотношением (2.26) при $n = 2$ и $A = B = a_q(p)$, получим функцию с пониженной по сравнению с функцией $G_{q,E}(p | p')$ (см. (4.12)) степенью неприводимости

$$\begin{aligned} ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{1,E} = G_{q,E}(p | p') + \{ (a_q(p) | A_q'^+) + ((a_q(p) | -i\dot{A}_q'^+))_{2,E} \} \times \\ \times \tilde{\chi}_q'^{-1} G_{q,E}' \tilde{\chi}_q'^{-1} \{ ((i\dot{A}_q' | a_q^+(p'))_{2,E} + (A_q' | a_q^+(p')) \}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Подставляя (4.25) в левые части соотношений (3.10), (3.11), в которые, кроме $((a_q(p) | a_q^+(p'))_{1,E}$, входят и другие функции, определяемые уравнениями последующих звеньев цепочки, используя в качестве τ , τ' и τ'' величины, вычисляемые по формулам (3.8), (3.9) и разлагая $\tau_q(p)$ из (4.17) по сферическим функциям, получаем уравнения, определяющие коэффициенты такого разложения. Процедура эта достаточно громоздка. Вычисления существенно упрощаются, если система является слабо неидеальным газом. В этом случае в левых частях (3.10), (3.11) можно пренебречь членами, зависящими от взаимодействия (см. (1.6), (1.6а)). Вычисляя $G_{q,E}(p | p')$ исходя теперь уже из уравнений второго, а не третьего звена, получаем решение в виде (4.19), где $\tilde{A}_q$ надо заменить на полный столбец A_q , так как $h_q \cong h_q^{\text{kin}}$ также выражается через $a_q(p)$ (1.2) и $\tilde{G}_{q,E}(p | p')$ равно первому члену в правой части (4.23). Подставляя в (3.10) и (3.11) в качестве времен релаксации величины (3.12), после не слишком сложных вычислений по изложенной выше схеме получаем

$$\tau_q(p) = \frac{3}{8}(1 + 7 \cos^4 \vartheta) \tau, \quad (4.26)$$

где ϑ – угол между p и q . В отличие от модели с $\tau_q(p) = \tau = \text{const}$ выражение (4.26) обеспечивает выполнение соотношения Прандтля $\tau/\tau' = 2/3$.

Имея решение уравнения третьего звена $G_{q,E}(p | p')$, можно аналогично (3.6), (3.7) получить с помощью (2.26) любые функции, построенные на операторах $a_q(p)$, A_q и A_q' с любой допустимой степенью неприводимости. Понизим степень неприводимости функции (4.25) еще на единицу, положив в (2.26) $A = B = a_q(p)$ и $n = 1$. Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} ((a_q(p) | a_q^+(p'))_E = ((a_q(p) | a_q^+(p'))_{1,E} + \{ (a_q(p) | A_q^+) + ((a_q(p) | -i\dot{A}_q^+))_{1,E} \} \times \\ \times \chi_q^{-1} G_{q,E} \chi_q^{-1} \{ ((i\dot{A}_q | a_q^+(p'))_{1,E} + (A_q | a_q^+(p')) \}. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Формула (4.27) вместе с (4.25) дает нам выражение для функции $((a_q(p) | a_q^+(p')))_E$, пропорциональной вариации одночастичной функции распределения, для нахождения которой обычно используется кинетическое уравнение. Легко убедиться, что

$$\begin{aligned} (\tilde{A}_q | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) ((a_q(\bar{p}) | a_q^+(\bar{p}')))_E \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_q(\bar{p}) | \tilde{A}_q^+) = \\ = ((\tilde{A}_q | \tilde{A}_q^+))_E = \tilde{G}_{q,E}. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Первый член в правой части (4.27) (см. также (4.25)) представляет собой быстро затухающую со временем часть функции. Второй член соответствует так называемому нормальному решению кинетического уравнения, временная эволюция которого при больших t определяется гидродинамическими модами. Заметим также, что в члены, содержащие $i\dot{A}_q$ и $i\dot{A}'_q$ (см. (1.6), (1.6a), (1.7), (1.8)), войдут функции, построенные на произведениях плотностей сохраняющихся величин, которые дадут дополнительный вклад с неэкспоненциальным затуханием во временную зависимость функции распределения (4.27).

5. УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ЗВЕНА ЦЕПОЧКИ

В выражениях для функций Грина в молекулярной гидродинамике, получаемых на основе уравнений (3.1), (3.4) (напомним, пригодных при всех значениях E и q), функция $G_{q,E}(p | p')$, рассмотренная в предыдущем разделе, существенна в области малых длин волн и достаточно больших частот. В гидродинамической области малых E и q главную роль играют функции, через которые выражаются времена релаксации (3.8), (3.9). Вид правых частей для $i^2\ddot{J}_q$ и $i^2\ddot{h}_q$ (1.7), (1.8) указывает на то, что в качестве четвертого звена цепочки целесообразно принять уравнения для функций, построенных на произведениях операторов плотностей сохраняющихся величин. Это позволит учесть при низких частотах взаимодействие гидродинамических мод. Положим

$$a(4) \equiv a_{q;k} = \frac{1}{2}[A_k \times A_{-k+q}]_+, \quad (5.1)$$

где $A_k \times A_{-k+q}$ — прямое произведение столбцов A_k и A_{-k+q} (1.9) (для простоты индексы α и β , где это можно, будем опускать). Знак антикоммутатора указывает на то, что девятикомпонентный столбец $a_{q;k}$ составлен из антикоммутаторов произведений операторов, входящих в столбец (1.9). При этом для сопряженной строки получим

$$a^+(4') \equiv a_{q;k'}^+ = a_{-q;-k'}^T. \quad (5.2)$$

В соответствии с принятой схемой вычислений ортогонализуем (5.1) относительно операторов предыдущих звеньев. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} A_{q;k} &= a_{q;k} - (a_{q;k} | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q - \\ &\quad - (a_{q;k} | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q' - (a_{q;k} | A_q^+(\bar{p}')) \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}) = \\ &= \tilde{A}_{q;k} - (a_{q;k} | (A_q^{\text{int}})^+) (\chi_q^{\text{int}})^{-1} A_q^{\text{int}}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где

$$\tilde{A}_{q;k} = a_{q;k} - (a_{q;k} | a_q^+ (\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1} (\bar{p}' | \bar{p}) a_q (\bar{p}). \quad (5.3a)$$

Во втором равенстве (5.3) мы перешли согласно (2.28) к новому базису $a_q(p)$, A_q^{int} (см. (4.9)). При этом

$$\chi_{q;k,k'} = (A_{q;k} | A_{q;k'}^+) = \tilde{\chi}_{q;k,k'} - (a_{q;k} | (A_q^{\text{int}})^+) (\chi_q^{\text{int}})^{-1} (A_q^{\text{int}} | a_{q;k'}^+), \quad (5.4)$$

где $\tilde{\chi}_{q;k,k'} = (\tilde{A}_{q;k} | \tilde{A}_{q;k'}^+)$. Обратная матрица $\tilde{\chi}_{q;k,k'}^{-1}$ определяется исходя из условия

$$\tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}} \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'}^{-1} = \tilde{\chi}_{q;\bar{k},\bar{k}}^{-1} \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'} = \Delta_{q;k,k'}, \quad (5.5)$$

где квазидиагональная матрица $\Delta_{q;k,k'} \equiv \Delta_{q;k,k'}(\alpha, \beta; \alpha', \beta')$ размерности 9×9 имеет отличные от нуля компоненты, равные

$$\begin{aligned} \Delta_{q;k,k'}^{11} &= \Delta_{q;k,k'}^{99} = \frac{1}{2}(\delta_{k,k'} + \delta_{-k+q,k'}), & \Delta_{q;k,k'}^{22} &= \Delta_{q;k,k'}^{88} = \frac{1}{2}\delta_{k,k'}\delta_{\alpha,\alpha'}, \\ \Delta_{q;k,k'}^{44} &= \Delta_{q;k,k'}^{66} = \frac{1}{2}\delta_{k,k'}\delta_{\beta,\beta'}, & \Delta_{q;k,k'}^{24} &= \Delta_{q;k,k'}^{86} = \frac{1}{2}\delta_{k,-k'+q}\delta_{\alpha,\beta'}, \\ \Delta_{q;k,k'}^{42} &= \Delta_{q;k,k'}^{68} = \frac{1}{2}\delta_{-k+q}\delta_{\beta,\alpha'}, & \Delta_{q;k,k'}^{33} &= \Delta_{q;k,k'}^{77} = \frac{1}{2}\delta_{k,k'}, \\ \Delta_{q;k,k'}^{37} &= \Delta_{q;k,k'}^{73} = \frac{1}{2}\delta_{-k+q,k'}, \\ \Delta_{q;k,k'}^{55} &= \frac{1}{2}(\delta_{k,k'}\delta_{\alpha,\alpha'}\delta_{\beta,\beta'} + \delta_{-k+q,k'}\delta_{\alpha,\beta'}\delta_{\beta,\alpha'}). \end{aligned} \quad (5.6)$$

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости следующих соотношений:

$$\Delta_{q;k,\bar{k}}(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) \Delta_{q;\bar{k},k'}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}; \alpha', \beta') = \Delta_{q;k,k'}(\alpha, \beta; \alpha', \beta'), \quad (5.7)$$

$$\Delta_{q;k,\bar{k}}(\alpha, \beta; \bar{\alpha}, \bar{\beta}) a_{q;\bar{k}}(\bar{\alpha}, \bar{\beta}) = a_{q;k}(\alpha, \beta). \quad (5.8)$$

Матричная функция четвертого звена цепочки имеет вид

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'} &= ((A_{q;k} | A_{q;k'}^+))_{\bar{3},E} = ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{\bar{3},E} = ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{\bar{2},E} = \\ &= ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{\bar{1},E} - ((a_{q;k} | (A_q^{\text{int}})^+))_{\bar{1},E} (G_{q,E}^{\text{int}})^{-1} ((A_q^{\text{int}} | a_{q;k'}^+))_{\bar{1},E}, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где индексы неприводимости $\bar{1}$ и $\bar{2}$ имеют тот же смысл, что в (4.14).

Как следует из (1.2), (1.6) и (1.6а), компоненты столбца A_q^{int} (4.9) пропорциональны взаимодействию и выражаются через произведения плотностей сохраняющихся величин, входящих в $\tilde{A}_{q;k}$ (5.3а). В результате, учитывая (5.4), (5.5), (5.7)–(5.9), получаем

$$\begin{aligned} (A_q^{\text{int}} | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} A_{q;\bar{k}} &= 0, \\ (A_q^{\text{int}} | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} G_{q,E;\bar{k},k'} &= 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В отличие от аналогичных выражений (4.2), (4.2а), (4.13), в которых проектирование производится на часть операторов $\tilde{A}_q$ (выражаемых через $a_q(p)$) из полного числа операторов, входящих в A_q и A'_q , в (5.10) A_q^{int} полностью выражается через $\tilde{A}_{q;k}$. Поэтому в данном случае нет необходимости вводить обобщенные символы Кронекера $\delta_q(k; k')$ и $\bar{\delta}_q(k; k')$ и производить перестройку уравнений. Выражение для $G_{q,E;k,k'}$ (5.9) уже имеет вид, аналогичный (4.19). Нам остается только решить уравнение для функции $\tilde{G}_{q,E;k,k'} = ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{\tilde{1},E}$,

$$E \tilde{G}_{q,E;k,k'} = \tilde{\chi}_{q;k,k'} + \left\{ \langle [\tilde{A}_{q;k}, \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_{q;k} | -i\dot{\tilde{A}}_{q;\bar{k}}^+))_{\tilde{2},E} \right\} \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} \tilde{G}_{q,E;k,k'}, \quad (5.11)$$

где $\tilde{2}$ означает неприводимость по $a_q(p)$ и $a_{q;k}$, и подставить его решение в правую часть (5.9). Чтобы можно было использовать полученные результаты для вычисления времен релаксации по формулам (3.8) и (3.9), учитывая тем самым взаимодействие гидродинамических мод, надо понизить с помощью (2.26) порядок неприводимости функции $G_{q,E;k,k'} = ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{3,E}$ на единицу, полагая в (2.26) $n = 3$ и $A = B = a_{q;k}$. В результате получаем

$$\begin{aligned} ((a_{q;k} | a_{q;k'}^+))_{2,E} &= G_{q,E;k,k'} + \\ &+ \{ (a_{q;k} | A_q^+(\bar{p}')) + ((a_{q;k} | -i\dot{A}_q^+(\bar{p}'))_{3,E} \} \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) G_{q,E}(\bar{p} | \bar{p}') \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \times \\ &\times \{ ((i\dot{A}_q(\bar{p}) | a_{q;k'}^+))_{3,E} + (A_q(\bar{p}) | a_{q;k'}^+) \}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

В матрице коэффициентов $((i\dot{\tilde{A}}_{q;k} | -i\dot{\tilde{A}}_{q;k'}^+))_{\tilde{2},E}$ уравнения (5.11) компоненты первой строки и первого столбца равны нулю, так как производная

$$i \frac{d}{dt} \rho_k \rho_{-k+q} = i \dot{\rho}_k \rho_{-k+q} + \rho_k i \dot{\rho}_{-k+q}$$

выражается через произведения операторов, входящих в $a_{q;k}$ (5.1), (1.9). В остальные компоненты войдут согласно (1.7), (1.8) функции, построенные на произведениях трех операторов плотностей, и функции вида $((a_q(p) \rho_{-k+q} | a_{q;k'}^+))_{3,E}$ (см. (1.5)), определяемые уравнениями пятого звена цепочки. Последние функции войдут через $((i\dot{A}_q(p) | a_{q;k'}^+))_{3,E}$ также и в правую часть (5.12).

Матричное уравнение (5.11) можно записать в виде системы девяти уравнений для функций $((a_{q;k}^{(j)} | a_{q;k'}^+))_{\bar{1},E}$ ($j = 1, \dots, 9$). Однако фактически мы имеем дело с пятью различными уравнениями, так как при $j = 1$ производная $i \frac{d}{dt} \rho_k \rho_{-k+q} = [\rho_k \rho_{-k+q}, H]$ — выражается через операторы $J_k^\alpha \rho_{-k+q}$ и $\rho_k J_{-k+q}^\beta$, входящие в $a(4)$, и соответствующее уравнение может быть легко исключено. При этом три пары операторов

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}[J_k^\alpha, \rho_{-k+q}]_+ & \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}[\rho_k, J_{-k+q}^\beta]_+, \\ \frac{1}{2}[J_k^\alpha, \theta_{-k+q}]_+ & \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}[\theta_k, J_{-k+q}^\beta]_+, \\ \frac{1}{2}[\theta_k, \rho_{-k+q}]_+ & \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}[\rho_k, \theta_{-k+q}]_+ \end{aligned}$$

(см. (5.1) и (1.9)) и три пары соответствующих уравнений получаются одно из другого заменой $k \rightarrow -k + q$, $\alpha \leftrightarrow \beta$. Положение существенно упрощается, если физическая система такова, что можно пренебречь взаимодействием флуктуаций ρ_k и J_k^α с θ_k . Тогда будем иметь практически систему двух уравнений, соответствующих операторам $(1/2)[J_k^\alpha, \rho_{-k+q}]_+$ и $(1/2)[J_k^\beta, J_{-k+q}^\beta]_+$, и отдельно уравнение для $(1/2)[\theta_k, \theta_{-k+q}]_+$.

В следующей, заключительной статье мы обсудим способы решения уравнения (5.11) в приближении взаимодействующих гидродинамических мод.

6. УРАВНЕНИЯ ПЯТОГО ЗВЕНА ЦЕПОЧКИ

Основой уравнений пятого звена цепочки является трехкомпонентный столбец (1.10). После симметризации входящих в него произведений операторов будем иметь

$$a(5) \equiv a_{q;k}(p) = \frac{1}{2}[A_k, a_{-k+q}(p)]_+. \quad (6.1)$$

Строка сопряженных операторов будет равна $a_{q;k}^+(p') = a_{-q;-k}^T(p')$. Умножая $a_{q;k}(p)$ на 1 и p_β/m , $a_{q;-k+q}(p)$ на 1 и p_α/m и суммируя по p , получим восемь из девяти компонент столбца $a_{q;k}$ (5.1). Представим $a_{q;k}$ в развернутом виде

$$\begin{aligned} a_{q;k} &= \frac{1}{2}[A_k \times A_{-k+q}]_+ = \\ &= \text{col} \left(\frac{1}{2}[A_k \times \tilde{A}_{-k+q}]_+, \frac{1}{2}[\tilde{A}_k, \theta_{-k+q}]_+, \frac{1}{2}[\theta_k, \theta_{-k+q}]_+ \right) = \\ &= \text{col}(\tilde{a}_{q;k}, \theta_{q;k}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

В результате суммирования восьмикомпонентный столбец

$$\tilde{a}_{q;k} = \text{col} \left(\frac{1}{2}[A_k \times \tilde{A}_{-k+q}]_+, \frac{1}{2}[\tilde{A}_k, \theta_{-k+q}]_+ \right)$$

связан с $a_{q;k}(p)$ соотношением

$$\tilde{a}_{q;k} = U_{q;k,\bar{k}}(\bar{p})a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) = (\tilde{a}_{q;k} | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_{q;\bar{k}}(\bar{p}). \quad (6.3)$$

Матрица $U_{q;k,k'}(p)$ размерности 8×3 определяется вторым равенством в правой части (6.3), где $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p | p') = (a_{q;k}(p) | a_{q;k'}^+(p'))$. Ортогонализуя, далее, $a_{q;k}(p)$ в соответствии с (2.13) и (2.28) получим

$$\begin{aligned} A_{q;k}(p) &= a_{q;k}(p) - (a_{q;k}(p) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q - (a_{q;k}(p) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q' - \\ &\quad - (a_{q;k}(p) | A_q^+(\bar{p}')) \chi_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(p) - (a_{q;k}(p) | A_{q;\bar{k}}^+) \chi_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} A_{q;\bar{k}} = \\ &= a_{q;k}(p) - (a_{q;k}(p) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - \\ &\quad - (a_{q;k}(p) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} \tilde{A}_{q;\bar{k}} - (a_{q;k}(p) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}) \chi_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}} = \\ &= \left\{ \Delta_{p,k;\bar{p},\bar{k}} - (a_{q;k}(p) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} (\tilde{a}_{q;\bar{k}} | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \right\} \times \\ &\quad \times \left\{ a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) - (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}) \chi_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}} \right\} = \\ &= \delta_{q;k,\bar{k}}(p, \bar{p}) \tilde{A}_{q;\bar{k}}(\bar{p}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\tilde{A}_{q;k} = \tilde{a}_{q;k} - (\tilde{a}_{q;k} | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p})$ (ср. с $\tilde{A}_{q;k}$ (5.3a)), $\tilde{\theta}_{q;k} = \theta_{q;k} - (\theta_{q;k} | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - (\theta_{q;k} | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} \tilde{A}_{q;\bar{k}}$, $\Delta_{p,k;p'k'} \equiv \Delta_{p,k;p'k'}(\alpha; \alpha') = \delta_{p,p'} \delta_{k,k'} \text{diag}(1, \delta_{\alpha,\alpha'}, 1)$. Определения $\delta_{q;k,k'}(p; p')$ и $\tilde{A}_{q;k}(p)$ следуют из последнего равенства в правой части (6.4). Согласно (6.3) получаем

$$(\tilde{a}_{q;k} | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_{q;\bar{k}}(\bar{p}) = 0. \quad (6.5)$$

Аналогичное равенство имеем для обобщенного символа Кронекера и для искомой функции

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'}(p | p') &= ((A_{q;k}(p) | A_{q;k'}^+(p')))_{4,E} = ((a_{q;k}(p) | a_{q;k'}^+(p')))_{4,E} = \\ &= ((a_{q;k}(p) | a_{q;k'}^+(p')))_{\tilde{2},E}, \end{aligned} \quad (6.6)$$

где индекс $\tilde{2}$ имеет тот же смысл, что и в (5.11). Матрицы $\chi_{q;k,k'}(p | p') = (A_{q;k}(p) | A_{q;k'}^+(\bar{p}'))$ и $\chi_{q;k,k'}^{-1}(p | p')$ в соответствии с последним равенством (6.4) принимаются равными

$$\chi_{q;k,k'}(p | p') = \delta_{q;k,\bar{k}}(p; \bar{p}) \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}(p | \bar{p}) \bar{\delta}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}; p'), \quad (6.7)$$

$$\chi_{q;k,k'}^{-1}(p | p') = \bar{\delta}_{q;\bar{k},\bar{k}}(p; \bar{p}) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}^{-1}(p | \bar{p}) \delta_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}; p'), \quad (6.8)$$

где $\bar{\delta}_{q;k,k'}(p; p')$ – сопряженный обобщенный символ Кронекера, $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p | p') = (\tilde{A}_{q;k}(p) | \tilde{A}_{q;k'}^+(p'))$. Обратная матрица $\tilde{\chi}_{q;k,k'}^{-1}(p | p')$ определяется соотношением

$$\tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}'}(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',k'}^{-1}(\bar{p}' | p') = \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}^{-1}(p | \bar{p}) \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p} | p') = \Delta_{p,k;p',k'}(\alpha, \alpha'). \quad (6.9)$$

Соотношения, полученные в настоящем разделе, аналогичны по своему характеру соотношениям четвертого раздела. Как и в четвертом разделе, в котором через $a_q(p)$ выражается только часть $\tilde{A}_q = \text{col}(\rho_q, J_q^\alpha)$ полного столбца A_q , в настоящем разделе мы имеем формулу (6.3), также выражающую через $a_{q;k}(p)$ не весь столбец $a_{q;k}$ (6.2), а только часть его $\tilde{a}_{q;k}$. Сравнивая (4.3) с (6.4), (4.2а) с (6.5), (4.6) с (6.7), легко видеть, что величинам $A_q(p)$, $\tilde{A}_q(p)$, $\tilde{A}_q$, $\tilde{\chi}_q(p | p')$, $\tilde{\chi}_q(p | p')$ соответствуют (в той же последовательности) $A_{q;k}(p)$, $\tilde{A}_{q;k}(p)$, $\tilde{a}_{q;k}$, $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p | p')$ и $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p | p')$. Поэтому нет необходимости повторять все преобразования, приведшие к окончательному результату (4.19), и мы можем сразу же написать выражение для функции $G_{q,E;k,k'}(p | p')$ (6.6):

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'}(p | p') &= \tilde{G}_{q,E;k,k'}(p | p') - \\ &- \tilde{G}_{q,E;k,\bar{k}'}(p | \bar{p}') \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | \tilde{a}_{q;\bar{k}'}^+) \tilde{G}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1} \times \\ &\times (\tilde{a}_{q;\bar{k}} | a_{q;\bar{k}'}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k},\bar{k}'}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E;\bar{k},\bar{k}'}(\bar{p} | p'), \end{aligned} \quad (6.10)$$

где (ср. с (4.20))

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{q,E;k,k'} &= (\tilde{a}_{q;k} | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E;\bar{k},\bar{k}'}(\bar{p} | \bar{p}') \times \\ &\times \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | a_{q;k'}^+) \end{aligned} \quad (6.11)$$

и $\tilde{G}_{q,E;k,k'}(p | p')$ удовлетворяет уравнению, аналогичному (4.15а) при $F_{q,E}(p') = 0$:

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_{q,E;k,k'}(p | p') &- \{ \langle [\tilde{A}_{q;k}(p), \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')]_- \rangle + ((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p) | -i\dot{\tilde{A}}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}'))_{5,E} \} \times \\ &\times \tilde{\chi}_{q;\bar{k}',\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{G}_{q,E;\bar{k},\bar{k}'}(\bar{p} | p') = \tilde{\chi}_{q;k,k'}(p | p'). \end{aligned} \quad (6.12)$$

В этом уравнении согласно (2.28)

$$((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p) | -i\dot{\tilde{A}}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}'))_{5,E} = ((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p) | -i\dot{\tilde{A}}_{q;k'}^+(\bar{p}'))_{\tilde{3},E}.$$

Индекс $\tilde{3}$ означает неприводимость по $a_q(p)$, $a_{q;k}$ и $\theta_{q;k}$, эквивалентную неприводимости по A_q , A'_q , $A_q(p)$, $A_{q;k}$ и $A_{q;k}(p)$, отмеченной индексом 5. Матрица коэффициентов уравнения (6.12) составлена из функций Грина, построенных на операторах $i\dot{A}_k a_{-k+q}(p)$, $A_k i\dot{a}_{-k+q}(p)$ и $i\dot{\theta}_{q;k}$, которые, в свою очередь, выражаются через $a_k(p) a_{-k+q}(p)$ (см. следующий раздел), а также согласно уравнениям движения (1.5), (1.6), (1.6а) через произведения трех операторов плотностей сохраняющихся величин.

7. ШЕСТОЕ ЗВЕНО ЦЕПОЧКИ. ДВУХЧАСТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Вывод уравнений для функций, описывающих квадратичные флуктуации (см. (5.9) и (6.10)), завершим построением уравнений для функции Грина, пропорциональной двухчастичной функции распределения, построенной на произведениях операторов

$$a(6) \equiv a_{q;k}(p, p_1) = \frac{1}{2} [a_k(p_1), a_{-k+q}(p)]_+ = \frac{1}{2} [a_{p_1 - \frac{k}{2}}^+ a_{p_1 + \frac{k}{2}}, a_{p + \frac{k-q}{2}}^+ a_{p - \frac{k-q}{2}}]_+ \quad (7.1)$$

и $a_{q;k'}^+(p', p'_1) = a_{-q;-k'}(p', p'_1)$. Умножая $a_{q;k}(p, p_1)$ на 1 и $p_1\alpha/m$ или на 1 и p_β/m и суммируя соответственно по p_1 и p , получаем операторы, составляющие столбец

$$\tilde{a}_{q;k}(p) = \frac{1}{2} [\tilde{A}_k, a_{-k+q}(p)]_+$$

или

$$\tilde{a}_{q,-k+q}(p_1) = \frac{1}{2} [\tilde{A}_{-k+q}, a_k(p_1)]_+.$$

Столбец $\tilde{a}_{q;k}(p)$ является частью столбца $a_{q;k}(p)$ (6.1), который можно записать в развернутом виде как

$$a_{q;k}(p) = \text{col} \left(\frac{1}{2} [\tilde{A}_k, a_{-k+q}(p)]_+, \frac{1}{2} [\theta_k, a_{-k+q}(p)]_+ \right) = \text{col}(\tilde{a}_{q;k}(p), \theta_{q;k}(p)), \quad (7.2)$$

где

$$\theta_{q;k}(p) = \frac{1}{2} [\theta_k, a_{-k+q}(p)]_+.$$

В результате по аналогии с (6.3) можем написать

$$\tilde{a}_{q;k}(p) = (\tilde{a}_{q;k}(p) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) a_{q;k}(\bar{p}, \bar{p}_1), \quad (7.3)$$

где $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) = (a_{q;k}(p, p_1) | a_{q;k'}^+(p', p'_1))$. Обратная матрица $\tilde{\chi}_{q;k,k'}^{-1}(p, p_1 | p', p'_1)$ определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}'}(p, p_1 | \bar{p}', \bar{p}'_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', k'}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | p', p'_1) &= \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}^{-1}(p, p_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}, k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = \\ &= \delta_{q;k,p,p_1;k',p',p'_1} = \frac{1}{2} (\delta_{k,k'} \delta_{p,p'} \delta_{p_1,p'_1} + \delta_{-k+q,k'} \delta_{p,p'_1} \delta_{p_1,p'}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Выполняя ортогонализацию оператора $a_{q;k}(p, p_1)$ относительно операторов предыдущих звеньев, получаем

$$\begin{aligned}
 A_{q;k}(p, p_1) &= a_{q;k}(p, p_1) - (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_q^+) \tilde{\chi}_q^{-1} \tilde{A}_q - (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_q'^+) \tilde{\chi}_q'^{-1} \tilde{A}_q' - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_q(\bar{p}) - (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1} A_{q;\bar{k}} - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) A_{q;\bar{k}}(\bar{p}) = a_{q;k}(p, p_1) - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{A}_{q;\bar{k}}(\bar{p}) - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}} - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{\theta}_{q;\bar{k}}(\bar{p}), \tag{7.5}
 \end{aligned}$$

где

$$\tilde{A}_{q;k}(p) = \tilde{a}_{q;k}(p) - (\tilde{a}_{q;k}(p) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}), \tag{7.6}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{q;k} &= \theta_{q;k} - (\theta_{q;k} | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - \\
 &- (\theta_{q;k} | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{A}_{q;\bar{k}}(\bar{p}), \tag{7.7}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{\theta}_{q;k}(p) &= \theta_{q;k}(p) - (\theta_{q;k}(p) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - \\
 &- (\theta_{q;k}(p) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) \tilde{A}_{q;\bar{k}}(\bar{p}) - \\
 &- (\theta_{q;k}(p) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}}. \tag{7.8}
 \end{aligned}$$

Используя (7.3), представим $A_{q;k}(p, p_1)$ (7.5) в виде

$$\begin{aligned}
 A_{q;k}(p, p_1) &= \{ \delta_{q;k,p,p_1;\bar{k},\bar{p},\bar{p}_1} - \\
 &- (a_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (\tilde{a}_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}_1')) \times \\
 &\times \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \} \{ a_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) - (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) | a_q^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_q^{-1}(\bar{p}' | \bar{p}) a_q(\bar{p}) - \\
 &- (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}^+) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}} - \\
 &- (a_{q;k}(\bar{p}, \bar{p}_1) | \tilde{\theta}_{-q;-\bar{k}}^+(\bar{p}')) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}}^{\tilde{\theta};-1} \tilde{\theta}_{q;\bar{k}}(\bar{p}) \} = \delta_{q;k,\bar{k}}(p, p_1; \bar{p}, \bar{p}_1) \tilde{A}_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1). \tag{7.9}
 \end{aligned}$$

Определения обобщенного символа Кронекера $\delta_{q;k,k'}(p, p_1; p', p'_1)$, действующего в пространстве, ортогональном всем операторам предыдущих звеньев цепочки, и “урезанного” столбца $\tilde{A}_{q;k}(p, p_1)$ очевидны. Из (7.3) следует, что

$$(\tilde{a}_{q;k}(p) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) A_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) = 0. \quad (7.10)$$

Как и прежде, выразим $\chi_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) = (A_{q;k}(p, p_1) | A_{q;k'}^+(p', p'_1))$ и $\chi_{q;k,k'}^{-1}(p, p_1 | p', p'_1)$ через $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) = (\tilde{A}_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;k'}^+(p', p'_1))$ и $\tilde{\chi}_{q;k,k'}^{-1}(p, p_1 | p', p'_1)$,

$$\begin{aligned} \chi_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) &= \delta_{q;k,\bar{k}}(p, p_1; \bar{p}, \bar{p}_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = \\ &= \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}(p, p_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \bar{\delta}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}, \bar{p}_1; p', p'_1), \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned} \chi_{q;k,k'}^{-1}(p, p_1 | p', p'_1) &= \bar{\delta}_{q;k,\bar{k}}(p, p_1; \bar{p}, \bar{p}_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k},k'}^{-1}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = \\ &= \tilde{\chi}_{q;k,\bar{k}}^{-1}(p, p_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \delta_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}, \bar{p}_1; p', p'_1), \end{aligned} \quad (7.12)$$

где $\tilde{\chi}_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1)$ и $\tilde{\chi}_{q;k,k'}^{-1}(p, p_1 | p', p'_1)$ удовлетворяют соотношениям, аналогичным (7.4). Основываясь на соответствии соотношений, полученных в этом и предыдущем или в четвертом разделах, можем для искомой функции

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) &= ((A_{q;k}(p, p_1) | A_{q;k'}^+(p', p'_1)))_{\bar{5},E} = \\ &= ((a_{q;k}(p, p_1) | a_{q;k'}^+(p', p'_1)))_{\bar{3},E}, \end{aligned} \quad (7.13)$$

где индексы неприводимости $\bar{5}$ и $\bar{3}$ имеют тот же смысл, что и в уравнении (6.12), сразу же написать соотношения, аналогичные (6.10), (6.11) и (6.12):

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) &= \tilde{G}_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) - \\ &- \tilde{G}_{q,E;k,\bar{k}}(p, p_1 | \bar{p}', \bar{p}'_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) | \tilde{a}_q^+(\bar{p}')) \times \\ &\times G_{q,E;\bar{k}', \bar{k}}^{(0)-1}(\bar{p}' | \bar{p}) (\tilde{a}_{q;\bar{k}}(\bar{p}) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \times \\ &\times \tilde{G}_{q,E;\bar{k},k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1), \end{aligned} \quad (7.14)$$

$$\begin{aligned} G_{q,E;k,k'}^{(0)}(p | p') &= (\tilde{a}_{q;k}(p) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \times \\ &\times \tilde{G}_{q,E;\bar{k}, \bar{k}'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | \bar{p}', \bar{p}'_1) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) (a_{q;\bar{k}}(\bar{p}, \bar{p}_1) | \tilde{a}_{q;k'}^+(p')), \end{aligned} \quad (7.15)$$

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) &= \{ \langle [\tilde{A}_{q;k}(p, p_1), \tilde{A}_{q;\bar{k}'}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)]_- \rangle + \\ &+ ((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1) - i\dot{\tilde{A}}_{q;\bar{k}'}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1))_{\bar{6},E}) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \times \\ &\times \tilde{G}_{q;\bar{k},k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = \tilde{\chi}_{q;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1). \end{aligned} \quad (7.16)$$

Функция $G_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1)$, определяемая соотношениями (7.13)–(7.15), удовлетворяет условию, вытекающему из (7.3), (7.10), а именно

$$(\tilde{a}_{q;k}(p) | a_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) G_{q,E;\bar{k}, k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = 0. \quad (7.17)$$

В уравнении (7.16) мы можем заменить индекс неприводимости 6 на $\tilde{4}$:

$$((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1) | -i\dot{\tilde{A}}_{q;k'}^+(p', p'_1)))_{6,E} = ((i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1) | -i\dot{\tilde{A}}_{q;k'}^+(p', p'_1)))_{\tilde{4},E}, \quad (7.18)$$

где $\tilde{4}$ означает неприводимость по операторам $a_q(p)$, $a_{q;k}(p, p_1)$, $\theta_{q;k}$ и $\theta_{q;k}(p)$, эквивалентную неприводимости относительно операторов основного ряда $\tilde{A}_q$, $\tilde{A}'_q$, $A_q(p)$, $A_{q;k}$, $A_{q;k}(p)$ и $A_{q;k}(p, p_1)$ (см. (2.28)). Входящая в (7.18) производная $i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1)$, где $\tilde{A}_{q;k}(p, p_1)$ определяется последним равенством в правой части (7.9), содержит согласно (1.5), (1.6) и (1.6а) произведения как двух, так и трех операторов из набора, $a_k(p)$, ρ_k , J_k^α и θ_k . Произведения двух операторов не войдут в (7.18) вследствие неприводимости, отмеченной индексом 6 или $\tilde{4}$. Оставшиеся в $i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1)$ члены, содержащие произведения трех операторов, пропорциональны взаимодействию, и, следовательно, сама функция (7.18) пропорциональна квадрату взаимодействия.

Рассмотренная нами цепочка уравнений может быть оборвана, если в (7.16) (и во всех предыдущих уравнениях) пренебречь трехмодовыми корреляциями, заменив уравнение (7.16) приближенным уравнением

$$\begin{aligned} E\tilde{G}_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1) - (i\dot{\tilde{A}}_{q;k}(p, p_1) | \tilde{A}_{q;\bar{k}}^+(\bar{p}', \bar{p}'_1)) \tilde{\chi}_{q;\bar{k}', \bar{k}}^{-1}(\bar{p}', \bar{p}'_1 | \bar{p}, \bar{p}_1) \times \\ \times \tilde{G}_{q,E;\bar{k}, k'}(\bar{p}, \bar{p}_1 | p', p'_1) = \tilde{\chi}_{q;k, k'}(p, p_1 | p', p'_1). \end{aligned} \quad (7.19)$$

При этом, пренебрегая функцией (7.18), мы одновременно пренебрегаем членами порядка квадрата взаимодействия, описывающими трехмодовые корреляции. В следующей статье будет рассмотрен несколько иной способ обрыва цепочки уравнений, основанный на выделении факторизующихся частей “тильдованных” функций, описываемых уравнениями (5.12), (6.12) и (7.16), и приближенном решении возникающих при этом уравнений для T -матриц. Получаемая тем или иным путем замкнутая система уравнений не противоречит теории возмущений по взаимодействию. По существу, она представляет собой результат частичного суммирования, учитывающего через функции четвертого, пятого и шестого звеньев цепочки двухмодовые взаимодействия в обобщенных кинетических коэффициентах уравнений молекулярной гидродинамики. Формула (2.26) позволяет выразить через получаемые при этом диагональные по номеру $n = 1, 2, \dots, 6$ неприводимые функции $G_{q,E}$, $G'_{q,E}$, $G_{q,E}(p | p')$, $G_{q,E;k,k'}$, $G_{q,E;k,k'}(p | p')$ и $G_{q,E;k,k'}(p, p_1 | p', p'_1)$ любые недиагональные функции и функции любой степени неприводимости.

Уравнения в этом и предыдущем разделах, как и уравнения четвертого звена (см. конец пятого раздела), существенно упрощаются, если пренебречь связью флуктуаций энергии с флуктуациями плотностей частиц и импульсов. Отметим также, что не обсуждавшийся в данной статье вопрос о вычислении статических восприимчивостей $\chi(n | n') = (A(n) | A^+(n'))$ и других скалярных произведений подробно рассмотрен в работе [1].

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изложенная в настоящей статье методика позволяет продолжить учет многомодовых корреляций и представляет собой, таким образом, регулярный метод построения функций Грина, альтернативный методу, основанному на теории возмущений по константе взаимодействия. Если мы хотим, например, учесть влияние взаимодействия трех гидродинамических мод, надо дополнить используемую в предыдущих разделах последовательность произведений двух операторов (1.9)–(1.11) произведениями трех операторов,

$$\begin{aligned} a(7) &\equiv a_{q;k,k_1} = A_k \times A_{k_1} \times A_{-k_1-k+q} = (A_k \times A_{k_1}) \times A_{-k_1-k+q}, \\ a(8) &\equiv a_{q;k,k_1}(p) = A_k \times A_{k_1} a_{-k_1-k+q}(p), \\ a(9) &\equiv a_{q;k,k_1}(p, p_1) = A_k a_{k_1}(p_1) a_{-k_1-k+q}(p), \\ a(10) &\equiv a_{q;k,k_1}(p, p_1, p_2) = a_k(p_2) a_{k_1}(p_1) a_{-k_1-k+q}(p), \end{aligned} \tag{8.1}$$

и построить уравнения для неприводимых функций исходя из (2.25) при $n = 7, \dots, 10$ и всех соотношений, установленных во втором разделе, используя все те же уравнения движения (1.5), (1.6), (1.6a). Отметим существенное значение принятого в (8.1) и предыдущих разделах порядка следования операторов и соответственно звеньев цепочки уравнений. Как и в случае, рассмотренном в предыдущем разделе, уравнение для функции $G_{q,E;k,k_1;k',k'_1}(p, p_1, p_2 | p', p'_1, p'_2)$ в силу условий неприводимости имеет коэффициенты, выражаемые аналогично (7.18), только через высшие, на этот раз четырехмодовые функции, пропорциональные, как и в случае (7.18), квадрату взаимодействия. Отбрасывая их, т.е. пренебрегая взаимодействием четырех мод и переходя (аналогично переходу от (7.16) к (7.19)) к упрощенному уравнению, получаем замкнутую систему, соответствующую частичному суммированию, учитывающему также и трехмодовые взаимодействия. Этим, в частности, обусловлено то, что остающиеся коэффициенты (см., например, второй член в левой части (7.19)) включают в себя результат обычного суммирования диаграмм, осуществляемого в случае сингулярных потенциалов. Более того, характерное для цепных дробей улучшение сходимости позволяет получить результаты, недоступные для теории возмущений по взаимодействию. Так, в статье [9] на основе изложенного в [10] предварительного варианта предлагаемого метода рассмотрен простой пример системы проводящих электронов, описываемых гамильтонианом БКШ. Не

вводя понятия квазисредних и аномальных функций Грина, уже на втором шаге удается получить известное решение со щелью в спектре возбуждений, неаналитически зависящей от константы взаимодействия. Очевидно также, что предлагаемый метод, проиллюстрированный на примере системы бозонов с парным взаимодействием, является достаточно общим и может быть легко приспособлен для рассмотрения широкого класса задач статистической механики, описываемых уравнениями движения типа (2.27).

Список литературы

- [1] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1999. Т. 118. № 1. С. 105.
- [2] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1999. Т. 119. № 1. С. 142.
- [3] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1990. Т. 85. № 1. С. 124; № 2. С. 258.
- [4] J. S. Ramos, A. A. Gomes. Nuovo Cimento A. 1971. V. 3. P. 441.
- [5] M. Suzuki. Physica. 1971. V. 51. P. 227.
- [6] R. Kubo. J. Phys. Soc. Japan. 1957. V. 12. № 6. P. 570.
- [7] С. Чепмен, Г. Каулинг. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.
- [8] P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook. Phys. Rev. 1954. V. 94. P. 511.
- [9] Д. Н. Зубарев, Ю. А. Церковников. Тр. МИАН. 1986. Т. 175. С. 134.
- [10] Ю. А. Церковников. ТМФ. 1981. Т. 49. № 2. С. 219.

Поступила в редакцию 25.VI.2001 г.