Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. П. Маслов, Ультравторичное квантование и “духи” в квантованной энтропии,
ТМФ, 2001, том 129, номер 3, 464–490

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf548>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 09:15:01

© 2001 г.

В. П. Маслов*

УЛЬТРАВТОРИЧНОЕ КВАНТОВАНИЕ И “ДУ́ХИ” В КВАНТОВАННОЙ ЭНТРОПИИ

Автором ранее была построена теория квантовой термодинамики, в которой сопряженным величинам – давлению и объему, температуре и энтропии, иначе говоря, сопряженным парам экстенсивных и интенсивных величин, аналогичных импульсам и координатам в классической механике, – сопоставляются операторы, подобно тому как это делается в квантовой механике. Показывается, что как в бозонном, так и в фермионном случаях квантованная энтропия, введенная как оператор в специальных пространствах Фока, содержащих новую переменную – так называемый статистический спин, зависит от некоторых переменных, которые не сказываются на физических результатах и поэтому названы автором “ду́хами”.

Понятие квантованной энтропии и теория квантовой термодинамики рассматривались автором в ряде работ. Геометрическое квантование было проведено в работах [1]–[4], а общее квантование подробно изложено в книге [5] и в статьях [6]–[22].

В настоящей статье мы покажем зависимость от некоторых несущественных переменных ультравотрично-квантованной энтропии. Поскольку все понятия достаточно необычные и новые, вновь введем определения, пространства и операторы, которые здесь используются.

Особенно неожиданны в этой аксиоматике определения матрицы плотности и средних значений. Вместо выражения Гиббса $\text{Sp}(e^{-\hat{H}/kT})$ рассматривается следующее выражение для свободной энергии: $\text{Sp}(e^{-\hat{F}/kT})$, где $\hat{F}$ – оператор свободной энергии. Кажется бы, здесь есть противоречие. Но дело в том, что следы берутся в разных пространствах. Однако все полученные таким образом результаты полностью согласуются со всеми известными положениями обычной статистической физики и термодинамики. Иначе говоря, это не противоречит старой теории, но, может быть, даст что-то существенно новое.

Помимо координат точки могут быть еще другие степени свободы. Например, в классической механике это могут быть импульсы, а в квантовой теории – спины или еще какие-нибудь другие степени свободы. В излагаемой здесь теории добавляется еще одна степень свободы (минимальная) – просто номер, т.е. частице, кроме определенного места в пространстве, присваивается еще и номер.

*Московский государственный университет, Москва, Россия

Эти номера можно интерпретировать как своеобразный спин, принимающий бесконечное множество значений. Будем называть его *статистическим спином*. Сам исходный гамильтониан не зависит от этого статистического спина. Однако уравнение Шредингера после ультраволичного квантования будет существенно зависеть от фокковских пространств, учитывающих этот статистический спин [6]–[22], появятся также операторы рождения и уничтожения, которые связаны с этим статистическим спином или, другими словами, с этими номерами. Квантованная энтропия зависит от этого статистического спина и является оператором в пространстве Фока со статистическим спином. Эта процедура аналогична добавлению к уравнению Шредингера члена, включающего взаимодействие спина с постоянным магнитным полем, при этом получается дополнительная матрица в пространстве со спином (уравнение Паули). Оно уже будет существенно зависеть от пространства со спином. Точно так же и ультраволично-квантованная энтропия, вводимая здесь, будет в этом пространстве являться оператором.

Квантование энтропии существенно меняет всю аксиоматику статистической физики и термодинамики. Оказывается, что давление и удельный объем являются не числами, а операторами. Причем коммутатор между ними имеет вид $1/N$, где N – число частиц. Иначе говоря, сопряженные термодинамические величины такие, как давление и объем, которые можно трактовать как импульсы и координаты, в квантовой термодинамике будут устроены так же, как в квантовой механике.

В термодинамике условия на термодинамический потенциал отвечают действию $\int p dq$, где p – импульсы, т.е. объем и минус энтропия, q – координаты, т.е. давление и температура. Аналогом импульсов являются все величины, которые могут быть удельными, иначе говоря экстенсивные величины, а аналогом координат являются интенсивные величины. В квантовой термодинамике, полученной с помощью квантования энтропии и представленной здесь аксиоматики, эти величины будут уже операторами. Например, оператор давления будет равен $\hat{P} = (1/N)(\partial/\partial v)$, где v – удельный объем.

Оказывается, такая точка зрения дает возможность получить асимптотику вблизи точек возникновения новой фазы, в частности в точках возникновения трех фаз одновременно. Ответ дается с помощью функций Эйри или Вебера. Если же рассматривать логарифмический предел полученных выражений, то результатом как раз и будет обычная термодинамика. Однако поправки к главному члену в точках возникновения фаз оказываются довольно существенными. Они аналогичны поправкам к логарифмической асимптотике в теории больших уклонений в фокальных точках [11], [23]. Предложенная автором концепция при больших N и на специальных векторах в пространстве чисел заполнения совпадает с известными результатами. Например, мы получаем естественным образом уравнения Бардина–Купера–Шриффера (БКШ) и Гросса–Питаевского. При этом вводится квантованная энтропия и получаются уравнения, в которых учитывается еще и термодинамика. Эти уравнения новые, но тем не менее точка фазового перехода, получающаяся с их помощью, совпадает с полученной ранее физиками. Последующий переход к классической механике автоматически приводит к уравнениям для газа Ван-дер-Ваальса.

Таким образом, энтропия как бы “вбирает” в себя флуктуации. Рассматривается точное решение, которое и дает соотношение газа Ван-дер-Ваальса, а флуктуации не рассматриваются. Имеется в виду следующее: решение, например, уравнения Лиувилля можно трактовать как некоторую плотность распределения по координатам и импульсам. При этом плотность есть интеграл по импульсам, а значение скорости совпадает со значением момента. Замкнутой системы уравнений при этом не получается. Мы должны учитывать разность между средними значениями – дисперсию. Но если в уравнении Лиувилля рассматривать δ -образное решение (в начальный момент берется δ -функция на лагранжевом многообразии), то такой его вид сохранится и для такого распределения получится замкнутая система уравнений.

Для матрицы плотности Вигнера существует уравнение Вигнера. Если рассматривать δ -образные решения уравнения Вигнера, то мы приходим к задаче, которая фактически сводится к уравнению Шредингера, но записанному как система уравнений: для фазы (ψ -функции) и для ее модуля. Эта пара функций как раз и будет отвечать δ -образному решению уравнения Вигнера. Для нахождения значений плотности и импульса получается замкнутая система уравнений. Она в точности совпадает с уравнением Шредингера, записанным вышеуказанным образом.

По аналогии с уравнением Шредингера уравнение Вигнера переходит при $\hbar \rightarrow 0$ в уравнение Лиувилля. А во что переходит само уравнение Шредингера? Чему оно отвечает? Мы видим, что уравнение Шредингера отвечает специальному решению уравнения Лиувилля – δ -образному решению. Если начальное условие имеет вид $\delta(P(x) - P_0(x))\varphi_0(x)$, то в момент времени t δ -образный вид решения $\delta(P(x, t) - P_0(x))\varphi(x, t)$ сохранится. Тогда получается замкнутая система уравнений для нахождения плотности, скорости и импульса. Таким образом, именно это решение уравнения Лиувилля аналогично решению уравнения Шредингера.

Оказывается, вводя квантованную энтропию, можно писать не само уравнение Шредингера, а уравнение для свободной энергии (иначе говоря, уравнение Шредингера, в которое входит квантованная энтропия, умноженная на температуру), а предельный переход при $\hbar \rightarrow 0$ приводит именно к уравнениям такого вида. То есть решению уравнения, аналогичного уравнению Лиувилля, соответствует точное δ -образное решение нового уравнения – уравнения, содержащего коммутатор не с гамильтонианом H , являющимся внутренней энергией, а с гамильтонианом со свободной энергией, в который входит еще и температура. Оказывается, что не надо рассматривать флуктуации, так как подстановка δ -образного решения приведет к уравнениям гидродинамики для газа Ван-дер-Ваальса.

Как известно, в элементарных формулах для “неравновесной энтропии” идеальных бозе- и ферми-газов [24] подсчитывается число вторичных распределений N_j одинаковых частиц по G_j состояниям. Далее оказывается, что окончательные ответы не зависят от G_j . Именно поэтому мы называем G_j духами. Если свободная энергия F зависит от переменных, то в случае, когда эти переменные имеют физический смысл, производная F по ним дает “сопряженную” термодинамическую величину. Если это не так, то мы называем такую переменную “духом”. С точки зрения нашего определения квантованной

энтропии, так же как и в указанном подсчете состояний, “духи” играют существенную роль.

Дело в том, что оператор квантованной энтропии мы определяем из двух условий: 1) $\text{Sp}_H(e^{-\hat{H}/\Theta})$ и $\text{Sp}_F(e^{-(\hat{H}/\Theta)+\hat{S}})$ должны совпадать (следы и операторы при этом рассматриваются, разумеется, в разных пространствах – в обычном фоксовском пространстве $\mathcal{H}$ и в пространстве со статистическим спином); 2) в члене с энтропией должен возникать большой параметр в экспоненте, чтобы главный член следа совпадал с минимальным собственным значением оператора свободной энергии

$$\overline{\hat{F}} = \overline{\hat{H}} - \Theta \overline{\hat{S}}.$$

Этих условий недостаточно для однозначного определения оператора энтропии, отсюда и возникают лишние переменные – “духи”. Но они не играют существенной роли.

1. БОЗОННЫЙ СЛУЧАЙ

Введем пространства для рассмотрения M парных частиц и K частиц со статистическим спином (номером). Будем считать, что N частиц находятся на трехмерном торе $\mathbf{T}$, длина сторон которого равна L , и частицы обладают спином J . Спиновую переменную будем обозначать буквой σ . Введем дискретную переменную s , которую будем называть статистическим спином (номером), для краткости будем употреблять сокращение статспин. Переменная s принимает значения $1, 2, \dots$. Пусть $N = K + 2M$, где $K, M \geq 0$ – целые числа.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Гильбертово пространство $\mathcal{F}_{K,M}$ состоит из функций

$$\begin{aligned} &\Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_2, \sigma_2, s_2; \dots; x_K, \sigma_K, s_K; y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \\ &\quad y_3, \sigma'_3, y_4, \sigma'_4; \dots; y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M}), \end{aligned} \quad (1)$$

$$x_i, y_j \in \mathbf{T}, \quad \sigma_i, \sigma'_j = 1, 2, \dots, 2J+1, \quad i = 1, 2, \dots, K, \quad j = 1, 2, \dots, 2M,$$

симметричных относительно перестановок троек переменных (x_i, σ_i, s_i) и $(x_{i'}, \sigma_{i'}, s_{i'})$, $i, i' = 1, 2, \dots, K$, и четверок переменных $(y_{2j-1}, \sigma'_{2j-1}, y_{2j}, \sigma'_{2j})$ и $(y_{2j'-1}, \sigma'_{2j'-1}, y_{2j'}, \sigma'_{2j'})$, $j, j' = 1, 2, \dots, 2M$. Кроме того, при фиксированных спиновых переменных σ_i, σ'_j и фиксированных статспиновых переменных s_i , $i = 1, 2, \dots, K$, $j = 1, 2, \dots, 2M$, эти функции являются элементами пространства $L_2(\mathbf{T}^N)$, а также выполняется условие

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma_1=1}^{2J+1} \dots \sum_{\sigma_K=1}^{2J+1} \sum_{\sigma'_1=1}^{2J+1} \dots \sum_{\sigma'_{2M}=1}^{2J+1} \sum_{s_1=1}^{\infty} \dots \sum_{s_K=1}^{\infty} \int \dots \int dx_1 \dots dx_K \times \\ &\quad \times dy_1 dy_2 \dots dy_{2M-1} dy_{2M} |\Psi(x_1, \sigma_1, s_1; x_2, \sigma_2, s_2; \dots; x_K, \sigma_K, s_K; \\ &\quad y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; y_3, \sigma'_3, y_4, \sigma'_4; \dots; y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M})|^2 < \infty. \end{aligned} \quad (2)$$

Левая часть неравенства (2) равна квадрату нормы элемента (1) пространства $\mathcal{F}_{K,M}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Гильбертово пространство $\mathcal{F} = \bigoplus_{K,M=0}^{\infty} \mathcal{F}_{K,M}$ состоит из двух-параметрических последовательностей $\{\Psi_{K,M}\}$, $K, M = 0, 1, \dots$, где член последовательности $\Psi_{K,M}$ является элементом пространства $\mathcal{F}_{K,M}$.

В силу симметрии функций (1) пространство $\mathcal{F}$ является бозонным пространством Фока [25]. Вакуумный вектор пространства $\mathcal{F}$ имеет вид $\Psi_0 = \{\Psi_{K,M}^0\}$, где $\Psi_{K,M}^0 = 0$ при $K > 0$ или $M > 0$, $\Psi_{0,0}^0 = 1$.

Стандартным образом [25] в пространстве $\mathcal{F}$ вводятся операторы рождения и уничтожения двух типов:

$\widehat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$, $\widehat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$ – соответственно операторы рождения и уничтожения пар;

$\widehat{b}^+(x, \sigma, s)$, $\widehat{b}^-(x, \sigma, s)$ – соответственно операторы рождения и уничтожения частиц со статспином.

Введем понятие ультравторичного квантования в бозонном случае.

Пусть $\mathcal{H}$ – бозонное пространство Фока, элементами которого являются последовательности $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, где член последовательности Y_n является функцией $Y_n(x_1, \sigma_1, \dots, x_n, \sigma_n)$ из пространства $L_2((\mathbf{T}^1 \times \{1, \dots, 2J+1\})^n)$, симметричной относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и (x_j, σ_j) , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathcal{H}$ будем обозначать соответственно $\psi^+(x, \sigma)$ и $\psi^-(x, \sigma)$.

Рассмотрим операторнозначный функционал $\hat{\rho}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$, который зависит от функций $b(x, \sigma, s)$, $B(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2)$ таких, что

$$\sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx |b^*(x, \sigma, s)|^2 < \infty, \quad \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 |B(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2)|^2 < \infty,$$

и принимает значения в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{C_{K+2M}}{K!M!} \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \iint dx_1 dx_2 b(x_1, \sigma_1, s) b^*(x_1, \sigma_1, s) \widehat{\psi}^+(x_1, \sigma_1) \widehat{\psi}^-(x_2, \sigma_2) \right)^K \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 B(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \widehat{\psi}^+(y_1, \sigma'_1) \widehat{\psi}^+(y_2, \sigma'_2) \right)^M \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma'_3, \sigma'_4=1}^{2J+1} \iint dy_3 dy_4 B^*(y_3, \sigma'_3, y_4, \sigma'_4) \widehat{\psi}^-(y_3, \sigma'_3) \widehat{\psi}^-(y_4, \sigma'_4) \right)^M \times \\ &\times \exp \left(- \int dz \widehat{\psi}^+(z) \widehat{\psi}^-(z) \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где C_N , $N = 0, 1, 2, \dots$, – последовательность действительных положительных чисел такая, что $C_N = O(1/(N!)^\varepsilon)$ при $N \rightarrow \infty$, $\varepsilon > 0$, числа над операторами обозначают порядок действия этих операторов [26].

Пусть $\hat{A}$ – оператор в пространстве $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть ультравоорично-квантованным оператором $\bar{A}$ в бозонном случае следующий оператор в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \bar{A} = A[\hat{b}^+(\cdot), \hat{b}^-(\cdot), \hat{B}^+(\cdot), \hat{B}^-(\cdot)] \exp \left(- \sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(\cdot, \sigma, s) \hat{b}^-(\cdot, \sigma, s) - \right. \\ \left. - \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 \hat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \hat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \right), \end{aligned} \quad (4)$$

где функционал $A[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$ выражается через $\hat{A}$ и $\hat{\rho}$ следующим образом:

$$A[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] = \text{Sp}(\hat{\rho}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]\hat{A}). \quad (5)$$

1.1. Формальный переход к числам заполнения. Выберем полную ортонормированную в пространстве $L_2(\mathbf{T})$ систему функций $\{\varphi_\alpha(x)\}$, $\alpha = 1, 2, \dots$. Рассмотрим следующую систему векторов в пространстве $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} \Psi_{\{n\}, \{m\}} = \left(\prod_{\alpha=1}^{\infty} \left(\prod_{\sigma=1}^{2J+1} \left(\prod_{s=1}^{\infty} \left(\int dx \hat{b}^+(x, \sigma, s) \varphi_\alpha(x) \right)^{n_{\alpha\sigma s}} \frac{1}{\sqrt{n_{\alpha\sigma s}!}} \right) \right) \right) \times \\ \times \left(\prod_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \left(\prod_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \left(\iint dy_1 dy_2 \varphi_\beta(y_1) \varphi_\gamma(y_2) \hat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \right)^{m_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{1}{\sqrt{m_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}!}} \right) \right) \Psi_0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\{n\}$ – набор целых чисел $n_{\alpha\sigma s} \geq 0$, зависящих от трех параметров $\alpha = 1, 2, \dots$, $\sigma = 1, \dots, 2J+1$, $s = 1, 2, \dots$; $\{m\}$ – набор целых чисел $m_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2} \geq 0$, зависящих от четырех параметров $\beta, \gamma = 1, 2, \dots$, $\sigma'_1, \sigma'_2 = 1, \dots, 2J+1$.

Система векторов (6) полная в пространстве $\mathcal{F}$.

Представлением ультравоорично-квантованного оператора $\bar{A}$ в числах заполнения является следующая матрица:

$$A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) = (\Psi_{\{n\}, \{m\}}, \bar{A} \Psi_{\{n'\}, \{m'\}}). \quad (7)$$

1.2. Символ ультравооричного квантования оператора. Символом оператора $\bar{A}$ вида (4) будем называть функционал (5). Имеет место следующая связь между представлением чисел заполнения и символом ультравоорично-квантованного оператора.

Пусть наборы чисел $\{n\}, \{m\}, \{n'\}, \{m'\}$ такие, что

$$\begin{aligned} n_{\alpha\sigma s} &= K \delta_{\alpha\alpha_0} \delta_{\sigma\sigma_0} \delta_{ss_0}, & m_{\beta\gamma\sigma\sigma'} &= M \delta_{\beta\beta_0} \delta_{\gamma\gamma_0} \delta_{\sigma\sigma_1} \delta_{\sigma'\sigma_2}, \\ n'_{\alpha\sigma s} &= K \delta_{\alpha\alpha'_0} \delta_{\sigma\sigma'_0} \delta_{ss'_0}, & m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'} &= M \delta_{\beta\beta'_0} \delta_{\gamma\gamma'_0} \delta_{\sigma\sigma'_1} \delta_{\sigma'\sigma'_2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим функции

$$\begin{aligned} b_1(x, \sigma, s) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{n_{\alpha\sigma s}} \varphi_{\alpha}(x), \\ b_2(x, \sigma, s) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \sqrt{n'_{\alpha\sigma s}} \varphi_{\alpha}(x), \\ B_1(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2) &= \sum_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \sqrt{m_{\beta\gamma\sigma\sigma'}} \varphi_{\beta}(y_1) \varphi_{\gamma}(y_2), \\ B_2(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2) &= \sum_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \sqrt{m'_{\beta\gamma\sigma\sigma'}} \varphi_{\beta}(y_1) \varphi_{\gamma}(y_2). \end{aligned}$$

При $K, M \rightarrow \infty$ справедливо асимптотическое равенство

$$A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) \sim A[b_2^*(\cdot), b_1(\cdot), B_2^*(\cdot), B_1(\cdot)]. \quad (8)$$

1.3. Проекция ультратоворично-квантованного оператора на N -частичное подпространство. Пусть числа $K_0, M_0 \geq 0$ такие, что $N = K_0 + 2M_0$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}$ подпространство, элементами которого являются двухпараметрические последовательности $\{\Psi_{K,M}\}$ такие, что

$$\begin{aligned} \Psi_{K,M} &= 0, \quad K \neq K_0 \text{ или } M \neq M_0, \\ \Psi_{K_0, M_0} &= \Psi_{K_0, M_0}(x_1, \sigma_1, s_1; \dots; x_{K_0}, \sigma_{K_0}, s_{K_0}; \\ &\quad y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \dots; y_{2M_0-1}, \sigma'_{2M_0-1}, y_{2M_0}, \sigma'_{2M_0}) \end{aligned} \quad (9)$$

— функция, симметричная относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и $(x_{i'}, \sigma_{i'})$, симметричная относительно перестановок пар переменных (y_j, σ'_j) и $(y_{j'}, \sigma'_{j'})$ и симметричная относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и (y_j, σ'_j) , $i, i' = 1, \dots, K_0$, $j, j' = 1, \dots, 2M_0$. Обозначим это подпространство $\mathcal{F}_{K_0, M_0}^{\text{Symm}}$. Пусть оператор $\hat{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ такой, что вектор $\{Y_n\}$ он переводит в вектор $\{\tilde{Y}_n\}$, где

$$\tilde{Y}_n(x_1, \dots, x_n) = A_n \left(\overset{2}{x_1}, \dots, \overset{2}{x_n}, -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_n} \right) \tilde{Y}_n(x_1, \dots, x_n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 1. Если Ψ — элемент подпространства $\mathcal{F}_{K_0, M_0}^{\text{Symm}}$, то

$$\begin{aligned} (\bar{A}\Psi)_{K_0, M_0} &= C_N \cdot N! \cdot A_N \left(\overset{2}{x_1}, \dots, \overset{2}{x_{K_0}}, \overset{1}{y_1}, \dots, \overset{1}{y_{2M_0}}, \right. \\ &\quad \left. -i \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial x_{K_0}}, -i \frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, -i \frac{\partial}{\partial y_{2M_0}} \right) \times \\ &\quad \times \Psi_{K_0, M_0}(x_1, \sigma_1, s_1; \dots; x_{K_0}, \sigma_{K_0}, s_{K_0}; \\ &\quad y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \dots; y_{2M_0-1}, \sigma'_{2M_0-1}, y_{2M_0}, \sigma'_{2M_0}). \end{aligned} \quad (11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент $\Psi = \{\Psi_{K,M}\}$ пространства $\mathcal{F}$ представляется в виде [1]

$$\begin{aligned} \Psi = & \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{K!M!}} \sum_{\sigma_1=0}^{2J+1} \cdots \sum_{\sigma_K=0}^{2J+1} \sum_{\sigma'_1=0}^{2J+1} \sum_{\sigma'_2=0}^{2J+1} \cdots \\ & \cdots \sum_{\sigma'_{2M-1}=0}^{2J+1} \sum_{\sigma'_{2M}=0}^{2J+1} \sum_{s_1=1}^{\infty} \cdots \sum_{s_K=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_K dy_1 \dots dy_{2M} \times \\ & \times \Psi_{K,M}(x_1, \sigma_1, s_1; \dots; x_K, \sigma_K, s_K; y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2; \dots; y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M}) \times \\ & \times \hat{b}^+(x_1, \sigma_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_K, \sigma_K, s_K) \times \\ & \times \hat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \dots \hat{B}^+(y_{2M-1}, \sigma'_{2M-1}, y_{2M}, \sigma'_{2M}) \Psi_0. \end{aligned} \quad (12)$$

Кроме того, операторы

$$\begin{aligned} & \exp \left(- \sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, \sigma, s) \hat{b}^-(x, \sigma, s) - \right. \\ & \quad \left. - \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 \hat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \hat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \right), \quad (13) \\ & \exp \left(- \int dz \hat{\psi}^+(z) \hat{\psi}^-(z) \right) \end{aligned}$$

являются ортогональными проекторами на вакуумный вектор соответственно в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ [1].

Действуя на вектор (12) оператором (4) и учитывая свойства операторов (13) и операторов рождения и уничтожения $\hat{\psi}^{\pm}(x)$, $\hat{b}^{\pm}(x, \sigma, s)$, $\hat{B}^{\pm}(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$:

$$\begin{aligned} & [\hat{\psi}^-(x), \hat{\psi}^+(y)] = \delta(x - y), \\ & [\hat{b}^-(x_1, \sigma_1, s_1), \hat{b}^+(x_2, \sigma_2, s_2)] = \delta_{\sigma_1 \sigma_2} \delta_{s_1 s_2} \delta(x_1 - x_2), \quad (14) \\ & [\hat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2), \hat{B}^+(y_3, \sigma'_3, y_4, \sigma'_4)] = \delta_{\sigma'_1 \sigma'_3} \delta_{\sigma'_2 \sigma'_4} \delta(y_1 - y_3) \delta(y_2 - y_4), \end{aligned}$$

где остальные коммутаторы равны нулю,

$$\hat{\psi}^-(x) Y_0 = 0, \quad \hat{b}^-(x, \sigma, s) \Psi_0 = 0, \quad \hat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \Psi_0 = 0, \quad (15)$$

получим утверждение теоремы.

Из теоремы 1 следует, что оператор $\hat{A}$ на подпространстве $\mathcal{F}_{K,M}$ зависит от $N = K + 2M$ и не зависит от K и M в отдельности.

Из теоремы 1 также следует соответствие алгебр операторов A , $\hat{A}$, $\tilde{A}$.

Пусть ψ_N – элемент N -частичного подпространства. В пространстве $\mathcal{F}$ ему отвечает последовательность элементов $\{\tilde{\psi}_N\}$ таких, что $\tilde{\psi}_{N'} = 0$ при $N' \neq N$ и $\tilde{\psi}_N = \psi_N$. В силу теоремы 1 имеет место равенство $\hat{A}\{\tilde{\psi}_N\} = \{A_N \psi_N\}$.

Значит,

$$\tilde{A}^2\{\tilde{\psi}_N\} = \tilde{A}\{A_N\tilde{\psi}_N\} = \{A_N^2\tilde{\psi}_N\}.$$

Очевидно, что

$$f(\tilde{A}\{\tilde{\psi}_N\}) = \{f(A_N)\tilde{\psi}_N\}.$$

Аналогично для $f(\hat{A})$.

2. ФЕРМИОННЫЙ СЛУЧАЙ

Введем понятие ультравторичного квантования в фермионном случае. Пусть $\mathcal{H}$ — фермионное пространство Фока, элементами которого являются последовательности $\{Y_n\}$, $n = 0, 1, \dots$, где член последовательности Y_n является функцией $Y_n(x_1, \sigma_1, \dots, x_n, \sigma_n)$ из пространства $L_2((\mathbf{T}^1 \times \{1, \dots, 2J+1\})^n)$, антисимметричной относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и (x_j, σ_j) , $i, j = 1, 2, \dots, n$. Операторы рождения и уничтожения в пространстве $\mathcal{H}$ будем обозначать соответственно $\psi^+(x, \sigma)$ и $\psi^-(x, \sigma)$.

Рассмотрим операторнозначный функционал $\hat{\rho}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$, который зависит от функций $b(x, \sigma, s)$, $B(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2)$ таких, что

$$\sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx |b^*(x, \sigma, s)|^2 < \infty, \quad \sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 |B(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2)|^2 < \infty,$$

и принимает значения в пространстве $\mathcal{H}$:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)] &= \sum_{K=0}^{\infty} \sum_{M=0}^{\infty} \frac{C_{K+2M}}{K!M!} \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma_1, \sigma_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 B(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \hat{\psi}^+(y_1, \sigma'_1) \hat{\psi}^+(y_2, \sigma'_2) \right)^M \times \\ &\times \sum_{\sigma_1=1}^{2J+1} \dots \sum_{\sigma_K=1}^{2J+1} \sum_{\sigma_{K+1}=1}^{2J+1} \dots \sum_{\sigma_{2K}=1}^{2J+1} \sum_{s_1=1}^{\infty} \dots \sum_{s_K=1}^{\infty} \iint dx_1 \dots dx_K dx_{K+1} \dots dx_{2K} \times \\ &\times \hat{\psi}^+(x_1, \sigma_1) b(x_1, \sigma_1, s_1) \dots \hat{\psi}^+(x_K, \sigma_K) b(x_K, \sigma_K, s_K) \times \\ &\times \hat{P}_0 b^*(x_{2K}, \sigma_{2K}, s_K) \hat{\psi}^-(x_{2K}, \sigma_{2K}) \dots b^*(x_{K+1}, \sigma_{K+1}, s_1) \hat{\psi}^-(x_{K+1}, \sigma_{K+1}) \times \\ &\times \left(\sum_{\sigma'_3, \sigma'_4=1}^{2J+1} \iint dy_3 dy_4 B^*(y_3, \sigma'_2, y_4, \sigma'_4) \hat{\psi}^-(y_4, \sigma_4) \hat{\psi}^-(y_3, \sigma_3) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где C_N , $N = 0, 1, 2, \dots$, — последовательность действительных положительных чисел, удовлетворяющая при $N \rightarrow \infty$ оценке $C_N = O(1/(N!)^\varepsilon)$ для некоторого $\varepsilon > 0$, $\hat{P}_0$ — ортогональный проектор на вакуумный вектор в пространстве $\mathcal{H}$.

Пусть $\hat{A}$ — оператор в пространстве $\mathcal{H}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем называть ультравоориочно-квантованным оператором $\hat{A}$ в фермионном случае оператор вида (4) в пространстве $\mathcal{F}$, в котором функционал $A[b^*(\cdot), b(\cdot), B^*(\cdot), B(\cdot)]$ выражается через $\hat{A}$ по формуле (5), а $\hat{\rho}$ имеет вид (16).

2.1. Числа заполнения и символ ультравоориочно-квантованного оператора. Формальный переход к числам заполнения в фермионном случае производится совершенно аналогично бозонному случаю (см. п. 1.1).

Символ ультравоориочно-квантованного оператора в фермионном случае определяется так же, как в бозонном, и для него справедливо асимптотическое равенство, аналогичное (8).

В случае произвольных наборов чисел заполнения имеет место следующее тождество, справедливое также и для бозонов:

$$\begin{aligned}
 A(\{n\}, \{m\}; \{n'\}, \{m'\}) &= \left(\prod_{\alpha=1}^{\infty} \prod_{\sigma=1}^{2J+1} \prod_{s=1}^{\infty} \sqrt{n_{\alpha\sigma s}! n'_{\alpha\sigma s}!} \right) \times \\
 &\times \left(\prod_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \prod_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \sqrt{m_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}! m'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}!} \right) \times \\
 &\times \int \cdots \int \left(\prod_{\alpha=1}^{\infty} \prod_{\sigma=1}^{2J+1} \prod_{s=1}^{\infty} \frac{dz_{\alpha\sigma s}}{2\pi i (z_{\alpha\sigma s})^{n_{\alpha\sigma s}+1}} \frac{dz'_{\alpha\sigma s}}{2\pi i (z'_{\alpha\sigma s})^{n'_{\alpha\sigma s}+1}} \right) \times \\
 &\times \left(\prod_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \prod_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \frac{dw_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}}{2\pi i (w_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2})^{m_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}+1}} \frac{dw'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}}{2\pi i (w'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2})^{m'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}+1}} \right) \times \\
 &\times A[b_2^*(\cdot), b_1(\cdot), B_2^*(\cdot), B_1(\cdot)], \tag{17}
 \end{aligned}$$

где однократные интегралы по переменным $z_{\alpha\sigma s}, z'_{\alpha\sigma s}, w_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}, w'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}$ берутся в комплексной плоскости по любому контуру C , обходящему нулевую точку против часовой стрелки, а функции $b_2(x, \sigma, s), b_1(x, \sigma, s), B_1(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2), B_2(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$ зависят от $z_{\alpha\sigma s}, z'_{\alpha\sigma s}, w_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}, w'_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
 b_2(x, \sigma, s) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{\alpha}(x) z_{\alpha\sigma s}, \\
 b_1(x, \sigma, s) &= \sum_{\alpha=1}^{\infty} \varphi_{\alpha}(x) (z'_{\alpha\sigma s})^*, \\
 B_1(y_1, \sigma_1, y_2, \sigma_2) &= \sum_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \varphi_{\beta}(y_1) \varphi_{\gamma}(y_2) w_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2}, \\
 B_2(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) &= \sum_{\beta, \gamma=1}^{\infty} \varphi_{\beta}(y_1) \varphi_{\gamma}(y_2) (w_{\beta\gamma\sigma'_1\sigma'_2})^*.
 \end{aligned}$$

2.2. Проекция ультравторично-квантованного оператора на N -частичное подпространство. Пусть числа $K_0, M_0 \geq 0$ такие, что $N = K_0 + 2M_0$. Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}$ подпространство, элементами которого являются двухпараметрические последовательности $\{\Psi_{K,M}\}$ вида (9), в которых функция ψ_{K_0, M_0} антисимметрична относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и $(x_{i'}, \sigma_{i'})$, антисимметрична относительно перестановок пар переменных (y_j, σ'_j) и $(y_{j'}, \sigma'_{j'})$ и антисимметрична относительно перестановок пар переменных (x_i, σ_i) и (y_j, σ'_j) , $i, i' = 1, \dots, K_0$, $j, j' = 1, \dots, 2M_0$. Обозначим это подпространство $\mathcal{F}_{K_0, M_0}^{\text{Asymm}}$. Пусть оператор $\hat{A}$ в пространстве $\mathcal{H}$ такой, что вектор $\{Y_n\}$ он переводит в вектор $\{\tilde{Y}_n\}$ (10).

Имеет место следующая

ТЕОРЕМА 2. Если Ψ – элемент подпространства $\mathcal{F}_{K_0, M_0}^{\text{Asymm}}$, то выполняется равенство (11).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Любой элемент $\Psi = \{\Psi_{K,M}\}$ пространства $\mathcal{F}$ имеет вид (12) [1]. Кроме того, операторы

$$\begin{aligned} \exp \left(- \sum_{\sigma=1}^{2J+1} \sum_{s=1}^{\infty} \int dx \hat{b}^+(x, \sigma, s) \hat{b}^-(x, \sigma, s) - \right. \\ \left. - \sum_{\sigma'_1, \sigma'_2=1}^{2J+1} \iint dy_1 dy_2 \hat{B}^+(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \hat{B}^-(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2) \right) \end{aligned} \quad (18)$$

и $\hat{P}_0$ являются ортогональными проекторами на вакуумный вектор соответственно в пространствах $\mathcal{F}$ и $\mathcal{H}$ [1].

Действуя на вектор ψ оператором $\hat{A}$ и учитывая свойства операторов (18) и $\hat{P}_0$ и свойства (14), (15) операторов рождения и уничтожения $\hat{\psi}^{\pm}(x)$, $\hat{b}^{\pm}(x, \sigma, s)$, $\hat{B}^{\pm}(y_1, \sigma'_1, y_2, \sigma'_2)$, получим утверждение теоремы.

3. МАТРИЦА ПЛОТНОСТИ ДЛЯ ФЕРМИОНОВ

3.1. Случай отсутствия операторов рождения-уничтожения пар $\hat{B}^+$, $\hat{B}^-$.

Рассмотрим уравнение для матрицы плотности системы N фермионов

$$i \frac{\partial \rho}{\partial t}(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t) = (H_N(x) - H_N(y)) \rho(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t), \quad (19)$$

где $H_N(x)$ – оператор в пространстве $L_2(\mathbf{T}^N)$ вида

$$\begin{aligned} H_N(x) \Phi(x_1, \dots, x_N) = \int dy (T(x_1, y) \Phi(y, x_2, \dots, x_N) + \\ + T(x_2, y) \Phi(x_1, y, x_3, \dots, x_N) + \dots \\ \dots + T(x_N, y) \Phi(x_1, x_2, \dots, x_{N-1}, y)) + \\ + \iint dz dw (V(x_1, x_2; z, w) \Phi(z, w, x_3, \dots, x_{N-1}, x_N) + \dots \\ \dots + V(x_{N-1}, x_N; z, w) \Phi(x_1, x_2, x_3, \dots, x_{N-2}, z, w)), \end{aligned} \quad (20)$$

а функция $\rho(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t)$ является антисимметричной относительно перестановок переменных x_j и x_k и антисимметричной относительно перестановок переменных y_j и y_k , $j, k = 1, \dots, N$, и удовлетворяет условиям

$$\rho(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t) = \rho^*(y_1, x_1; \dots; y_N, x_N; t), \quad (21)$$

$$\int \dots \int dx_1 \dots dx_N \rho(x_1, x_1; \dots; x_N, x_N; t) < \infty. \quad (22)$$

В силу антисимметрии функции $\rho(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t)$ относительно переменных x и переменных y эта функция симметрична относительно перестановок пар переменных (x_j, y_j) и (x_k, y_k) , $j, k = 1, \dots, N$. Поэтому к уравнению (20) можно применить процедуру ультраволичного квантования, которая немного отличается от обычной.

Введем пространство $\mathcal{L}_N$, элементами которого являются функции

$$\Phi(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N) \in L_2(\mathbf{T}^{2N}), \quad (23)$$

симметричные относительно перестановок пар переменных (x_j, y_j) и (x_k, y_k) , $j, k = 1, \dots, N$. Рассмотрим пространство $\mathcal{L} = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{L}_N$, которое состоит из последовательностей $\{\Phi_N\}$, $N = 0, 1, \dots$, функций $\Phi_N \in \mathcal{L}_N$. Пространство $\mathcal{L}$ является бозонным фоксовским, и в нем можно ввести операторы рождения $\hat{b}^+(x, y)$ и уничтожения $\hat{b}^-(x, y)$, а также вакуумный вектор Φ_0 такие, что

$$\begin{aligned} [\hat{b}^-(x, y), \hat{b}^+(x', y')] &= \delta(x - x')\delta(y - y'), \\ [\hat{b}^\pm(x, y), \hat{b}^\pm(x', y')] &= 0, \\ \hat{b}^-(x, y)\Phi_0 &= 0, \quad (\Phi_0, \Phi_0) = 1. \end{aligned} \quad (24)$$

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{L}$ следующие операторы:

$$\begin{aligned} \overline{H} &= \sum_{N=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N \hat{b}^{+2}(x_1, y_1) \dots \hat{b}^{+2}(x_N, y_N) \times \\ &\times (H_N(x) - H_N(y)) \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}^1(\hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_N, y_N)) \times \\ &\times \exp\left(-\iint dz dw \hat{b}^{+2}(z, w) \hat{b}^-(z, w)\right), \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \overline{E} &= \sum_{N=0}^{\infty} \int \dots \int dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N \hat{b}^{+2}(x_1, y_1) \dots \hat{b}^{+2}(x_N, y_N) \times \\ &\times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}^1(\hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_N, y_N)) \times \\ &\times \exp\left(-\iint dz dw \hat{b}^{+2}(z, w) \hat{b}^-(z, w)\right), \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{N}} = & \sum_{N=0}^{\infty} N \int \cdots \int dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N \hat{b}^+(x_1, y_1) \dots \hat{b}^+(x_N, y_N) \times \\ & \times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}(\hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_N, y_N)) \times \\ & \times \exp\left(-\iint dz dw \hat{b}^+(z, w) \hat{b}^-(z, w)\right), \end{aligned}$$

где $\text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}$ – оператор антисимметризации по переменным $x_1, \dots, x_N$. Оператор $\overline{\widehat{H}}$ является ультравторично-квантованным гамильтонианом уравнения для матрицы плотности (20), $\overline{\widehat{N}}$ – ультравторично-квантованный оператор числа частиц, $\overline{\widehat{E}}$ – ультравторично-квантованный единичный оператор. Имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $\Phi(t)$ – функция аргумента $t \in \mathbb{R}$ со значением в $\mathcal{L}$, которая удовлетворяет уравнениям

$$i\overline{\widehat{E}}\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t) = \overline{\widehat{H}}\Phi(t), \quad \overline{\widehat{N}}\Phi(t) = N\overline{\widehat{E}}\Phi(t), \quad \overline{\widehat{E}}\Phi(t) \neq 0. \quad (27)$$

Тогда функция

$$\Phi_N(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t) = (\Phi_0, \hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_N, y_N) \overline{\widehat{E}}\Phi(t))$$

является решением уравнения (20).

Рассмотрим случай, когда коммутаторы (14) можно считать малыми. Тогда асимптотика решений задачи (27) выражается через периодические решения гамильтоновой системы, отвечающей гамильтониану

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(b^*(\cdot), b(\cdot)) = & \left(\sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N b^*(x_1, y_1) \dots b^*(x_N, y_N) \times \right. \\ & \times \left(H_N(x) - H_N(y) \right) \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}(b(x_1, y_1) \dots b(x_N, y_N)) \Big) \times \\ & \times \left(\sum_{N=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dy_1 \dots dx_N dy_N b^*(x_1, y_1) \dots b^*(x_N, y_N) \times \right. \\ & \times \left. \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_N}(b(x_1, y_1) \dots b(x_N, y_N)) \right)^{-1}. \end{aligned} \quad (28)$$

Асимптотика решений уравнений (27) таких, что

$$\Phi_N^*(x_1, y_1; \dots; x_N, y_N; t) = \Phi_N(y_1, x_1; \dots; y_N, x_N; t),$$

может быть выражена через решения гамильтоновой системы, для которых справедливо $b(x, y, t) = b^*(y, x, t)$. Система уравнений Гамильтона при таком условии принимает вид

$$\begin{aligned} i \frac{\partial}{\partial t} G(x_1, x_2) = & \int dz T(x_2, z) G(x_1, z) - \int dz T(z, x_1) G(z, x_2) + \\ & + \iint dy dz dw V(x_2, y, z, w) (G(x_1, z) G^*(y, w) - G(x_1, w) G^*(y, z)) - \\ & - \iint dy dz dw V(z, w, x_1, y) (G(z, x_2) G(w, y) - G(w, x_2) G(z, y)), \quad (29) \end{aligned}$$

где функция $G(x, y)$ выражается через функцию $b(x, y)$ как решение уравнения

$$G(x, y) = \int dz b(x, z) b^*(y, z) + \iint dz dw b(x, z) b^*(w, z) G(w, y).$$

3.2. Учет операторов B^+ , B^- и температурные уравнения БКШ–Боголюбова. Ультраворичное квантование уравнения (20) можно провести с учетом пар. В этом случае в пространстве $\mathcal{L}$ появятся операторы $\hat{B}_1^\pm(x_1, x_2)$ и $\hat{B}_2^\pm(x_1, x_2)$, а операторы $\overline{\hat{H}}$, $\overline{\hat{E}}$ примут вид

$$\begin{aligned} \overline{\hat{H}} = & \sum_{k,m=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dy_1 \dots dx_{k+2m} dy_{k+2m} \hat{b}^+(x_1, y_1) \dots \hat{b}^+(x_k, y_k) \times \\ & \times \hat{B}_1^+(x_{k+1}, x_{k+2}) \hat{B}_2^+(y_{k+1}, y_{k+2}) \dots \hat{B}_1^+(x_{k+2m-1}, x_{k+2m}) \hat{B}_2^+(y_{k+2m-1}, y_{k+2m}) \times \\ & \times (H_{k+2m}(x) - H_{k+2m}(y)) \times \\ & \times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{k+2m}} \text{Asymm}_{y_1, \dots, y_{k+2m}} (\hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_k, y_k) \hat{B}_1^-(x_{k+1}, x_{k+2}) \times \\ & \times \hat{B}_2^-(y_{k+1}, y_{k+2}) \dots \hat{B}_1^-(x_{k+2m-1}, x_{k+2m}) \hat{B}_2^-(y_{k+2m-1}, y_{k+2m})) \times \\ & \times \exp \left(- \iint dx dy \hat{b}^+(x, y) \hat{b}^-(x, y) - \iint dz dw \hat{B}_1^+(z, w) \hat{B}_1^-(z, w) - \right. \\ & \left. - \iint dz' dw' \hat{B}_2^+(z', w') \hat{B}_2^-(z', w') \right), \quad (30) \\ \overline{\hat{E}} = & \sum_{k,m=0}^{\infty} \int \cdots \int dx_1 dy_1 \dots dx_{k+2m} dy_{k+2m} \hat{b}^+(x_1, y_1) \dots \hat{b}^+(x_k, y_k) \times \\ & \times \hat{B}_1^+(x_{k+1}, x_{k+2}) \hat{B}_2^+(y_{k+1}, y_{k+2}) \dots \hat{B}_1^+(x_{k+2m-1}, x_{k+2m}) \times \\ & \times \hat{B}_2^+(y_{k+2m-1}, y_{k+2m}) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \text{Asymm}_{x_1, \dots, x_{k+2m}} \text{Asymm}_{y_1, \dots, y_{k+2m}} (\hat{b}^-(x_1, y_1) \dots \hat{b}^-(x_k, y_k) \hat{B}_1^-(x_{k+1}, x_{k+2}) \times \\
& \times \hat{B}_2^-(y_{k+1}, y_{k+2}) \dots \hat{B}_1^-(x_{k+2m-1}, x_{k+2m}) \hat{B}_2^-(y_{k+2m-1}, y_{k+2m})) \times \\
& \times \exp \left(- \iint dx dy \hat{b}^+(x, y) \hat{b}^-(x, y) - \iint dz dw \hat{B}_1^+(z, w) \hat{B}_1^-(z, w) - \right. \\
& \left. - \iint dz' dw' \hat{B}_2^+(z', w') \hat{B}_2^-(z', w') \right). \tag{31}
\end{aligned}$$

Символы операторов (13) и (16) определяют следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} G(x_1, x_2) = & \int dz (T(x_2, z)G(x_1, z) - T(z, x_1)G(z, x_2)) + \\
& + \iiint dy dz dw V(x_2, y; z, w) (G(x_1, z)G(y, w) - \\
& - G(x_1, w)G(y, z) - R^*(x_1, y)R(w, z)) - \\
& - \iiint dy dz dw V(w, z; x_1, y) (G(z, x_2)G(w, y) - \\
& - G(w, x_2)G(z, y) - R(y, x_2)R^*(z, w)), \tag{32}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i \frac{\partial}{\partial t} R(x_1, x_2) = & \int dz (T(x_2, z)R(x_1, z) + \\
& + T(x_1, z)R(z, x_2)) + \iint dz dw V(x_1, x_2; z, w) R(z, w) + \\
& + \iiint dy dz dw V(x_2, y; z, w) (G(y, w)R(x_1, z) - \\
& - G(y, z)R(x_1, w) - G(y, x_1)R(w, z)) + \\
& + \iiint dy dz dw V(x_1, y; w, z) (G(y, w)R(z, x_2) - \\
& - G(y, z)R(w, x_2) - G(y, x_2)R(z, w)), \tag{33}
\end{aligned}$$

$$G(x, y) = G^*(y, x), \quad R(x, y) = -R(y, x).$$

При $R = 0$ система уравнений (32), (33) сводится к уравнению (29). Уравнения (32), (33) хорошо известны в теории сверхпроводимости БКШ. Рассмотрим в пространстве $L_2(\mathbf{T})$ операторы $\hat{H}$, $\hat{B}$, $\hat{G}$ и $\hat{R}$, ядра которых соответственно суть

$$\begin{aligned}
H(x, y) &= T(x, y) + \iint dz dw (V(x, z; y, w) - V(x, z; w, y))G(z, w), \\
B(x, y) &= \iint dz dw V(x, y; z, w)R(z, w),
\end{aligned}$$

$G(x, y)$ и $R(x, y)$. Система уравнений (32), (33) может быть записана в виде

$$i \frac{\partial}{\partial t} \hat{A} = [\hat{A}, \hat{L}], \tag{34}$$

где $\hat{A}$ и $\hat{L}$ – следующие операторы в $L_2(\mathbf{T}) \oplus L_2(\mathbf{T})$:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{G} - \frac{1}{2} & -\hat{R}^* \\ \hat{R} & -\hat{G}^* + \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad \hat{L} = \begin{pmatrix} \hat{H}^* & -\hat{B}^* \\ \hat{B} & -\hat{H} \end{pmatrix}. \quad (35)$$

Решения уравнения (34), не зависящие от t , могут быть получены из следующего самосогласованного ($\hat{H}$ и $\hat{B}$ зависят от $\hat{G}$ и $\hat{R}$) уравнения:

$$\hat{A} = f(\hat{L}), \quad (36)$$

где f – произвольная функция. Для определения свободной энергии системы фермионов можно применить “пуантилистическую” картину, из которой следует, что $f(\xi)$ в (36) имеет вид $f(\xi) = (e^{\xi/\theta} + 1)^{-1}$. Теперь интегральное уравнение совпадает с температурными уравнениями БКШ–Боголюбова. Из них определяются температура фазового перехода из сверхпроводящего состояния в нормальное и скачок теплоемкости при этом переходе. Таким образом, ультраворичное квантование и отвечающий ему символ (полагаем операторы c -числами) позволяют получить известные уравнения непосредственно. Учет квантованной энтропии позволяет получить нечто большее – зависимость температуры фазового перехода от тока.

4. “ДУ́ХИ”

4.1. Вторично-квантованная энтропия. В качестве примера рассмотрим систему из N тождественных бозонов. Поместим ее на трехмерный тор $\mathbf{T}_1$, длина сторон которого равна L . Оператор Гамильтона этой системы действует в пространстве симметричных функций из $L_2(\mathbf{T}_1^N)$; предположим, что он имеет вид

$$H_{1N} = \sum_{j=1}^N \mathcal{E} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad (37)$$

где $x_j = (x_j^1, x_j^2, x_j^3) \in \mathbf{T}_1$, $\hbar > 0$ – постоянная Планка, $\mathcal{E}(p) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ – функция, для которой справедливо равенство

$$\mathcal{E} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} Gl + \frac{2\pi\hbar}{L} n \right) = \mathcal{E} \left(\frac{2\pi\hbar}{L} Gl \right), \quad (38)$$

где $l = (l_1, l_2, l_3)$, l_1, l_2, l_3 – целые числа, $G > 1$ – целое число, $n = (n_1, n_2, n_3)$, $0 \leq n_1, n_2, n_3 < G$ – целые числа.

Введем тор $\mathbf{T}_2$, длина сторон которого равна L/G . Рассмотрим пространство симметричных функций из $L_2(\mathbf{T}_2^N)$. Введем в этом пространстве оператор $H_{2N}(\theta)$, зависящий от параметра $\theta > 0$. Рассмотрим полную систему функций вида

$$\Psi_{\{q\}}(y_1, \dots, y_N) = \text{Symm}_{y_1, \dots, y_N} e^{\frac{i}{\hbar}(q_1 y_1 + \dots + q_N y_N)}, \quad (39)$$

где $\{q\}$ – набор векторов $q_1, q_2, \dots, q_N$, каждый из которых имеет вид $q = (2\pi\hbar/L)G \cdot (n_1, n_2, n_3)$, n_1, n_2, n_3 – целые числа, $y_j \in \mathbf{T}_2$, $\text{Symm}_{y_1, \dots, y_N}$ – оператор симметризации относительно переменных $y_1, \dots, y_N$. На функции (39) оператор H_{2N} действует следующим образом:

$$(H_{2N}\Psi_{\{q\}})(y_1, \dots, y_N) = \left(\sum_q \mathcal{E}(q)N_q - \theta \sum_q \ln \frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q!(G^3 - 1)!} \right) \Psi_{\{q\}}(y_1, \dots, y_N), \quad (40)$$

где $q = (2\pi\hbar/L)G \cdot (n_1, n_2, n_3)$, $\sum_q$ – обозначение для суммы по множеству всех таких векторов q , N_q – целые числа, зависящие от q и от набора $\{q\}$:

$$N_q = \sum_{s=1}^N \delta_{qq_s},$$

где $\delta_{qq'} = 1$ при $q = q'$ и $\delta_{qq'} = 0$ при $q \neq q'$.

Имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Справедливо равенство*

$$\text{Sp } e^{-\frac{H_1 N}{\theta}} = \text{Sp } e^{-\frac{H_{2N}(\theta)}{\theta}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Полная система собственных функций оператора H имеет вид

$$\Psi(x_1, \dots, x_N) = \text{Symm}_{x_1, \dots, x_N} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)}, \quad (41)$$

где $\{p\}$ – набор векторов $p_1, \dots, p_N$, каждый из которых имеет вид $p_j = (2\pi\hbar/L)G \cdot (n_1, n_2, n_3)$, $x_j \in \mathbf{T}_1$. Собственные значения оператора H_{1N} , отвечающие (41), суть

$$\lambda_{\{p\}} = \sum_{j=1}^N \mathcal{E}(p_j). \quad (42)$$

В силу свойства (38) спектр (42) является вырожденным. Все собственные значения (42) могут быть представлены в виде

$$E_{\{N\}} = \sum_q \mathcal{E}(q)N_q, \quad (43)$$

где $\{N\}$ – набор целых чисел $N_q \geq 0$ таких, что $\sum_q N_q = N$, причем кратность собственного значения (43) равна

$$\Gamma_{\{N\}} = \prod_q \frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q!(G^3 - 1)!}. \quad (44)$$

По определению

$$\mathrm{Sp} e^{-\frac{H_1 N}{\theta}} = \sum_{\{N\}} e^{-\frac{E_{\{N\}}}{\theta}} \Gamma_{\{N\}}, \quad (45)$$

но учитывая определение оператора $H_{2N}(\theta)$ и формулы (43), (44), получим, что правая часть равенства (45) есть $\mathrm{Sp} e^{-\frac{H_{2N}(\theta)}{\theta}}$.

Рассмотрим бозонное фоковское пространство $\mathcal{H}_1$ [25], элементами которого являются последовательности функций $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, где $\Psi_N(x_1, \dots, x_N) \in L_2(\mathbf{T}_1^N)$ — функция, симметричная относительно перестановок любых пар переменных x_j и $x_{j'}$, $j, j' = 1, 2, \dots, N$. Введем в пространстве $\mathcal{H}_1$ следующий оператор:

$$\hat{H}_1 = \int dx \hat{\psi}_1^+(x) \mathcal{E} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \hat{\psi}_1^-(x), \quad (46)$$

где $\hat{\psi}_1^+(x)$, $\hat{\psi}_1^-(x)$ — соответственно операторы рождения и уничтожения [25] в пространстве $\mathcal{H}_1$.

Аналогично рассмотрим бозонное фоковское пространство $\mathcal{H}_2$, состоящее из последовательностей функций $\{\Phi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, где функция $\Phi_N(y_1, \dots, y_N)$ симметрична относительно перестановок пар переменных y_j и $y_{j'}$, $j, j' = 1, 2, \dots, N$. Операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{H}_2$ обозначим соответственно $\hat{\psi}_2^+(y)$ и $\hat{\psi}_2^-(y)$. Введем в $\mathcal{H}_2$ следующие операторы:

$$\hat{\psi}_q^+ = \int dy \left(\frac{G}{L} \right)^3 e^{-\frac{i}{\hbar} qy} \hat{\psi}_2^+(y), \quad \hat{\psi}_q^- = \int dy \left(\frac{G}{L} \right)^3 e^{-\frac{i}{\hbar} qy} \hat{\psi}_2^-(y), \quad (47)$$

где $q = (2\pi\hbar/L)G \cdot (n_1, n_2, n_3)$, n_1, n_2, n_3 — целые числа.

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{\psi}_q^-, \hat{\psi}_{q'}^+] = \delta_{qq'}, \quad [\hat{\psi}_q^-, \hat{\psi}_{q'}^-] = [\hat{\psi}_q^+, \hat{\psi}_{q'}^+] = 0,$$

а кроме того, на вакуумный вектор Φ_0 [25] пространства $\mathcal{H}_2$ оператор действует следующим образом: $\hat{\psi}_q^- \Phi_0 = 0$. Введем в пространстве $\mathcal{H}_2$ оператор

$$\hat{H}_2(\theta) = \sum_q \mathcal{E}(q) \hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^- - \theta \sum_q \ln \left[\frac{\Gamma([\hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^-] + G^3)}{\Gamma([\hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^-] + 1) \Gamma(G^3)} \right], \quad (48)$$

где $\Gamma(t)$, $t \in \mathbb{R}$, — гамма-функция Эйлера, $[\cdot]$ — автономные скобки [15].

N -частичным подпространством пространства $\mathcal{H}_1$ или $\mathcal{H}_2$ называется [25] подпространство, элементы которого являются собственными функциями соответствующего оператора числа частиц

$$\hat{N}_1 = \int dx \hat{\psi}_1^+(x) \hat{\psi}_1^-(x) \quad \text{или} \quad \hat{N}_2 = \int dy \hat{\psi}_1^+(y) \hat{\psi}_1^-(y)$$

с собственным значением N .

Из леммы 1 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\hat{H}_1}{\theta}} = \mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\hat{H}_2(\theta)}{\theta}},$$

где Sp_N обозначает след ограничения оператора на N -частичное подпространство.

Мы выбрали только один “дух” G по размеру тора, в то время как стремится к бесконечности не только объем (тор), но и число частиц. Если делать аналогичную процедуру по числу частиц, появится другой “дух”. Если же число частиц стремится к бесконечности много медленнее, чем объем, то можно ограничиться одним “духом”. Следовательно, в нашем случае $L^3 \gg N \gg 1$, а значит и $G \gg N$. Тогда согласно формуле (48) мы получаем

$$\hat{F}(\theta) \stackrel{\text{def}}{=} \hat{H}_2(\theta) = \sum_q \mathcal{E}(q) \hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^- - \theta \sum_q \ln[\Gamma(\hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^-)] + \theta \left(\sum_q \hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^- \right) (\ln G + 1), \quad (49)$$

и поскольку $\sum_q \hat{\psi}_q^+ \hat{\psi}_q^-$ есть полное число частиц, то последний член в свободной энергии является константой и “дух” G не влияет на термодинамические характеристики рассматриваемой системы.

4.2. Ультравторично-квантованная энтропия для бозонов со статспином.

Перейдем к рассмотрению ультравторично-квантованных задач. Рассмотрим пространство $\mathcal{F}_{1N}$, элементами которого являются функции

$$\Psi(x_1, s_1; x_2, s_2; \dots; x_N, s_N), \quad (50)$$

где $x_j \in \mathbf{T}_1$, а s_j , $j = 1, 2, \dots, N$, — дискретная переменная, принимающая значения $1, 2, \dots, J_1$. Будем называть эту переменную статистическим спином (статспином) или номером. Функции (50) симметричны относительно любых перестановок пар переменных (x_j, s_j) и $(x_{j'}, s_{j'})$, а также принадлежат пространству $L_2((\mathbf{T}_1 \times \{1, 2, \dots, J_1\})^N)$, т.е. справедливо неравенство

$$\sum_{s_1=1}^{J_1} \dots \sum_{s_N=1}^{J_1} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N |\Psi(x_1, s_1; \dots; x_N, s_N)|^2 < \infty.$$

Левая часть этого неравенства равна квадрату нормы элемента (50) пространства $\mathcal{F}_{1N}$.

Введем пространство $\mathcal{F}_1 = \bigoplus_{N=0}^{\infty} \mathcal{F}_{1N}$, состоящее из последовательностей функций $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, где $\Psi_N \in \mathcal{F}_{1N}$ — функция вида (50). Пространство $\mathcal{F}_1$ является бозонным фоковским пространством, и в нем стандартным образом вводятся операторы рождения $\hat{b}_1^+(x, s)$ и уничтожения $\hat{b}_1^-(x, s)$ частиц со статспином.

Симметричным подпространством $\mathcal{F}_1^{\text{Symm}}$ пространства $\mathcal{F}_1$ назовем множество последовательностей $\{\Psi_N\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, которые состоят из функций (50), симметричных относительно любых перестановок переменных x_j и $x_{j'}$ и симметричных относительно любых перестановок переменных s_j и $s_{j'}$. N -частичное подпространство пространства $\mathcal{F}_1$ изометрически изоморфно пространству $\mathcal{F}_{1N}$. Симметричным N -частичным подпространством $\mathcal{F}_{1N}^{\text{Symm}}$ пространства $\mathcal{F}_1$ будем называть пересечение подпространств $\mathcal{F}_{1N}$ и $\mathcal{F}_1^{\text{Symm}}$.

Теперь введем пространства $\mathcal{F}_{2N}$ и $\mathcal{F}_2$ полностью аналогично определению пространств $\mathcal{F}_{1N}$ и $\mathcal{F}_1$, заменив в этом определении переменные $x_j \in \mathbf{T}_1$ на $y_j \in \mathbf{T}_2$, а переменные $s_j = 1, \dots, J_1$ на $t_j = 1, \dots, J_2$, где $J_2 = J_1/Q$ и $Q > 1$ – целые числа. Кроме того, аналогично введем симметричное $\mathcal{F}_2^{\text{Symm}}$, N -частичное $\mathcal{F}_{2N}$ и N -частичное симметричное $\mathcal{F}_{2N}^{\text{Symm}}$ подпространства пространства $\mathcal{F}_2$. Пространство $\mathcal{F}_2$, так же как и $\mathcal{F}_1$, является бозонным фоксовским пространством; операторы рождения и уничтожения в $\mathcal{F}_2$ будем обозначать соответственно $\hat{b}_2^+(y, t)$ и $\hat{b}_2^-(y, t)$.

Пусть задана последовательность операторов $\{A_N\}$, $N = 0, 1, \dots$, где A_N – оператор в пространстве симметричных функций $\Psi(x_1, \dots, x_N) \in L_2(\mathbf{T}_1^N)$ такой, что

$$(A_N \Psi)(x_1, \dots, x_N) = A_N \left(\overset{2}{x_1}, \dots, \overset{2}{x_N}; -i\hbar \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_1}, \dots, -i\hbar \frac{\overset{1}{\partial}}{\partial x_N} \right) \Psi(x_1, \dots, x_N).$$

В случае, когда коэффициенты суммирования в формулах (3), (16) равны $1/N!$, следующий оператор в пространстве $\mathcal{F}_1$ называется ультраворично-квантованным:

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{s_1=1}^{J_1} \dots \sum_{s_N=1}^{J_N} \int \dots \int dx_1 \dots dx_N \overset{2}{\hat{b}}_1^+(x_1, s_1) \dots \overset{2}{\hat{b}}_1^+(x_N, s_N) \times \\ & \times A_N \underset{x_1, \dots, x_N}{\text{Symm}} \left(\overset{1}{\hat{b}}_1^-(x_1, s_1) \dots \overset{1}{\hat{b}}_1^-(x_N, s_N) \right) \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=1}^{J_1} \int dx \overset{2}{\hat{b}}_1^+(x, s) \overset{1}{\hat{b}}_1^-(x, s) \right). \end{aligned} \quad (51)$$

С помощью непосредственного вычисления легко убедиться, что ультраворично-квантованные операторы (51) обладают следующими свойствами.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Справедливо равенство*

$$\text{Sp}_{N, \text{Symm}} \bar{A} = (\text{Sp } A_N) \frac{(N + J_1 - 1)!}{N!(J_1 - 1)!}, \quad (52)$$

где $\text{Sp}_{N, \text{Symm}} \bar{A}$ обозначает след ограничения оператора $\bar{A}$ на N -частичное симметричное подпространство $\mathcal{F}_{1N}^{\text{Symm}}$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть $\widehat{B}$ – ультравторично-квантованный оператор вида (51), отвечающий последовательности операторов $\{B_N\}$, $N = 0, 1, 2, \dots$, где $B_N = A_N^n$, а $n > 1$ – целое число. Тогда имеет место равенство

$$\widehat{B} = (\widehat{A})^n. \quad (53)$$

Будем далее обозначать через $\widehat{H}_1$ оператор в пространстве $\mathcal{F}_1$ вида (51), отвечающий последовательности операторов $\{H_{1N}\}$, где H_{1N} – операторы (37). С помощью утверждений 2 и 3 можно доказать, что имеет место

ЛЕММА 2. Справедливо равенство

$$\mathrm{Sp}_{N, \mathrm{Symm}} e^{-\frac{\widehat{H}_1}{\theta}} = \mathrm{Sp} e^{-\frac{\widehat{H}_{1N}}{\theta}} \frac{(N + J_1 - 1)!}{N!(J_1 - 1)!}.$$

Введем в пространстве $\mathcal{F}_2$ следующие операторы:

$$\hat{b}_{qt}^- = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \int dy \hat{b}_2^-(y, t) e^{-\frac{iq}{\hbar} y}, \quad \hat{b}_{qt}^+ = \frac{1}{L^{\frac{3}{2}}} \int dy \hat{b}_2^+(y, t) e^{\frac{iq}{\hbar} y}. \quad (54)$$

Эти операторы удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{b}_{qt}^-, \hat{b}_{q't'}^+] = \delta_{qq'} \delta_{tt'}, \quad [\hat{b}_{qt}^\pm, \hat{b}_{q't'}^\pm] = 0,$$

и вакуумный вектор операторов (54) совпадает с вакуумным вектором операторов $\hat{b}_2^\pm(y, t)$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{F}_2$ операторы $\widehat{H}_2(\theta)$ и $\widehat{F}(\theta)$ вида

$$\begin{aligned} \widehat{H}_2(\theta) = & \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \sum_{q_1} \cdots \sum_{q_N} \sum_{t_1=1}^{J_2} \cdots \sum_{t_N=1}^{J_2} \hat{b}_{q_1 t_1}^+ \cdots \hat{b}_{q_N t_N}^+ \mathrm{Symm}_{q_1, \dots, q_N} (\hat{b}_{q_1 t_1}^- \cdots \hat{b}_{q_N t_N}^-) \times \\ & \times \left(\sum_q \mathcal{E}(q) M_q - \theta \sum_q \ln \left[\frac{(M_q + G^3 - 1)!}{M_q! G^3!} \right] - \theta \sum_{t=1}^{J_2} \ln \left[\frac{(K_t + Q - 1)!}{K_t! (Q - 1)!} \right] \right) \times \\ & \times \exp \left(- \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- \right), \end{aligned} \quad (55)$$

$$\begin{aligned} \widehat{F}(\theta) = & \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \mathcal{E}(q) \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- + \theta \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \ln \left[\Gamma \left([\hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^-] + 1 \right) \right] - \theta \sum_q \ln \left[\frac{\Gamma(\widehat{M}_q + G^3)}{\Gamma(G^3)} \right] - \\ & - \theta \sum_{t=1}^{J_2} \ln \left[\frac{\Gamma(\widehat{K}_t + Q)}{\Gamma(Q)} \right] - \theta J_1 \ln J_1 + \theta(N + J_1) \ln(N + J_1) - \theta N, \end{aligned} \quad (56)$$

где в формуле (55) величины M_q и K_t являются функциями от $q_1, \dots, q_N$ и $t_1, \dots, t_N$:

$$M_q = \sum_{\alpha=1}^N \delta_{q q_\alpha}, \quad K_t = \sum_{\alpha=1}^N \delta_{t t_\alpha}, \quad (57)$$

а в формуле (56) операторы $\widehat{M}_q$ и $\widehat{K}_t$ имеют вид

$$\widehat{M}_q = \sum_{t=1}^{J_2} \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^-, \quad \widehat{K}_t = \sum_q \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^-. \quad (58)$$

Справедлива следующая

ЛЕММА 3. *Справедливо равенство*

$$\mathrm{Sp}_{N, \mathrm{Symm}} e^{-\frac{\bar{H}_1}{\theta}} = \mathrm{Sp}_{N, \mathrm{Symm}} e^{-\frac{\bar{H}_2(\theta)}{\theta}} = \mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\bar{F}(\theta)}{\theta}}.$$

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $L \rightarrow \infty$ и $N \rightarrow \infty$ так, что $N/L^3 = n = \mathrm{const}$ (термодинамический предел).

Свободной энергией при температуре $\theta > 0$ системы N бозонов с гамильтонианом H_{1N} (37) называют величину

$$F(\theta) = -\theta \ln \left(\mathrm{Sp} e^{-\frac{H_{1N}}{\theta}} \right). \quad (59)$$

Пусть $G \sim L^\varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, тогда имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *При $N \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ свободная энергия (59) асимптотически равна минимальному собственному значению оператора $\hat{H}_2(\theta)$ (48) на N -частичном подпространстве пространства $\mathcal{H}_2$.*

Приведем эвристическое обоснование. Из леммы 1 следует, что

$$F(\theta) = -\theta \ln \left(\mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\hat{H}_2(\theta)}{\theta}} \right).$$

Собственные значения оператора $\hat{H}_2(\theta)$ (48) на N -частичном подпространстве пространства $\mathcal{H}_2$ имеют вид

$$E_{\{N\}}(\theta) = \sum_q \mathcal{E}(q) N_q - \theta \sum_q \ln \left[\frac{(N_q + G^3 - 1)!}{N_q! (G^3)!} \right], \quad (60)$$

где $\{N\}$ – набор целых чисел $N_q \geq 0$ такой, что

$$\sum_q N_q = N. \quad (61)$$

По определению следа

$$\mathrm{Sp}_N e^{-\frac{\hat{H}_2(\theta)}{\theta}} = \sum_{\{N\}} e^{-\frac{E_{\{N\}}(\theta)}{\theta}}, \quad (62)$$

где $\sum_{\{N\}}$ обозначает суммирование по всем наборам целых чисел $\{N\}$ таких, что выполняется (61).

Векторы q в выражениях (60) и (61) пробегают множество значений $(2\pi\hbar/L)G \times (n_1, n_2, n_3)$, где n_1, n_2, n_3 – целые числа. Поэтому сделаем в выражениях (60)–(62) замену $n(q) = N_q/G^3$. Из условия (61) следует, что $n(q) \sim N/L^3$. При такой замене выражение (60) асимптотически равно

$$E_{\{N\}} \approx \sum_q G^3 n(q) + \theta \sum_q G^3 n(q) \ln n(q) - \theta \sum_q G^3 (1 + n(q)) \ln(1 + n(q)). \quad (63)$$

В выражении (63) при всех членах стоит большой параметр G^3 , поэтому для вычисления суммы в правой части равенства (62) можно воспользоваться методом Лапласа для сумм, а этот метод приводит к асимптотическому равенству

$$\ln \left(\text{Sp}_N e^{-\frac{\hat{H}_2(\theta)}{\theta}} \right) \sim -\frac{1}{\theta} \min_{\{N\}} E_{\{N\}}(\theta),$$

которое и требуется доказать.

В случае ультравторичного квантования справедливо аналогичное

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. При $N \rightarrow \infty$, $G \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$ классическая свободная энергия (59) асимптотически равна минимальному собственному значению оператора квантованной свободной энергии $\widehat{\bar{F}}(\theta)$ (56).

С помощью лемм 2 и 3 предложение 3 доказывается так же, как и предыдущее. Заметим теперь, что если $J_2 = 1$, то пространство $\mathcal{F}_2$ совпадает с пространством $\mathcal{H}_2$, и можно сказать, что оператор $\widehat{\bar{F}}(\theta)$ (56) в этом случае совпадает с $\widehat{H}_2(\theta)$ (48). Таким образом, утверждение предложения 3 в этом случае совпадает с утверждением предложения 2.

4.3. Учет операторов рождения пар в ультравторично-квантованной энтропии. Аналогично тому, как в предыдущих пунктах была получена свободная энергия во вторично-квантованном и ультравторично-квантованном “холостом” случаях, можно получить свободную энергию для системы, в которой есть конденсат парных частиц. В этом случае аналогично вводится пространство $\mathcal{F}$.

Ультравторично-квантованные операторы (51) с операторами рождения $\widehat{B}^+(x, y)$ и уничтожения $\widehat{B}^-(x, y)$ пар принимают вид

$$\begin{aligned} \bar{A} = & \sum_{k,m=0}^{\infty} \sum_{s_1=1}^{J_1} \cdots \sum_{s_k=1}^{J_k} \int \cdots \int dx_1 \dots dx_k dy_1 \dots dy_{2m} \times \\ & \times \hat{b}^+(x_1, s_1) \dots \hat{b}^+(x_k, s_k) \hat{B}^+(y_1, y_2) \dots \hat{B}^+(y_{2m-1}, y_{2m}) \times \\ & \times A_{k+2m} \text{Symm}_{x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_{2m}} \left(\hat{b}^-(x_1, s_1) \dots \hat{b}^-(x_k, s_k) \times \right. \\ & \times \hat{B}^-(y_1, y_2) \dots \hat{B}^-(y_{2m-1}, y_{2m}) \left. \right) \times \\ & \times \exp \left(- \sum_{s=1}^J \int dx \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s) - \iint dy dz \hat{B}^+(y, z) \hat{B}^-(y, z) \right). \end{aligned} \quad (64)$$

Для таких операторов справедливо утверждение, аналогичное утверждению 2. А именно, справедливо равенство

$$\text{Sp}_{k,m,\text{Symm}} \bar{A} = (\text{Sp } A_N) \frac{(k + J_1 - 1)!}{k!(J_1 - 1)!}. \quad (65)$$

Кроме того, в случае с парами также справедливо утверждение 3. Введем операторы

$$\begin{aligned}\hat{B}_{q_1 q_2}^- &= \iint dy_1 dy_2 \hat{B}^-(y_1, y_2) e^{-i \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{\hbar}}, \\ \hat{B}_{q_1 q_2}^+ &= \iint dy_1 dy_2 \hat{B}^+(y_1, y_2) e^{i \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{\hbar}},\end{aligned}\quad (66)$$

которые удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[\hat{B}_{q_1 q_2}^-, \hat{B}_{q'_1 q'_2}^+] = \delta_{q_1 q_2} \delta_{q'_1 q'_2}, \quad [\hat{B}_{q_1 q_2}^\pm, \hat{B}_{q'_1 q'_2}^\pm] = 0.$$

Рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}\widehat{F}(\theta) &= \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \mathcal{E}(q) \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- + \sum_{q, q'} (\mathcal{E}(q) + \mathcal{E}(q')) \hat{B}_{qq'}^+ \hat{B}_{qq'}^- + \theta \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \ln \Gamma(\hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- + 1) + \\ &+ \theta \sum_{q, q'} \ln \Gamma(\hat{B}_{qq'}^+ \hat{B}_{qq'}^- + 1) - \theta \sum_q \ln \left[\frac{\Gamma(\widehat{M}_q + G^3)}{\Gamma(G^3)} \right] - \theta \sum_{t=1}^{J_2} \ln \left[\frac{\Gamma(\widehat{K}_t + Q)}{\Gamma(Q)} \right] - \\ &- \theta \ln \left[\frac{k! m! (J_1 - 1)!}{(k + J_1 - 1)! (k + 2m)!} \right],\end{aligned}\quad (67)$$

где

$$\widehat{M}_q = \sum_{t=1}^{J_2} \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- + \sum_{q'} \hat{B}_{qq'}^+ \hat{B}_{qq'}^- + \sum_{q'} \hat{B}_{q'q}^+ \hat{B}_{q'q}^-, \quad \widehat{K}_t = \sum_q \hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^-.$$

В парном случае имеет место

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. При $G \rightarrow \infty$, $L \rightarrow \infty$, $N \rightarrow \infty$ классическая свободная энергия (59) асимптотически равна минимальному собственному значению оператора $\widehat{F}(\theta)$ (67).

Обоснование предложения 4 полностью аналогично обоснованию предложения 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Выражение для энтропии, полученное выше, справедливо лишь при $N \ll G^3 \sim Q$, возможно (гипотеза!) и для конечных N . Это значит, что формула (67) и другие существенно упростятся, когда мы применим формулу Стирлинга к членам, содержащим G^3 и Q .

В дальнейшем в определении квантованной энтропии мы будем для простоты опускать последний член в (67). В нижеследующих формулах стирается грань между бозонами и фермионами, и они практически определяются для классических частиц. Итак,

$$\begin{aligned}\overline{S} &= \sum_q \sum_{t=1}^{J_2} \ln [\Gamma(\hat{b}_{qt}^+ \hat{b}_{qt}^- + 1)] + \sum_{q, q'} \ln [\Gamma(\hat{B}_{qq'}^+ \hat{B}_{qq'}^- + 1)] - \\ &- \sum_q \ln [\Gamma(\widehat{M}_q)] - \sum_{t=1}^{J_2} \ln [\Gamma(\widehat{K}_t)] + \sum_q \widehat{M}_q (\ln G^3 + 1) + \sum_{t=1}^{J_2} \widehat{K}_t (\ln Q + 1).\end{aligned}\quad (68)$$

Поскольку $\sum_q \widehat{M}_q$ и $\sum_{t=1}^{J_2} \widehat{K}_t$ инварианты, то члены с “духами” не играют роли.

5. ПУАНТИЛИСТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННЕЙ ЭНЕРГИИ

Внутренняя энергия термодинамической системы выражается через свободную энергию известным образом: $\mathcal{E}(\theta, V, N) = F(\theta, V, N) - \theta(\partial F(\theta, V, N)/\partial \theta)$. Поскольку введен оператор свободной энергии, то естественно ввести и оператор внутренней энергии. Сделаем это с помощью пуантилистического подхода. Пусть гамильтониан системы N фермионов имеет вид (20). Рассмотрим функции $G(x, y)$ и $R(x, y)$, которые являются решением уравнения (36) при $f(\xi) = (e^{\xi/\theta} + 1)^{-1} - 1/2$, где θ – температура. Введем в пространстве $\mathcal{F}$ следующий вектор:

$$\Psi_\theta = \bar{E} \exp \left(\sum_{s=1}^{\infty} \int dx \varphi(x, s) \hat{b}^+(x, s) + \frac{1}{2} \iint dy dz \Phi(y, z) \hat{B}^+(y, z) \right) \Psi_0, \quad (69)$$

где функции $\varphi(x, s)$, $\Phi(y, z)$ определяются из уравнений

$$\begin{aligned} \hat{G} &= (1 + \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \left(\hat{A}^{\text{tr}} - \hat{C}^* (1 + \hat{A})^{-1} \hat{C} (1 + \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \hat{C}^* (1 + \hat{A})^{-1} \hat{C} (1 + \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \right)^{-1} \right), \\ \hat{R} &= -(1 + \hat{A})^{-1} \hat{C} (1 + \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \left(1 - \hat{C}^* (1 + \hat{A})^{-1} \hat{C} (1 + \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \right)^{-1}, \end{aligned} \quad (70)$$

$\hat{G}, \hat{R}, \hat{A}, \hat{C}$ – следующие операторы в $L_2(\mathbb{R}^3)$:

$$\begin{aligned} (\hat{G}f)(x) &= \int dy G(x, y) f(y), & (\hat{R}f)(x) &= \int dy R(x, y) f(y), \\ (\hat{A}f)(x) &= \sum_{s=1}^{\infty} \int dy \varphi(x, s) \varphi^*(y, s) f(y), & (\hat{C}f)(x) &= \int dy \Phi(x, y) f(y), \end{aligned} \quad (71)$$

а кроме того, в уравнениях (70) знаки $*$ и tr обозначают соответственно комплексное сопряжение и транспонирование оператора. В случае, когда система находится на трехмерном торе и гамильтониан (20) коммутирует с оператором импульса, функции $\varphi(x, s)$, $\Phi(y, z)$ представляются в виде

$$\varphi(x, s) = \frac{\sqrt{a_{p_s}} e^{ip_s x}}{L^{\frac{3}{2}}}, \quad a_p = a_{-p}, \quad \Phi(x, y) = \frac{1}{L^3} \sum_p \phi_p e^{ip(x-y)}, \quad \phi_p = -\phi_{-p}, \quad (72)$$

где L – длина сторон тора, p – импульс на торе, принимающий значения на кубической решетке, p_s – взаимно однозначное отображение множества номеров s на множество значений импульса. Для вектора (69) среднее значение оператора числа пар

$$\iint dx dy \hat{B}^+(x, y) \hat{B}^-(x, y)$$

равно

$$M = \frac{1}{2} \sum_p \frac{\phi_p^* \phi_p}{(1 + a_p)^2 + \phi_p^* \phi_p}, \quad (73)$$

а среднее значение оператора числа частиц с номером s

$$\iint dx dy \hat{b}^+(x, s) \hat{b}^-(x, s)$$

равно

$$k_s = \frac{a_{p_s}(1 + a_{p_s})}{(1 + a_{p_s})^2 + \phi_{p_s}^* \phi_{p_s}}. \quad (74)$$

Выделим в пространстве $\mathcal{F}$ линейное подпространство $\mathcal{F}_\theta$ такое, что базисом в нем являются векторы, образующие серию собственных векторов ультраворично-квантованного гамильтониана $\widehat{H}$, для которых разность средних значений (73) оператора числа пар и средних значений (74) операторов числа частиц с номерами и выражений (73) и (74), соответственно, по модулю не превышает некоторой постоянной в термодинамическом пределе величины. Понятие серии было введено и подробно разъяснено в работе [11], здесь заметим только, что для любого вектора из $\mathcal{F}_\theta$ и любого вектора из дополнения к $\mathcal{F}_\theta$ матричные элементы широкого класса операторов (этот класс содержит ультраворично-квантованные гамильтониан $\widehat{H}$ и единичный оператор $\widehat{E}$) стремятся к нулю в термодинамическом пределе. В силу этого будем рассматривать уравнение

$$\overline{\widehat{P}}_\theta \overline{\widehat{H}} \widehat{P}_\theta \Psi = \lambda \overline{\widehat{P}}_\theta \overline{\widehat{E}} \widehat{P}_\theta \Psi, \quad (75)$$

где $\overline{\widehat{P}}_\theta$ – оператор ортогонального проектирования на подпространство $\mathcal{F}_\theta$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Значения λ , при которых существует решение уравнения (75) такое, что $\overline{\widehat{P}}_\theta \overline{\widehat{E}} \widehat{P}_\theta \Psi \neq 0$, будем называть спектром проквантованной внутренней энергии при температуре θ . Минимальное значение λ будем называть квантовым значением внутренней энергии термодинамической системы при температуре θ . Оператором внутренней энергии будем называть ограничение гамильтониана $\widehat{H}$ на подпространство $\mathcal{F}_\theta$: $\widehat{P}_\theta \widehat{H} \widehat{P}_\theta$.

Поскольку $\Psi_\theta \in \mathcal{F}_\theta$, то выражение $(\Psi_\theta, \widehat{H} \Psi_\theta) / (\Psi_\theta, \widehat{E} \Psi_\theta)$ является оценкой сверху для квантового значения внутренней энергии. Это выражение для вектора (69) может быть вычислено в явном виде и совпадает с выражением для внутренней энергии в теории БКШ.

В заключение заметим, что определение оператора внутренней энергии для бозонов полностью аналогично, за исключением того, что в формуле (69) функции $\varphi(x, s)$, $\Phi(y, z)$ определяются не из уравнений (70), а из уравнений

$$\begin{aligned} \widehat{G} &= (1 - \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \left(\hat{A}^{\text{tr}} - \widehat{C}^* (1 - \hat{A})^{-1} \widehat{C} (1 - \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} \times \right. \\ &\quad \left. \times (1 - \widehat{C}^* (1 - \hat{A})^{-1} \widehat{C} (1 - \hat{A}^{\text{tr}})^{-1})^{-1} \right), \\ \widehat{R} &= -(1 - \hat{A})^{-1} \widehat{C} (1 - \hat{A}^{\text{tr}})^{-1} (1 - \widehat{C}^* (1 - \hat{A})^{-1} \widehat{C} (1 - \hat{A}^{\text{tr}})^{-1})^{-1}, \end{aligned} \quad (76)$$

где $\widehat{G}$, $\widehat{R}$, $\widehat{A}$, $\widehat{C}$ выражаются формулами (71), а функции $G(x, y)$, $R(x, y)$ являются решениями бозонного аналога уравнения (36). Кроме того, в бозонном случае имеет место представление, аналогичное (72), в котором условие $\phi_p = -\phi_{-p}$ заменяется на условие $\phi_p = \phi_{-p}$. А также формулы для среднего числа пар (73) и среднего числа частиц с номерами (74) должны быть заменены соответственно на формулы

$$M = \frac{1}{2} \sum_p \frac{\phi_p^* \phi_p}{(1 - a_p)^2 - \phi_p^* \phi_p}, \quad k_s = \frac{a_{p_s}(1 - a_{p_s})}{(1 - a_{p_s})^2 - \phi_{p_s}^* \phi_{p_s}}. \quad (77)$$

Благодарности. В заключение автор выражает глубокую благодарность Г. В. Ковалю и Е. Д. Ким за существенную помощь.

Список литературы

- [1] В. П. Маслов. ТМФ. 1994. Т. 101. № 3. С. 433.
- [2] В. П. Маслов. Функц. анализ и его прилож. 1994. Т. 28. № 4. С. 28.
- [3] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1994. Т. 56. № 3. С. 115.
- [4] В. П. Маслов. Докл. РАН. 1995. Т. 340. № 2. С. 175.
- [5] В. П. Маслов. Квантование термодинамики и ультравторичное квантование. Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", УРСС, 2000.
- [6] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1997. Т. 61. № 4. С. 627.
- [7] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1997. Т. 62. № 4. С. 633.
- [8] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 4. С. 635.
- [9] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 5. С. 792.
- [10] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1998. Т. 64. № 3. С. 470.
- [11] V. P. Maslov. Russ. J. Math. Phys. 1997. V. 5. № 4. P. 473.
- [12] В. П. Маслов. Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 3. С. 320.
- [13] В. П. Маслов. Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 5. С. 607.
- [14] В. П. Маслов. Докл. РАН. 1999. Т. 369. № 4. С. 466.
- [15] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 4. С. 630.
- [16] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 5. С. 706.
- [17] В. П. Маслов. Матем. заметки. 1999. Т. 66. № 6. С. 701.
- [18] В. П. Маслов. ТМФ. 1999. Т. 121. № 3. С. 492.
- [19] В. П. Маслов. Функц. анализ и его прилож. 1999. Т. 33. № 4. С. 50.
- [20] В. П. Маслов. Функц. анализ и его прилож. 2000. Т. 34. № 4. С. 35.
- [21] В. П. Маслов. Вестн. МГУ. Физика. Астрономия. 2000. № 6. С. 3.
- [22] В. П. Маслов. ТМФ. 2000. Т. 125. № 2. С. 297.
- [23] В. П. Маслов, А. М. Чеботарев. О втором члене логарифмической асимптотики функциональных интегралов. В сб.: Итоги науки и техники. Т. 19. Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика. Ред. Р. В. Гамкрелидзе. М.: ВИНТИ, 1982. С. 127.
- [24] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М.: Наука, 1995.
- [25] Ф. А. Березин. Метод вторичного квантования. М.: Наука, 1965.
- [26] В. П. Маслов. Операторные методы. М.: Наука, 1973.

Поступила в редакцию 21.VI.2001 г.