Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Латышев, А. А. Юшканов, Граничные задачи для квантового ферми-газа,
ТМФ, 2001, том 129, номер 3, 491–502

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf549>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.207.199.55

26 апреля 2023 г., 17:45:55

© 2001 г.

А. В. Латышев*, А. А. Юшканов*

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАНТОВОГО ФЕРМИ-ГАЗА

Выведено релаксационное кинетическое уравнение, описывающее поведение ферми-газов. Рассматривается полупространственная задача Крамерса об изотермическом скольжении. Найдено ее аналитическое решение, и в явном виде получена функция распределения летящих к стенке частиц. Проведен анализ зависимости самого уравнения и скорости скольжения от величины параметра, представляющего собой отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру.

1. ВВЕДЕНИЕ

Кинетические явления в разреженных газах являются предметом теоретического изучения со времен Максвелла и Больцмана (историю вопроса и соответствующие ссылки см. в книгах [1]–[3]). При этом большинство работ по данной тематике посвящено изучению поведения классических газов. Квантовые газы изучались главным образом в рамках рассмотрения кинетики электронов в полупроводниках и металлах (см., например, [4], [5]), а также кинетики фононов в конденсированных средах [5].

Однако и электроны в твердых телах, и фононы относятся к квазичастицам, чье поведение отличается от поведения свободных частиц, а электроны, кроме того, обладают зарядом, так что в этом случае мы имеем дело с кинетикой плазмы.

В то же время постоянный теоретический интерес представляет изучение влияния квантовых эффектов на кинетические процессы в нейтральных газах, особенно при низких температурах. Наибольшее влияние эти эффекты должны оказывать на поведение легких газов, таких как водород и гелий. В работе [6] рассмотрено модельное кинетическое уравнение для безмассового бозе-газа и построено его аналитическое решение в задаче о скачке температуры.

Предлагаемая работа посвящена изучению влияния квантовых эффектов на кинетические явления в разреженных ферми-газах. Рассмотрение ведется на примере клас-

*Московский педагогический университет, Москва, Россия.
E-mail: latyshev@orc.ru, yushkanov@inbox.ru

сической задачи об изотермическом скольжении газа (задача Крамерса) вдоль плоской поверхности [1]–[3]. Пусть газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой. При этом предполагается, что он движется вдоль поверхности. Вдали от поверхности (на расстоянии много большем средней длины свободного пробега частиц газа) имеется градиент массовой скорости газа. Наличие градиента вызывает скольжение газа вдоль поверхности, называемое изотермическим. Направим ось y вдоль движения газа. Вектор массовой скорости имеет при этом вид $\mathbf{w}(x) = (0, w(x), 0)$. В этом случае профиль скорости представим в виде $w(x) = w_0 + gx$, $x \rightarrow +\infty$. Задача Крамерса состоит в нахождении величины скорости изотермического скольжения w_0 как функции градиента g . Для ее определения необходимо решить кинетическое уравнение в так называемом слое Кнудсена, т.е. в слое газа толщиной порядка длины свободного пробега, примыкающего к поверхности.

В качестве кинетического уравнения рассмотрим обобщение на квантовый случай БКВ-уравнения (Больцман, Крук, Веландер). Отметим, что в отечественной литературе это уравнение называют также БГК-уравнением (Бхатнагар, Гросс, Крук). Оно имеет следующий вид [1]–[3]:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla f) = \nu(f_{\text{eq}} - f). \quad (1.1)$$

Здесь f – функция распределения молекул по скоростям, $\mathbf{v}$ – скорость молекул, ν – эффективная частота столкновений молекул, f_{eq} – локально-равновесная функция распределения,

$$f_{\text{eq}} = n_{\text{eq}} \left(\frac{m}{2\pi k T_{\text{eq}}} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left[-\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\text{eq}})^2}{2k T_{\text{eq}}} \right].$$

Величины n_{eq} , T_{eq} , $\mathbf{u}_{\text{eq}}$ зависят, вообще говоря, от координаты $\mathbf{r}$ и определяются как

$$\begin{aligned} n_{\text{eq}} &= \int f d^3 v, & \mathbf{u}_{\text{eq}} &= \frac{1}{n_{\text{eq}}} \int \mathbf{v} f d^3 v, \\ T_{\text{eq}} &= \frac{2}{3kn_{\text{eq}}} \int \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\text{eq}})^2 f d^3 v. \end{aligned} \quad (1.2)$$

2. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ КВАНТОВОГО ФЕРМИ-ГАЗА

Рассмотрим обобщение кинетического уравнения (1.1) на случай квантового ферми-газа. Функцию f_{eq} в (1.1) теперь будем понимать как локально-равновесную функцию Ферми

$$f_{\text{eq}} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_* - \mu_{\text{eq}}}{k T_{\text{eq}}}\right) + 1}, \quad \varepsilon_* = \frac{m}{2} (\mathbf{v} - \mathbf{u}_{\text{eq}})^2,$$

где μ_{eq} – химический потенциал [7].

Вместо соотношений (1.2) теперь имеем следующее соотношение, вытекающее из законов сохранения числа частиц, импульса и энергии:

$$\int f_{\text{eq}} R_i d\omega = \int f R_i d\omega, \quad i = 1, \dots, 5. \quad (2.1)$$

Здесь

$$d\omega = \frac{(2s+1)m^3}{(2\pi\hbar)^3} d^3v,$$

s – спин ферми-частицы, $R_1 = 1$, $R_2 = v_x$, $R_3 = v_y$, $R_4 = v_z$, $R_5 = \varepsilon_*$. Величины μ_{eq} и T_{eq} постоянны в данной задаче и далее обозначаются через μ и T .

Из соотношения (2.1) следует, что величина $\mathbf{u}_{\text{eq}}$ совпадает со среднемассовой скоростью газа $\mathbf{w}$.

Рассмотрим теперь применение кинетического уравнения (1.1) к задаче о вычислении скорости изотермического скольжения квантового ферми-газа. При этом ограничимся рассмотрением малых градиентов g , что позволяет линеаризовать задачу. В этом случае температура и концентрация газа постоянны. Кроме того, течение газа предположим стационарным.

Линеаризуем задачу относительно равновесной фермиевской функции распределения f_0 ,

$$f_0 = \frac{1}{\exp(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}) + 1}, \quad \varepsilon = \frac{mv^2}{2}.$$

Представим функцию распределения в виде $f = f_0 + f_1$, где f_1 – линейная поправка к равновесной функции f_0 . Выберем декартову систему координат с центром на поверхности раздела, осью x , перпендикулярной поверхности и направленной вглубь газа, и осью y , направленной вдоль движения газа. Тогда уравнение (1.1) можно преобразовать к виду

$$v_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = \nu(2\beta v_y f'_0 u_{\text{eq}} - f_1),$$

где

$$\beta = \frac{m}{2kT}, \quad f'_0 = \frac{\partial f_0}{\partial \mu} \frac{1}{2\beta}.$$

Далее удобно ввести следующие безразмерные параметры:

$$\mathbf{c} = \sqrt{\beta} \mathbf{v}, \quad \mathbf{u} = \sqrt{\beta} \mathbf{u}_{\text{eq}}, \quad x' = x\nu\sqrt{\beta}, \quad g' = \frac{g}{\nu}, \quad \alpha = \frac{\mu}{kT}.$$

Штрих у координаты и градиента будем опускать. Получим уравнение

$$c_x \frac{\partial f_1}{\partial x} = 2c_y u f'_0 - f_1.$$

Функцию f_1 удобно искать в виде $f_1 = c_y f'_0 h(x, c_x; \alpha)$. Тогда функция $h(x, c_x; \alpha)$ будет удовлетворять уравнению

$$c_x \frac{\partial h}{\partial x} = 2u(x; \alpha) - h(x, c_x; \alpha). \quad (2.2)$$

При этом величина $u(x; \alpha)$ согласно (2.1) может быть определена как

$$u(x; \alpha) = \frac{\int f'_0 c_y^2 h d^3 c}{\int f'_0 c_y^2 d^3 c}. \quad (2.3)$$

Отметим, что f_0 и f'_0 после “обезразмеривания” принимают вид

$$f_0 = \frac{1}{\exp(c^2 - \alpha) + 1}, \quad f'_0 = \frac{\exp(c^2 - \alpha)}{[\exp(c^2 - \alpha) + 1]^2}.$$

Перейдем в знаменателе формулы (2.3) к сферическим координатам $c_x = c \cos \theta$, $c_y = c \sin \theta \sin \varphi$, $d^3 c = c^2 \sin \theta d\varphi dc d\theta$. Тогда

$$\int f'_0 c_y^2 d^3 c = \frac{4}{3} \pi \int_0^\infty \frac{\exp(c^2 - \alpha) c^4}{[\exp(c^2 - \alpha) + 1]^2} dc.$$

В числителе (2.3) удобнее перейти к цилиндрическим координатам, полагая $c^2 = c_x^2 + c_\perp^2$, $c_y = c_\perp \sin \varphi$, $d^3 c = c_\perp dc_\perp dc_x d\varphi$. Тогда

$$\begin{aligned} \int f'_0 c_y^2 h d^3 c &= \int \frac{\exp(c_x^2 + c_\perp^2 - \alpha) c_\perp^3 \sin \varphi}{[\exp(c_x^2 + c_\perp^2 - \alpha) + 1]^2} h(x, c_x; \alpha) dc_x dc_\perp d\varphi = \\ &= \int_0^\infty dc_\perp \int_{-\infty}^\infty \frac{\exp(c_x^2 + c_\perp^2 - \alpha) c_\perp^3}{[\exp(c_x^2 + c_\perp^2 - \alpha) + 1]^2} h(x, c_x; \alpha) dc_x. \end{aligned}$$

Таким образом, обозначив далее $c_x = \mu$, уравнение (2.2) представим в виде

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu; \alpha) = \int_{-\infty}^\infty K(\mu'; \alpha) h(x, \mu'; \alpha) d\mu'. \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned} K(\mu; \alpha) &= \frac{3}{4} \frac{S(\mu; \alpha)}{R(\alpha)}, \quad R(\alpha) = \int_0^\infty \frac{\exp(y^2 - \alpha) y^4}{[\exp(y^2 - \alpha) + 1]^2} dy, \\ S(\mu; \alpha) &= \int_0^\infty \frac{\exp(\mu^2 + y^2 - \alpha) y^3}{[\exp(\mu^2 + y^2 - \alpha) + 1]^2} dy. \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по частям в двух последних выражениях, для ядра уравнения (2.4) получаем

$$K(\mu; \alpha) = \frac{\ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]}{\int_{-\infty}^\infty \ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)] d\mu}.$$

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ СЛУЧАИ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим два предельных случая уравнения (2.4): $\alpha \rightarrow -\infty$ и $\alpha \rightarrow +\infty$. В первом случае

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} K(\mu; \alpha) &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]}{\int_{-\infty}^{\infty} \ln[1 + \exp(\alpha - u^2)] du} = \\ &= \frac{\exp(-\mu^2)}{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2) du} = \frac{\exp(-\mu^2)}{\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

и мы получаем уравнение

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\mu'^2) h(x, \mu') d\mu',$$

которое является БКВ-уравнением для одноатомных газов [1]–[3] с постоянной частотой столкновений молекул.

Рассмотрим второй случай. При $\alpha \gg 1$ имеем

$$\ln[1 + \exp(\alpha - u^2)] = \begin{cases} \alpha - u^2, & |u| < \sqrt{\alpha}, \\ 0, & |u| > \sqrt{\alpha}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Следовательно, уравнение (2.4) при $\alpha \gg 1$ принимает вид

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \mu; \alpha) = \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \frac{(\alpha - \mu'^2) h(x, \mu'^2; \alpha)}{\int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} (\alpha - y^2) dy} d\mu'.$$

После замены переменных ($\mu \rightarrow \sqrt{\alpha}\mu$, $\mu' \rightarrow \sqrt{\alpha}\mu'$, $u \rightarrow \sqrt{\alpha}u$, $u' \rightarrow \sqrt{\alpha}u'$) получаем уравнение

$$\sqrt{\alpha}\mu \frac{\partial h}{\partial x} + h(x, \sqrt{\alpha}\mu; \alpha) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h(x, \sqrt{\alpha}\mu'; \alpha) d\mu'.$$

Изменив масштаб $x' = \sqrt{\alpha}x$ и обозначив $h_1(x', \mu; \alpha) = h(\sqrt{\alpha}x, \sqrt{\alpha}\mu; \alpha)$, приходим к уравнению

$$\mu \frac{\partial h_1}{\partial x'} + h_1(x', \mu; \alpha) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 (1 - \mu'^2) h_1(x', \mu'; \alpha) d\mu'.$$

Это уравнение является [8] БКВ-уравнением для одноатомных газов с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости.

4. ЗАДАЧА КРАМЕРСА

Задача Крамерса при условии полного диффузного отражения ферми-частиц от стенки состоит в решении уравнения (2.4) с граничными условиями

$$\begin{aligned} h(0, \mu; \alpha) &= 0, \quad \mu > 0, \\ h(x, \mu; \alpha) &= u_0(\alpha) + g(x - \mu) + o(1), \quad x \rightarrow +\infty, \quad \mu < 0. \end{aligned}$$

Здесь $u_0(\alpha)$ — неизвестная безразмерная скорость скольжения, связанная с размерной соотношением $u_0(\alpha) = \sqrt{\beta} w_0$, g — известный градиент (безразмерной) массовой скорости.

Разделение переменных в уравнении (2.4) приводит к решениям

$$h_\eta(x, \mu; \alpha) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu; \alpha),$$

где функция Φ удовлетворяет уравнениям

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta, \mu; \alpha) = \eta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} K(\mu, \alpha)\Phi(\eta, \mu; \alpha) d\mu \equiv 1.$$

Из этих уравнений при $\eta \in (-\infty, +\infty)$ находим

$$\Phi(\eta, \mu; \alpha) = \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \frac{\lambda(\eta; \alpha)}{K(\eta; \alpha)} \delta(\eta - \mu),$$

где символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла от x^{-1} , $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, $\lambda(z; \alpha)$ — дисперсионная функция,

$$\lambda(z; \alpha) = 1 + z \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(u; \alpha)}{u - z} du.$$

Решение задачи Крамерса будем искать в виде

$$h(x, \mu; \alpha) = u_0(\alpha) + g(x - \mu) + \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \Phi(\eta, \mu; \alpha) a(\eta; \alpha) d\eta, \quad (4.1)$$

где $u_0(\alpha)$ и $a(\eta; \alpha)$ — неизвестные постоянная и функция. Подставляя разложение (4.1) в граничное условие на стенке, приходим к сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши

$$u_0(\alpha) - g\mu + \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta; \alpha)}{\eta - \mu} d\eta + \frac{\lambda(\mu; \alpha)}{K(\mu; \alpha)} a(\mu; \alpha) = 0, \quad \mu > 0.$$

Введем вспомогательную функцию

$$N(z; \alpha) = \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta; \alpha)}{\eta - z} d\eta$$

и сведем сингулярное уравнение к краевой задаче Римана

$$\lambda^+(\mu; \alpha)[N^+(\mu; \alpha) + u_0(\alpha) - g\mu] = \lambda^-(\mu; \alpha)[N^-(\mu; \alpha) + u_0(\alpha) - g\mu], \quad \mu > 0.$$

Соответствующая краевая задача

$$\frac{X^+(\mu; \alpha)}{X^-(\mu; \alpha)} = \frac{\lambda^+(\mu; \alpha)}{\lambda^-(\mu; \alpha)}, \quad \mu > 0,$$

имеет следующее ограниченное в нуле решение:

$$X(z; \alpha) = \frac{1}{z} \exp V(z; \alpha), \quad V(z; \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\zeta(u; \alpha)}{u - z} du.$$

Здесь $\zeta(u; \alpha) = \theta(u; \alpha) - \pi$, $\theta(u; \alpha)$ — непрерывная регулярная ветвь аргумента функции $\lambda^+(u; \alpha)$, фиксированная в нуле условием $\theta(0; \alpha) = 0$.

Вернемся к задаче Римана и преобразуем ее следующим образом:

$$X^+(\mu; \alpha)[N^+(\mu; \alpha) + u_0(\alpha) - g\mu] = X^-(\mu; \alpha)[N^-(\mu; \alpha) + u_0(\alpha) - g\mu], \quad \mu > 0.$$

Эта задача имеет общее решение

$$N(z; \alpha) = -u_0(\alpha) + gz + \frac{c_0(\alpha)}{X(z; \alpha)},$$

где $c_0(\alpha)$ — неизвестная постоянная. Чтобы это решение можно было принять в качестве вспомогательной функции $N(z; \alpha)$, введенной выше, потребуем, чтобы общее решение обладало свойством $N(\infty; \alpha) = 0$. При этом получаем, что $c_0(\alpha) = -g$, а также находим искомую скорость скольжения

$$u_0(\alpha) = gV_1(\alpha), \tag{4.2}$$

где

$$V_1(\alpha) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \zeta(u; \alpha) du.$$

Скорость изотермического скольжения $u_0(\alpha)$ можно представить в виде $u_0(\alpha) = C_m g$, где C_m — коэффициент изотермического скольжения. Из формулы (4.2) следует, что $C_m = V_1(\alpha)$.

Из формулы Сохоцкого для $N(z; \alpha)$ найдем неизвестную функцию $a(\eta; \alpha)$ разложения (4.1),

$$\eta a(\eta; \alpha) = -g \frac{1}{2\pi i} \left[\frac{1}{X^+(\eta; \alpha)} - \frac{1}{X^-(\eta; \alpha)} \right] = g \frac{\sin \zeta(\eta; \alpha)}{\pi X(\eta; \alpha)}. \quad (4.3)$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты разложения (4.1) найдены (формулы (4.2) и (4.3)).

Подставляя (4.2) и (4.3) в (4.1), после некоторых преобразований получим

$$\begin{aligned} \frac{h(x, \mu; \alpha)}{g} = & V_1(\alpha) + x - \mu + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) \frac{\sin \zeta(\eta; \alpha)}{X(\eta; \alpha)} \frac{d\eta}{\eta - \mu} + \\ & + \exp\left(-\frac{x}{\mu}\right) \frac{\cos \zeta(\mu; \alpha)}{X(\mu; \alpha)} \theta_+(\mu), \end{aligned} \quad (4.4)$$

где

$$\theta_+(\mu) = \begin{cases} 1, & \mu > 0, \\ 0, & \mu < 0. \end{cases}$$

Формулу (4.4) удобно использовать для построения профиля функции распределения в полупространстве.

Из формул (4.3) и (4.4) при $x = 0$ имеем

$$\frac{h(0, \mu; \alpha)}{g} = V_1(\alpha) - \mu + \int_0^\infty \frac{\eta a(\eta; \alpha)}{\eta - \mu} d\eta + \frac{\cos \zeta(\mu; \alpha)}{X(\mu; \alpha)} \theta_+(\mu).$$

Согласно ранее доказанному можно записать, что при $\mu > 0$

$$\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta; \alpha)}{\eta - \mu} d\eta = -V_1(\alpha) + \mu - \frac{\cos \zeta(\mu; \alpha)}{X(\mu; \alpha)}, \quad (4.5)$$

а при $\mu < 0$

$$\int_0^\infty \frac{\eta a(\eta; \alpha)}{\eta - \mu} d\eta = -V_1(\alpha) + \mu - \frac{1}{X(\mu; \alpha)}. \quad (4.6)$$

С помощью равенства (4.5) получаем $h(0, \mu; \alpha) = 0$, $\mu > 0$, что совпадает с граничным условием на стенке. С помощью равенства (4.6) находим функцию распределения летящих к стенке ферми-частиц

$$h(0, \mu; \alpha) = -\frac{g}{X(\mu; \alpha)}, \quad \mu < 0.$$

5. АНАЛИЗ РЕШЕНИЯ И ПРЕДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ

Для численных расчетов преобразуем угол ζ к виду

$$\zeta(u; \alpha) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Re} \lambda^+(u; \alpha)}{\operatorname{Im} \lambda^-(u; \alpha)},$$

причем $\zeta(0; \alpha) = -\pi$, $\zeta(+\infty; \alpha) = 0$. Учитывая, что

$$\operatorname{Re} \lambda^+(u; \alpha) = \lambda(u; \alpha), \quad \operatorname{Im} \lambda^-(u; \alpha) = \pi \mu K(\mu; \alpha),$$

имеем

$$V_1(\alpha) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{l(\mu; \alpha)}{\ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]} \right\} d\mu, \quad (5.1)$$

где

$$l(\mu; \alpha) = \lambda(\mu; \alpha) r(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \frac{u \ln[1 + \exp(\alpha - u^2)]}{u - \mu} du,$$

$$r(\alpha) = \int_{-\infty}^\infty \ln[1 + \exp(\alpha - u^2)] du.$$

Остановимся на частных случаях формулы (5.1) при $\alpha \rightarrow -\infty$ и при $\alpha \rightarrow +\infty$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{l(\mu; \alpha)}{\pi \mu \ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]} &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\int_{-\infty}^\infty \frac{u \ln[1 + \exp(\alpha - u^2)]}{u - \mu} du}{\pi \mu \ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\int_{-\infty}^\infty \frac{u \exp(-u^2)}{u - \mu} du}{\pi \mu \ln[1 + \exp(\alpha - \mu^2)]} = \frac{\lambda_c(\mu)}{\sqrt{\pi} \mu \exp(-\mu^2)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_c(\mu)$ — дисперсионная функция Черчиньяни [1],

$$\lambda_c(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{u \exp(-u^2)}{u - z} du.$$

Следовательно, при $\alpha \rightarrow -\infty$ формула (5.1) переходит в известную формулу Черчиньяни

$$V_1(-\infty) = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_c(u)}{\sqrt{\pi} u \exp(-u^2)} \right] du = 1.01619 \dots,$$

которая в книге [9] приведена в ином, но эквивалентном виде. Эта формула дает величину коэффициента изотермического скольжения одноатомного газа с постоянной частотой столкновений молекул.

Покажем, что в случае $\alpha \rightarrow +\infty$ формула (5.1) имеет асимптотику $V_1(\alpha) \sim V_0\sqrt{\alpha}$, $\alpha \rightarrow +\infty$, где

$$V_0 = \int_0^\infty \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\lambda_1(u)}{0.75\pi u(1-u^2)} \right] du = 0.58195 \dots$$

Отметим, что V_0 есть коэффициент изотермического скольжения одноатомного газа с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул [8], [10], [11].

В последней формуле функция

$$\lambda_1(z) = \frac{3}{4} \int_{-1}^1 \frac{u(1-u^2)}{u-z} du$$

является дисперсионной функцией задач скольжения (изотермического, теплового, барнеттовского) для газов с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Эта дисперсионная функция встречается также в решении граничных задач для кинетических уравнений с интегралами столкновений в формах БКВ [8], Шахова [10] и эллипсоидально-статистической модели [11].

В самом деле, при $\alpha \rightarrow +\infty$ согласно (3.1) получаем, что $l(u; \alpha) \rightarrow l_1(u; \alpha)$, где

$$l_1(u; \alpha) = \int_{-\sqrt{\alpha}}^{\sqrt{\alpha}} \frac{y(\alpha - y^2)}{y - u} dy = \alpha^2 \int_{-1}^1 \frac{y(1 - y^2)}{\sqrt{\alpha}y - u} dy.$$

Поэтому при $\alpha \rightarrow +\infty$ находим, что

$$V_1(\alpha) = \int_0^{\sqrt{\alpha}} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{l_1(u; \alpha)}{\pi u(\alpha - u^2)} \right] du.$$

Отсюда после замены $u \rightarrow \sqrt{\alpha}u$ получаем искомую асимптотическую формулу.

Подчеркнем, что случай $\alpha \gg 1$ соответствует вырожденному ферми-газу. При этом все кинетические процессы обусловлены электронами, находящимися на поверхности Ферми. Эти электроны обладают одной и той же кинетической энергией, а значит, и одинаковой величиной скорости Ферми v_F . Поэтому кинетические явления связаны только с направлением движения электронов. Именно такая ситуация реализуется для данной задачи, когда рассматривается классическое кинетическое БКВ-уравнение с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул. Этим обстоятельством и обусловлен предельный переход, выполненный при $\alpha \gg 1$.

На рисунке изображена зависимость коэффициента изотермического скольжения от величины α — отношения химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру. Из рисунка видно, что при больших положительных α ($\alpha \geq 10$) график выходит на свою асимптотику $V_1(\alpha) = V_0\sqrt{\alpha} + o(1)$, $\alpha \rightarrow +\infty$ (пунктирная кривая), а при отрицательных α график выходит на асимптотику $V_1(\alpha) = V_1(-\infty) + o(1) = 1.01619 + o(1)$ уже при $\alpha \leq -1$.

Таким образом, анализ приведенного графика показывает, что переход между вырожденным квантовым и классическим случаем происходит на относительно узком интервале значений α . При $\alpha \leq -1$ величина $V_1(\alpha)$ практически совпадает с асимптотическим значением, соответствующим классическому случаю. В то же время при $\alpha \geq 10$ кривая проходит очень близко от своего асимптотического предела, соответствующего вырожденному случаю.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе продолжено построение кинетических уравнений для квантовых газов и решение соответствующих граничных задач (см. нашу работу [6]). Отметим, что в статье [6] было построено кинетическое уравнение для безмассового бозе-газа.

В данной работе построено релаксационное кинетическое уравнение, описывающее поведение ферми-газов. Основная идея построения состоит в замене локально-равновесной функции Максвелла–Больцмана на локально-равновесную функцию Ферми. Квантовый характер уравнения приводит к построению целого однопараметрического семейства уравнений переноса. Параметром семейства служит величина α – отношение химического потенциала к произведению постоянной Больцмана на абсолютную температуру. Оказалось, что построенное семейство уравнений в предельных случаях при $\alpha \rightarrow -\infty$ и при $\alpha \rightarrow +\infty$ содержит два классических БКВ-уравнения для одноатомного газа – соответственно уравнение для газа с постоянной частотой столкновений молекул и для газа с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости.

Получено аналитическое решение классической задачи Крамерса в виде разложения по собственным сингулярным обобщенным функциям соответствующего характеристического уравнения. Это разложение сводится к решению сингулярного интегрального уравнения с ядром Коши. Последнее, в свою очередь, приводится к краевой задаче Римана теории функций комплексного переменного. При вычислении индекса коэффициента краевой задачи сначала решалась соответствующая однородная краевая задача (при этом выбиралась та ветвь аргумента коэффициента, на которой сходится интеграл типа Коши, через который выражается это решение). Затем решалась и неоднородная задача Римана. Решение последней выражается в классе мероморфных функций. Условия разрешимости и формулы Сохоцкого позволили найти все неизвестные коэффициенты разложения решения исходной граничной задачи. Проведен численный анализ полученного решения, результат которого представлен в виде графика на рисунке.

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 99-01-00336).

Список литературы

- [1] Дж. Ферцигер, Г. Капер. Математическая теория процессов переноса в газах. М.: Мир, 1976.
- [2] К. Черчиньяни. Теория и приложения уравнения Больцмана. М.: Мир, 1977.
- [3] М. Н. Коган. Динамика разреженного газа. М.: Наука, 1967.
- [4] Дж. Займан. Электроны и фононы. ИЛ, 1962.
- [5] Ч. Киттель. Квантовая теория твердых тел. М.: Наука, 1967.
- [6] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ТМФ. 1997. Т. 111. № 3. С. 462.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Статистическая физика. М.: Наука, 1976.
- [8] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. 1997. № 1. С. 92.
- [9] К. Черчиньяни. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973.
- [10] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. Инженерно-физ. ж. 1998. Т. 71. № 2. С. 353.
- [11] А. В. Латышев, А. А. Юшканов. ЖВМиМФ. 1997. Т. 37. № 4. С. 483.

Поступила в редакцию 30.III.2001 г.,
после доработки 28.V.2001 г.