Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Мешков, В. В. Соколов, Классификация интегрируемых дивергентных N -компонентных эволюционных систем, *ТМФ*, 2004, том 139, номер 2, 192–208

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf55>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 14:38:41

КЛАССИФИКАЦИЯ ИНТЕГРИРУЕМЫХ ДИВЕРГЕНТНЫХ N -КОМПОНЕНТНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СИСТЕМ

С помощью симметричного подхода решается задача классификации интегрируемых N -компонентных эволюционных систем, имеющих вид законов сохранения. Получены полные списки как изотропных, так и анизотропных систем указанного вида. Для всех систем найдены автопреобразования Беклунда со спектральным параметром.

Ключевые слова: симметрии, преобразования Беклунда, эволюционные уравнения.

1. ВВЕДЕНИЕ

В статье [1] была предложена бескомпонентная версия симметричного подхода для классификации векторных уравнений вида

$$\mathbf{u}_t = f_n \mathbf{u}_n + f_{n-1} \mathbf{u}_{n-1} + \cdots + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u}, \quad \mathbf{u}_i = \frac{\partial^i \mathbf{u}}{\partial x^i}, \quad (1)$$

где $\mathbf{u}(x, t)$ — неизвестный вектор, принадлежащий некоторому N -мерному векторному пространству V со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)$, а f_i — скалярные функции от переменных

$$u_{[i,j]} = (\mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j), \quad 0 \leq i \leq j \leq n. \quad (2)$$

Назовем целое число j *порядком* переменной (2). Порядком функции от переменных (2) называется наивысший из порядков переменных, от которых она зависит.

Очевидно, что система (1) инвариантна относительно движений пространства V , поэтому мы называем такие системы *изотропными*.

Предложенная модификация симметричного подхода может быть легко обобщена на случай, когда на пространстве V определены два различных скалярных произведения.

*Орловский государственный университет, Орел, Россия. E-mail: meshkov@orel.ru

†Институт теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН, Москва, Россия.
E-mail: sokolov@landau.ac.ru

В этом случае мы расширяем множество динамических переменных (2) путем добавления дополнительных переменных

$$\tilde{u}_{[i,j]} = \langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_j \rangle, \quad 0 \leq i \leq j \leq n, \quad (3)$$

построенных по второму скалярному произведению. Число j называется порядком переменной (3).

Если коэффициенты уравнения (1) зависят и от $u_{[i,j]}$, и от $\tilde{u}_{[i,j]}$, то мы называем такое уравнение *анизотропным*.

Примером интегрируемого изотропного уравнения является векторное модифицированное уравнение Кортевега–де Фриза (КдФ)

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + (\mathbf{u}, \mathbf{u}) \mathbf{u}_x. \quad (4)$$

Хорошо известно, что это уравнение интегрируемо методом обратной задачи рассеяния при любом N . Другие примеры интегрируемых векторных уравнений можно найти в статьях [2]. Некоторые из них тесно связаны с такими алгебраическими и геометрическими объектами, как йордановы тройные системы и симметрические пространства [3].

Примеры интегрируемых анизотропных систем также известны. Например, в работе [4] было показано, что уравнение

$$\mathbf{u}_t = \left(\mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} (\mathbf{u}_x, \mathbf{u}_x) \mathbf{u} \right)_x + \frac{3}{2} (\mathbf{u}, R\mathbf{u}) \mathbf{u}_x, \quad \mathbf{u}^2 = 1, \quad (5)$$

где R – постоянная симметричная матрица, интегрируемо методом обратной задачи рассеяния при любых N и R . В этом случае второе скалярное произведение задается формулой $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = (\mathbf{x}, R\mathbf{y})$. Здесь и далее мы полагаем $\mathbf{u}^2 = (\mathbf{u}, \mathbf{u})$.

Задача, которую мы рассматриваем в настоящей статье, – это полная классификация интегрируемых векторных эволюционных уравнений вида

$$\mathbf{u}_t = (\mathbf{u}_2 + f_1 \mathbf{u}_1 + f_0 \mathbf{u})_x, \quad f_i = f_i(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}, u_{[0,1]}, \tilde{u}_{[0,1]}, u_{[1,1]}, \tilde{u}_{[1,1]}), \quad (6)$$

где f_i – некоторые скалярные функции.

Важно подчеркнуть, что мы исследуем уравнения, которые являются интегрируемыми при любой размерности N вектора $\mathbf{u}$. При этом мы предполагаем, что коэффициенты f_i не зависят от N . Ввиду произвольности N переменные (2) и (3) будут считаться *независимыми*. Функциональная независимость переменных $u_{[i,j]}$, $\tilde{u}_{[i,j]}$, $i \leq j$, – это решающее требование в нашем исследовании. Если N фиксировано, то этого нельзя утверждать. Например, если $N = 3$, то определитель с элементами $u_{[i,j]}$, $i, j = 1, 2, 3, 4$, тождественно равен нулю.

Подчеркнем также, что для нас несущественна реализация метрик в пространстве V , так как мы используем в данном исследовании только самые общие свойства скалярного

произведения – билинейность, симметричность и непрерывность. Ясно, что конечномерность или вещественность пространства V также не важны.

В разделе 4 мы приводим для всех найденных уравнений автопреобразования Беклунда, зависящие от произвольного “спектрального” параметра. С нашей точки зрения, это, во-первых, доказывает точную интегрируемость уравнений, во-вторых, позволяет строить n -параметрические семейства точных решений солитонного типа для произвольного n . В-третьих, сами эти преобразования Беклунда представляют собой (см. [5]) новые точно интегрируемые векторные дискретно-непрерывные модели.

Кроме того, в разделе 4 мы находим формулы нелинейной суперпозиции для одного из наиболее интересных уравнений списка – векторного уравнения Шварца–КдФ, которые представляют собой новые полностью дискретные векторные интегрируемые уравнения.

2. КЛАССИФИКАЦИОННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы формулируем результаты классификации интегрируемых эволюционных уравнений вида (6). Эта задача намного проще общей задачи классификации уравнений вида

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_3 + h_2 \mathbf{u}_2 + h_1 \mathbf{u}_1 + h_0 \mathbf{u}, \quad (7)$$

так как мы имеем лишь две неизвестные функции f_0 и f_1 , зависящие от меньшего числа переменных, чем функции h_i .

Отметим прежде всего, что линейные замены двух метрик или, что то же самое, преобразования вида

$$u_{[i,j]} \longrightarrow k_1 u_{[i,j]} + k_2 \tilde{u}_{[i,j]}, \quad \tilde{u}_{[i,j]} \longrightarrow k_3 u_{[i,j]} + k_4 \tilde{u}_{[i,j]}, \quad (8)$$

где k_i – постоянные, $k_1 k_4 - k_2 k_3 \neq 0$, не нарушают интегрируемости уравнения (6).

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что уравнение (6) допускает бесконечную последовательность коммутирующих потоков вида*

$$\mathbf{u}_{\tau_k} = g_k \mathbf{u}_k + g_{k-1} \mathbf{u}_{k-1} + \cdots + g_1 \mathbf{u}_x + g_0 \mathbf{u}, \quad k \rightarrow \infty,$$

где коэффициенты g_i зависят от переменных (2) и (3). Тогда по модулю преобра-

зований (8) это уравнение принадлежит к следующему списку:

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 u_{[0,1]}^2}{1 + a u_{[0,0]}} - a u_{[1,1]} \right) \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right), \quad (9)$$

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right), \quad (10)$$

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2 (1 + a u_{[0,0]})} \right) \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right), \quad (11)$$

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} - \frac{3}{2} \frac{(p+1)u_{[0,1]}}{p u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} (p+1) \left(\frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} - \frac{a u_{[0,1]}^2}{p^2 u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right), \quad (12)$$

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + \frac{u_{[0,1]}^2}{u_{[0,0]}^2} + b \frac{\tilde{u}_{[0,0]}}{u_{[0,0]}} \right) \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right), \quad (13)$$

где a , b и c — произвольные константы, $p = \sqrt{1 + a u_{[0,0]}}$.

ТЕОРЕМА 2. Если уравнение (6) допускает бесконечную последовательность законов сохранения $(\rho_k)_t = (\sigma_k)_x$, $k \rightarrow \infty$, где ρ_k и σ_k — функции переменных (2), (3), то по модулю преобразований (8) это уравнение принадлежит списку (9)–(13).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Константу c можно устранить с помощью преобразования Галилея, ниже мы опускаем эту константу как тривиальную. Уравнения (9)–(12) изотропные, а (13) анизотропное. В уравнениях (9)–(12) постоянная a либо нулевая, либо приводится к значениям $a = \pm 1$ подходящим масштабным преобразованием $\mathbf{u}$. Постоянная b в уравнении (13) может быть нормирована растяжением метрики $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Таким образом, представленный список содержит довольно много неэквивалентных над $\mathbb{R}$ уравнений. В частности, уравнение (12) при $a = 0$ и $p > 0$ имеет вид

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_{xx} - 3 \frac{u_{[0,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u}_x + 3 \frac{u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} \mathbf{u} + c \mathbf{u} \right). \quad (14)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В ходе доказательства теорем 1 и 2 выяснилось, что все уравнения (9)–(13) имеют нетривиальные локальные законы сохранения порядков 1, 2, 3 и 4. Кроме того, мы проверили, что каждое из этих уравнений имеет высшую симметрию пятого порядка. Мы уверены, что все эти уравнения обладают бесконечными наборами симметрий и сохраняющихся плотностей, но это нуждается, конечно, в строгом доказательстве. С нашей точки зрения, необходимые условия существования высших симметрий и/или законов сохранения дают очень эффективный способ перечисления всех интегрируемых случаев. Однако симметрии и законы сохранения мало помогают в задаче интегрирования данного уравнения. По этой причине в разделе 4 мы приводим для всех уравнений списка автопреобразования Беклунда, зависящие от произвольного параметра.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Совпадение списков уравнений в теоремах 1 и 2 показывает, что так называемых уравнений типа Бюргера вида (6) не существует. Напомним, что уравнения типа Бюргера (C -интегрируемые уравнения по терминологии Калоджеро [6]) обладают высшими симметриями, но не имеют высших законов сохранения.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. В случае, когда размерность N пространства V равна единице, уравнения (9), (11) и (12) редуцируются к одному и тому же уравнению

$$u_t = D_x \left(u_2 - \frac{3}{2} a \frac{u u_1^2}{1 + a u^2} \right). \quad (15)$$

Редукция уравнения (10) имеет вид

$$u_t = D_x \left(u_2 - \frac{3}{2} \frac{u_1^2}{u} \right). \quad (16)$$

Оба уравнения (15) и (16) приводятся подходящим точечным преобразованием к потенциальному модифицированному уравнению КдФ $v_t = v_3 \pm v_1^3$. Уравнение (13) редуцируется к линейному уравнению $u_t = u_3 + k u_1$.

3. СОКРАЩЕННОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2

3.1. Канонические плотности. В статье [7] было введено понятие формальной симметрии для однокомпонентных эволюционных уравнений с одной пространственной переменной

$$u_t = F(u, u_1, u_2, \dots, u_n), \quad u_i = \frac{\partial^i u}{\partial x^i}. \quad (17)$$

По определению формальная симметрия (или формальный рекурсионный оператор) — это формальный некоммутативный ряд вида

$$L = a_1 D_x + a_0 + a_{-1} D_x^{-1} + a_{-2} D_x^{-2} + \dots, \quad a_i = a_i(u, u_1, \dots, u_{n_i}), \quad (18)$$

удовлетворяющий следующему операторному соотношению:

$$L_t = [F_*, L], \quad F_* = \sum_{i=0}^n \frac{\partial^i F}{\partial u_i} D_x^i. \quad (19)$$

Здесь D_x — оператор полной производной по x :

$$D_x = \sum_{i=0}^{\infty} u_{i+1} \frac{\partial^i}{\partial u_i},$$

F_* — производная Фреше от правой части уравнения (17). В работах [7], [8] было показано, что формальная симметрия существует для любого уравнения, обладающего бесконечной серией локальных высших симметрий или законов сохранения.

Вычеты $\rho_n = \text{res } L^n$ (т.е. коэффициенты при D_x^{-1}) являются локальными сохраняющимися плотностями для уравнения (17). Они называются *каноническими плотностями*. В работе [8] было доказано, что если уравнение (17) имеет бесконечную последовательность законов сохранения, то канонические плотности ρ_{2n} с четными номерами тривиальны.

Существует альтернативный способ вычисления канонических плотностей [9], [10]. Он основывается на тождествах для логарифмической производной от формальной собственной функции оператора $\partial/\partial t - F_*$. Этот алгоритм использует коммутативные ряды Лорана в противоположность некоммутативным рядам, подобным (18).

В работе [1] были определены необходимые условия интегрируемости для векторных уравнений (1). Эти условия имеют вид законов сохранения

$$D_t \rho_i = D_x \theta_i, \quad i = 0, 1, 2, \dots, \quad (20)$$

где ρ_i, θ_i — функции переменных (2), (3), которые рекуррентно выражаются через коэффициенты f_i уравнения (1). Напомним, что локальным законом сохранения для уравнения (1) называется всякое соотношение вида

$$D_t \rho = D_x \theta,$$

где ρ и θ — некоторые функции от переменных (2), (3), D_t — дифференцирование в силу уравнения (1). Плотности ρ и $\tilde{\rho}$ называют эквивалентными, если найдется такая локальная функция f , что $\rho - \tilde{\rho} = D_x f$. В этом случае мы будем писать $\rho \sim \tilde{\rho}$. Плотности вида $\rho = D_x f \sim 0$ называются тривиальными. Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности в обычном алгебраическом смысле, т.е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Условия, которые мы используем в настоящей статье, идейно очень близки к каноническим законам сохранения из работ [7], [9]–[14], но не совпадают с ними. Решающий шаг при их выводе состоит в замене матричного оператора $D_t - F_*$ на скалярный оператор

$$D_t - (f_n D_x^n + f_{n-1} D_x^{n-1} + \dots + f_1 D_x + f_0),$$

который вовсе не совпадает с производной Фреде от уравнения (1).

ТЕОРЕМА 3 [1]. 1. Если уравнение (1) обладает бесконечной серией коммутирующих потоков вида

$$\mathbf{u}_\tau = g_m \mathbf{u}_m + g_{m-1} \mathbf{u}_{m-1} + \dots + g_1 \mathbf{u}_1 + g_0 \mathbf{u}, \quad (21)$$

то существует формальный (скалярный) ряд

$$L = a_1 D_x + a_0 + a_{-1} D_x^{-1} + a_{-2} D_x^{-2} + \dots, \quad (22)$$

удовлетворяющий операторному соотношению

$$L_t = [A, L], \quad A = \sum_{i=0}^n f_i D_x^i. \quad (23)$$

Здесь f_i – коэффициенты уравнения (1), a_i – некоторые функции от переменных (2) в изотропном случае и от переменных (2) и (3) в анизотропном.

2. Функции

$$\rho_{-1} = \frac{1}{a_1}, \quad \rho_0 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \rho_i = \text{res } L^i, \quad i \in \mathbb{N}, \quad (24)$$

являются плотностями законов сохранения для уравнения (1).

3. Если уравнение (1) обладает бесконечной серией законов сохранения (20), где ρ_i , θ_i – некоторые функции переменных (2) в изотропном случае и переменных (2), (3) в анизотропном, то существуют ряд L , удовлетворяющий (23), и ряд S вида

$$S = s_1 D_x + s_0 + s_{-1} D_x^{-1} + s_{-2} D_x^{-2} + \dots \quad (25)$$

такой, что

$$S_t + A^T S + S A = 0, \quad S^T = -S, \quad (26)$$

где верхний индекс T означает формальное сопряжение (см., например, [13]).

4. При выполнении условий п. 3 плотности (24) с $i = 2k$ тривиальны (т.е. имеют вид $\rho_{2k} = D_x(\sigma_k)$ для некоторых локальных функций σ_k).

Использование скалярного ряда L , определенного формулой (18), вместо формальной симметрии (которая является матричным рядом) делает в принципе возможной полную классификацию интегрируемых систем (1) вида (7) без всяких предположений о структуре коэффициентов f_i . Однако эта сложная задача до сих пор не решена.

В работе [1] для общего уравнения третьего порядка (7) получена следующая рекуррентная формула для ρ_i :

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}h_2, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}h_2^2 - \frac{1}{3}h_1 + \frac{1}{3}D_x h_2, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \rho_{n+2} = & \frac{1}{3}[\theta_n - h_0 \delta_{n,0} - 2h_2 \rho_{n+1} - h_2 D_x \rho_n - h_1 \rho_n] - \\ & - \frac{1}{3} \left[h_2 \sum_{s=0}^n \rho_s \rho_{n-s} + \sum_{0 \leq s+k \leq n} \rho_s \rho_k \rho_{n-s-k} + 3 \sum_{s=0}^{n+1} \rho_s \rho_{n-s+1} \right] - \\ & - D_x \left[\rho_{n+1} + \frac{1}{2} \sum_{s=0}^n \rho_s \rho_{n-s} + \frac{1}{3} D_x \rho_n \right], \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (28)$$

где δ_{ij} – дельта-символ Кронекера. Согласно этим формулам

$$\rho_2 = -\frac{1}{3}h_0 + \frac{1}{3}\theta_0 - \frac{2}{81}h_2^3 + \frac{1}{9}h_1 h_2 - D_x \left(\frac{1}{9}h_2^2 + \frac{2}{9}D_x h_2 - \frac{1}{3}h_1 \right)$$

и т.д.

Рассматриваемое нами уравнение (6) можно получить из (7), положив

$$h_2 = f_1, \quad h_1 = f_0 + D_x f_1, \quad h_0 = D_x f_0.$$

Подставив h_i в формулы (27), (28), нетрудно найти первые канонические плотности для уравнения (6):

$$\rho_0 = -\frac{1}{3}f_1, \quad \rho_1 = \frac{1}{9}f_1^2 - \frac{1}{3}f_0, \quad \rho_2 \sim \frac{1}{3}\theta_0 - \frac{2}{81}f_1^3 + \frac{1}{9}f_0f_1. \quad (29)$$

Соответствующие функции θ_i определяются формулой (20). То, что левые части (20) являются полными производными по x , влечет жесткие ограничения (см. ниже) на коэффициенты f_i уравнения (6).

3.2. Классификационные вычисления. В силу утверждения 4 теоремы 3 все четные канонические плотности (и, в частности, ρ_0) тривиальны. Из формулы (29) для ρ_0 следует, что $f_1 = D_x \varphi$, $\theta_0 = -(1/3)D_t \varphi$. При этом, поскольку порядок f_1 не выше первого, φ – некоторая функция нулевого порядка. Отсюда получаем

$$f_1 = 2 \frac{\partial \varphi}{\partial u_{[0,0]}} u_{[0,1]} + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \tilde{u}_{[0,1]}.$$

Подставляя эту формулу в (29) и вычисляя $D_t \rho_1$, можно убедиться, что

$$D_t \rho_1 \sim \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f_0}{\partial u_{[1,1]}} D_x \varphi - D_x \frac{\partial f_0}{\partial u_{[1,1]}} \right) u_{[2,2]} + \left(\frac{2}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{u}_{[1,1]}} D_x \varphi - D_x \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{u}_{[1,1]}} \right) \tilde{u}_{[2,2]} + F, \quad (30)$$

где F – функция второго порядка, не зависящая от $u_{[2,2]}$ и $\tilde{u}_{[2,2]}$. Поскольку согласно (20) $D_t \rho_1 \sim 0$, то приведенное выше выражение должно быть эквивалентно нулю. Однако для любой функции h первого порядка выражение $D_x h$ не зависит от $u_{[2,2]}$ и $\tilde{u}_{[2,2]}$:

$$D_x h = 2 \frac{\partial h}{\partial u_{[1,1]}} u_{[1,2]} + 2 \frac{\partial h}{\partial \tilde{u}_{[1,1]}} \tilde{u}_{[1,2]} + \dots$$

Следовательно, коэффициенты при $u_{[2,2]}$ и $\tilde{u}_{[2,2]}$ в (30) должны обратиться в нуль:

$$D_x \frac{\partial f_0}{\partial u_{[1,1]}} = \frac{2}{3} \frac{\partial f_0}{\partial u_{[1,1]}} D_x \varphi, \quad D_x \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{u}_{[1,1]}} = \frac{2}{3} \frac{\partial f_0}{\partial \tilde{u}_{[1,1]}} D_x \varphi.$$

Общее решение этих уравнений имеет вид

$$f_0 = (c_1 u_{[1,1]} + c_2 \tilde{u}_{[1,1]}) f + g(u_{[0,0]}, u_{[0,1]}, \tilde{u}_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,1]}),$$

где $f(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{2\varphi/3}$, а c_i – константы. Учитывая наличие преобразований (8), без ограничения общности считаем, что $c_2 = 0$. Таким образом, уравнение (6) приводится к виду

$$\mathbf{u}_t = D_x \left(\mathbf{u}_x + \frac{3}{2f} D_x(f) \mathbf{u}_x + (c_1 f u_{[1,1]} + g) \mathbf{u} \right). \quad (31)$$

Теперь полезно рассмотреть второе условие интегрируемости $\rho_2 \sim 0$. Несложное вычисление дает

$$\begin{aligned} \rho_2 \sim & \frac{u_{[1,1]}}{3} f D_x \left[\frac{c_1}{f} \left(u_{[0,0]} \frac{\partial f}{\partial u_{[0,0]}} + \tilde{u}_{[0,0]} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \right) - \frac{3}{2f^2} \frac{\partial f}{\partial u_{[0,0]}} \right] - \\ & - \frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{2} f D_x \left(f^{-2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \right) + G, \end{aligned}$$

где G – некоторая функция первого порядка, не зависящая от $u_{[1,1]}$ и $\tilde{u}_{[1,1]}$. Очевидно, что это выражение может быть эквивалентно нулю, только если выполняются уравнения

$$D_x \left(f^{-2} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \right) = 0, \quad D_x \left[\frac{c_1}{f} \left(u_{[0,0]} \frac{\partial f}{\partial u_{[0,0]}} + \tilde{u}_{[0,0]} \frac{\partial f}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \right) - \frac{3}{2f^2} \frac{\partial f}{\partial u_{[0,0]}} \right] = 0.$$

Решение первого из этих уравнений задается формулой

$$f = (h + a\tilde{u}_{[0,0]})^{-1},$$

где $h = h(u_{[0,0]})$, a – константа, которую мы без ограничения общности можем положить либо нулем, либо единицей. После подстановки f во второе уравнение оно распадается на три других:

$$ah'' = 0, \quad ac_1(u_{[0,0]}h' - h) = 0, \quad hh''(3h - 2c_1u_{[0,0]}) + 2c_1h'(u_{[0,0]}h' - h) = 0. \quad (32)$$

Отсюда имеем следующие варианты.

А. $a = 1$, $f = (\tilde{u}_{[0,0]} + bu_{[0,0]} + c)^{-1}$, $cc_1 = 0$, где b, c – константы.

Б. $a = 0$, $f = f(u_{[0,0]})$.

В случае А при $c_1 = 0$ в уравнении (31) исчезает слагаемое, которым фиксировалась метрика пространства V . Поэтому мы преобразованием метрики (8) приведем f к виду $f = 1/(u_{[0,0]} + c)$, который рассматривается в случае Б. Итак, в случае А мы полагаем $c_1 \neq 0$, $c = 0$. Условие интегрируемости $\rho_2 \sim 0$ в этом случае выполнено автоматически. Рассматривая условие интегрируемости $D_t \rho_1 \sim 0$, можно получить, что $D_t \rho_1$ эквивалентно полиному третьей степени по переменным второго порядка. Приравняв к нулю коэффициенты этого полинома при вторых и третьих степенях, мы получаем противоречивую систему уравнений для g .

В случае Б условие интегрируемости $\rho_2 \sim 0$ можно записать с учетом (32) в следующей компактной форме, если ввести функцию ψ с помощью формулы $f' = f\psi/u_{[0,0]}$:

$$\begin{aligned} gu_{[0,1]}\psi' + \frac{u_{[0,1]}^3}{u_{[0,0]}^3} (u_{[0,0]}(3\psi\psi' - u_{[0,0]}\psi'' + 2\psi') - 3\psi(\psi+1)(\psi+2)) = \\ = \frac{\partial q}{\partial u_{[0,0]}} u_{[0,1]} + \frac{\partial q}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \tilde{u}_{[0,1]}, \end{aligned} \quad (33)$$

где $q = q(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]})$. Последнее из уравнений (32) также принимает простой вид

$$(2c_1 f u_{[0,0]} - 3) u_{[0,0]} \psi' + 3\psi(\psi + 1) = 0.$$

Учитывая это соотношение и определение функции ψ , разбиваем вариант Б на три под-варианта:

Б₁: $\psi' \neq 0$; Б₂: $\psi = 0$, $f = 1$, $f_1 = 0$; Б₃: $\psi = -1$, $f = u_{[0,0]}^{-1}$, $f_1 = -3u_{[0,1]}/u_{[0,0]}$.

В случае Б₁ мы выражаем g из уравнения (33). Первое условие интегрируемости $D_t \rho_1 = D_x \theta_1$ приводит к переопределенной системе уравнений для ψ . Решив эту систему, мы находим

$$\psi = -\frac{p+1}{2p}, \quad f = \frac{3}{2} \frac{p+1}{c_1 u_{[0,0]}}, \quad q = -\frac{c}{9p}, \quad g = c - \frac{3}{2} \frac{a(p+1)u_{[0,1]}^2}{p^2 u_{[0,0]}},$$

где c — константа, $p = \sqrt{1 + a u_{[0,0]}}$. При подстановке этих выражений в (31) получается уравнение (12).

В случае Б₂ из первого условия интегрируемости следует, что

$$\begin{aligned} f_0 = c_1 u_{[1,1]} - 2 \frac{c_1^2 u_{[0,1]}^2}{2c_1 u_{[0,0]} - 3} + \frac{\partial q_1}{\partial u_{[0,0]}} u_{[0,1]} + \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \tilde{u}_{[0,1]} + \\ + c_2 \tilde{u}_{[0,0]} + c_3 (c_1 u_{[0,0]}^2 - 3u_{[0,0]}) + c, \end{aligned}$$

где $q_1 = q_1(u_{[0,0]}, \tilde{u}_{[0,0]})$, а c_i — некоторые постоянные такие, что

$$c_i \frac{\partial q_1}{\partial u_{[0,0]}} = 0, \quad c_i \frac{\partial q_1}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad c_1 c_2 = 0.$$

Если $c_1 \neq 0$, то отсюда следует $c_2 = 0$, $q_1 = \text{const}$. Далее, из третьего условия интегрируемости $D_t \rho_3 = D_x \theta_3$ получаем $c_3 = 0$ и приходим к системе (9). Если $c_1 = 0$, то условиям (20) с $i = 0, 1, \dots, 5$ удовлетворяет только линейная система $\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} + c\mathbf{u}_x$.

В случае Б₃ уравнение (33) выполнено при $q = 0$, а из первого условия интегрируемости частично определяется вид функции f_0 :

$$f_0 = \frac{c_1 u_{[1,1]}}{u_{[0,0]}} + \alpha u_{[0,1]}^2 + \frac{\partial q_2}{\partial u_{[0,0]}} u_{[0,1]} + \frac{\partial q_2}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} \tilde{u}_{[0,1]} + \frac{c_2 \tilde{u}_{[0,0]}}{u_{[0,0]}} + \beta,$$

где α и β зависят только от $u_{[0,0]}$. Кроме того, возникает большое количество уравнений на функции α , β , q_2 и константы c_i . Мы приводим только независимые уравнения, полученные элементарными преобразованиями из исходной системы:

$$\begin{aligned} (2c_1 - 3)(\alpha u_{[0,0]}^2 + c_1 - 3) = 0, \quad c_2(2c_1 - 3) = 0, \quad (2c_1 - 3)u_{[0,0]}\beta'' = 3\beta', \\ c_2(2\alpha u_{[0,0]}^2 - 3) = 0, \quad c_i \frac{\partial q_2}{\partial u_{[0,0]}} = 0, \quad c_i \frac{\partial q_2}{\partial \tilde{u}_{[0,0]}} = 0, \quad i = 1, 2, \\ 3u_{[0,0]}\alpha' = 2\alpha(\alpha u_{[0,0]}^2 - 6 + c_1). \end{aligned}$$

Если $c_2 \neq 0$, то $c_1 = 3/2$, $\alpha = 3/(2u_{[0,0]})$, $q_2 = \text{const}$, $\beta = c$, и мы приходим к уравнению (13).

Далее считаем $c_2 = 0$. Если предположить $2c_1 - 3 \neq 0$, то из предыдущих уравнений определяется $\alpha = (3 - c_1)/u_{[0,0]}^2$. Затем из третьего условия интегрируемости получаем $q_2 = \text{const}$, $\beta = c$; из пятого условия $D_t \rho_5 = D_x \theta_5$ следует $c_1 = 3$, и мы приходим к уравнению (14). Наконец, если $c_1 = 3/2$, то из вышеприведенных уравнений следует, что q_2 и β – константы. Если выбрать особое решение $\alpha = 0$ уравнения Бернулли для α , то мы получим уравнение (10). Общее решение приводит к уравнению (11).

Для каждого из уравнений списка мы проверили условия интегрируемости (20) с $i = 0, 1, \dots, 7$ (а для (12) – также и с $i=8, 9$) и установили, что все они выполнены.

4. ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БЕКЛУНДА ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СПИСКА

Уравнения из нашего списка (9)–(13) удовлетворяют нескольким первым необходимым условиям интегрируемости. Остается убедиться, что эти уравнения действительно интегрируемы. Обычно для этого вычисляют либо представление Лакса, либо преобразование типа Миуры между “новыми” уравнениями и уравнениями, про которые известно, что они интегрируемы. Но мы избрали другую возможность.

В этом разделе мы приводим автопреобразования Беклунда первого порядка для всех уравнений из списка (9)–(13). Эти преобразования содержат произвольный параметр, в принципе позволяющий строить как многосолитонные, так и конечнозонные решения, даже если представление Лакса неизвестно (см. [5]). При этом, однако, необходимо отметить, что строгого критерия неустраимости параметра как для преобразования Беклунда, так и для представления Лакса в настоящее время, по-видимому, не существует (несмотря на ряд наблюдений различных авторов на эту тему). Поэтому в каждом конкретном случае этот вопрос решается экспериментально.

Для скалярных эволюционных уравнений автопреобразование Беклунда первого порядка – это соотношение между двумя решениями u и v одного и того же уравнения и их производными u_x и v_x . Записывая эту связь как $u_x = \phi(u, v, v_x)$, мы можем выразить все производные от u через $u, v, v_x, \dots, v_i, \dots$. Оставшиеся переменные считаются независимыми.

В векторном изотропном случае независимые переменные – это векторы

$$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_i, \dots \quad (34)$$

и их скалярные произведения

$$u_{[0,0]} = (\mathbf{u}, \mathbf{u}), \quad v_{[i,j]} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j), \quad w_i \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{u}, \mathbf{v}_i), \quad i, j \geq 0. \quad (35)$$

В анизотропном случае к этому списку надо добавить также

$$\tilde{u}_{[0,0]} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle, \quad \tilde{v}_{[i,j]} \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle, \quad \tilde{w}_i \stackrel{\text{def}}{=} \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle, \quad i, j \geq 0. \quad (36)$$

Мы рассматриваем здесь специальные автопреобразования Беклунда следующего вида:

$$\mathbf{u}_x = h\mathbf{v}_x + f\mathbf{u} + g\mathbf{v}, \quad (37)$$

где f, g и h – некоторые скалярные функции переменных (35), (36). В изотропном случае мы предполагаем, что аргументами функций f, g и h являются $u_{[0,0]} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, $w_0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $w_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle$, $v_{[0,0]} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, $v_{[0,1]} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle$ и $v_{[1,1]} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$. В анизотропном случае добавляются еще аргументы $\tilde{u}_{[0,0]} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, $\tilde{w}_0 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$, $\tilde{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle$, $\tilde{v}_{[0,0]} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle$, $\tilde{v}_{[0,1]} = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_1 \rangle$ и $\tilde{v}_{[1,1]} = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1 \rangle$.

Чтобы найти автопреобразование Беклунда для уравнения (6), мы дифференцируем (37) по t в силу (6) и затем выражаем все векторные и скалярные переменные через независимые переменные (34) и (35). По определению преобразования Беклунда полученное таким путем соотношение должно выполняться тождественно. Расщепляя это выражение по независимым переменным, которые не являются аргументами функций f, g и h , мы получаем переопределенную систему нелинейных уравнений в частных производных для этих функций. Если система имеет решение, существенно зависящее от параметра λ , то это решение определяет искомое автопреобразование Беклунда.

При вычислениях мы положили во всех уравнениях $c = 0$. Кроме того, мы преобразовали уравнения (9)–(14) к потенциальной форме, сделав замену $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}_x$, и получили в результате список

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{a^2 u_{[1,2]}^2}{1 + au_{[1,1]}} - au_{[2,2]} \right) \mathbf{u}_x, \quad (9')$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xx} - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} \frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_x, \quad (10')$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2 (1 + au_{[1,1]})} \right) \mathbf{u}_x, \quad (11')$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} - \frac{3}{2} (p+1) \frac{u_{[1,2]}}{pu_{[1,1]}} \mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} (p+1) \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} - \frac{au_{[1,2]}^2}{p^2 u_{[1,1]}} \right) \mathbf{u}_x, \quad (12')$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_{xx} + \frac{3}{2} \left(\frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} + \frac{u_{[1,2]}^2}{u_{[1,1]}^2} + a \frac{\tilde{u}_{[1,1]}}{u_{[1,1]}} \right) \mathbf{u}_x, \quad (13')$$

$$\mathbf{u}_t = \mathbf{u}_{xxx} - 3 \frac{u_{[1,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_{xx} + 3 \frac{u_{[2,2]}}{u_{[1,1]}} \mathbf{u}_x, \quad (14')$$

где $p = \sqrt{1 + au_{[1,1]}}$, a – константа. Сделано это по двум причинам: во-первых, преобразования Беклунда для уравнений в потенциальной форме имеют более простой вид; во-вторых, уравнения (10'), (11'), (13') и (14') совпадают по форме соответственно с уравнениями (13), (11), (60) и (16) на сфере из работы [1], поэтому мы можем проследить редукцию преобразований Беклунда при переходе на сферу. Подчеркнем, что уравнения в $\mathbb{R}^n$ и в $\mathbb{S}^n$ при их внешнем совпадении – это разные уравнения, так как уравнения на сфере получаются наложением связи $u_{[0,0]} = 1$. При этой редукции некоторые из симметричных свойств уравнения теряются.

4.1. Преобразования Беклунда и формула суперпозиции для векторного уравнения Шварца–КдФ (10'). Скалярное уравнение Шварца–КдФ

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} \quad (38)$$

является частным случаем уравнения Кричевера–Новикова и имеет преобразования Беклунда следующего вида (см. [15]):

$$u_x v_x = (c_1 uv + c_2 u + c_3 v + c_4)^2. \quad (39)$$

Постоянные c_i могут быть нормированы дробно-линейными преобразованиями u и v , которые допускаются уравнением Шварца–КдФ. А именно, если $c_2 c_3 = c_1 c_4$, то многочлен в правой части приводится к единице. В противном случае без ограничения общности можно считать, что преобразование Беклунда имеет вид

$$v_x = \frac{\mu}{u_x} (u - v)^2. \quad (40)$$

Как было показано в [15], формула суперпозиции для уравнения Шварца–КдФ (как и для более общего уравнения Кричевера–Новикова) легко может быть получена из условия коммутирования преобразований Беклунда, соответствующих разным значениям параметра. Напомним конструкцию из этой работы.

Предположим, что диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} v' & \xrightarrow{\mu} & z \\ \nu \uparrow & & \uparrow \nu \\ u & \xrightarrow{\mu} & v \end{array},$$

где стрелки обозначают преобразование (40) и аналогичные ему преобразования

$$v'_x = \frac{\nu}{u_x} (u - v')^2, \quad z_x = \frac{\mu}{v'_x} (z - v')^2, \quad z_x = \frac{\nu}{v_x} (z - v)^2, \quad (41)$$

коммутативна. Подставив в два последних уравнения (41) выражения для v_x и v'_x , получаем

$$z_x = u_x \frac{\mu(z - v')^2}{\nu(u - v')^2}, \quad z_x = u_x \frac{\nu(z - v)^2}{\mu(u - v)^2}.$$

Исключая из этих двух равенств u_x и z_x , получаем алгебраическую связь

$$(\mu(u - v)(z - v') - \nu(z - v)(u - v'))(\mu(u - v)(z - v') + \nu(z - v)(u - v')) = 0.$$

Нетрудно проверить, что второй из сомножителей не может быть равен нулю, так как это противоречило бы уравнениям (40), (41), в то время как равенство нулю первого сомножителя

$$\mu(u - v)(z - v') - \nu(z - v)(u - v') = 0 \quad (42)$$

совместно с этими уравнениями.

Коммутативность преобразований Беклунда, соответствующих μ и ν , позволяет считать их сдвигами на двумерной прямоугольной решетке. Например, формула (42) задает известную интегрируемую дискретную модель (см. [16])

$$\frac{u(n+1, m) - u(n, m)}{u(n, m+1) - u(n, m)} \frac{u(n+1, m+1) - u(n, m+1)}{u(n+1, m+1) - u(n+1, m)} = \frac{\nu}{\mu}.$$

Векторное обобщение (10') уравнения Шварца–КдФ было впервые предложено в работах [2]. Для него мы нашли преобразование Беклунда, которое записывается в виде

$$\mathbf{u}_x = \frac{2\mu}{\mathbf{v}_x^2} (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{v}_x) (\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \frac{\mu}{\mathbf{v}_x^2} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 \mathbf{v}_x, \quad (43)$$

где μ – произвольный параметр. В скалярном пределе преобразование (43) переходит в (40). Отметим, что это преобразование допускает редукцию на сферу $|\mathbf{u}| = 1$.

Как и в скалярном случае, предположим, что для преобразования (43) диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{v}' & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{z} \\ \nu \uparrow & & \uparrow \nu \\ \mathbf{u} & \xrightarrow{\mu} & \mathbf{v} \end{array}$$

коммутативна. Это означает справедливость следующих тождеств:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_x &= \Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mu), & \mathbf{v}'_x &= \Phi(\mathbf{v}', \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \nu), \\ \mathbf{z}_x &= \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_x, \nu), & \mathbf{z}_x &= \Phi(\mathbf{z}, \mathbf{v}', \mathbf{v}'_x, \mu), \end{aligned} \quad (44)$$

где $\Phi(\mathbf{v}, \mathbf{u}, \mathbf{u}_x, \mu)$ обозначает правую часть преобразования (43). После исключения из этих уравнений векторов $\mathbf{v}_x$, $\mathbf{v}'_x$ и $\mathbf{z}_x$ получается соотношение вида

$$A\mathbf{u} + B\mathbf{v} + C\mathbf{v}' + D\mathbf{z} + E\mathbf{u}_x = 0, \quad (45)$$

коэффициенты которого зависят от скалярных переменных (35) нулевого и первого порядков. Замечательно, что коэффициент E имеет нулевой порядок, а уравнение $E = 0$ совместно с уравнениями (44). Путем составления всевозможных скалярных произведений выражения (45) с векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{z}$ удастся выразить и исключить из (45) все

переменные первого порядка. Это приводит к алгебраической связи между векторами $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ и $\mathbf{z}$, совместной с уравнениями (44), т.е. к формуле суперпозиции

$$\mathbf{z} = \mathbf{u} + (\mu - \nu) \frac{\nu(\mathbf{u} - \mathbf{v}')^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \mu(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2(\mathbf{u} - \mathbf{v}')}{(\mu(\mathbf{u} - \mathbf{v}) - \nu(\mathbf{u} - \mathbf{v}'))^2}, \quad (46)$$

которая в скалярном пределе переходит в (42). А. Бобенко обратил наше внимание на то, что формулу (46) можно переписать в виде

$$\mu \frac{\mathbf{v}' - \mathbf{u}}{(\mathbf{v}' - \mathbf{u})^2} - \nu \frac{\mathbf{v} - \mathbf{u}}{(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2} = (\mu - \nu) \frac{\mathbf{z} - \mathbf{u}}{(\mathbf{z} - \mathbf{u})^2}.$$

Записанная в такой форме, она является векторной редукцией матричной “cross-ratio модели”, рассмотренной в работе [17].

4.2. Преобразования Беклунда для оставшихся уравнений списка. Уравнения (9'), (11') и (12') переходят в скалярном пределе в уравнение

$$u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{au_x u_{xx}^2}{1 + au_x^2}, \quad (47)$$

а уравнения (13') и (14') переходят в линейные уравнения

$$u_t = u_{xxx} + cu_x \quad \text{и} \quad u_t = u_{xxx}, \quad (48)$$

соответственно. Уравнение (47) допускает следующее преобразование Беклунда:

$$u_x = v_x(2k^2 f^2 + 1) + 2kf\sqrt{a^{-1} + v_x^2}\sqrt{k^2 f^2 + 1}, \quad f = u + v, \quad (49)$$

где k – параметр.

Для линейных уравнений (48) преобразование Беклунда тоже линейное:

$$u_x = c_1 v_x + c_2 u + c_3 v + c_4, \quad (50)$$

где c_i – константы.

Уравнение (9') имеет автопреобразование Беклунда следующего вида:

$$\mathbf{u}_x - \mathbf{v}_x = \frac{2}{\lambda} (f\sqrt{\mathbf{v}_x^2 + a^{-1}} + (\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v}))(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad f^2 = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2 + \lambda, \quad (51)$$

где λ – параметр. Если положить в (51) $\lambda = 1/k^2$, то в скалярном пределе получается (49).

Уравнение (11') допускает автопреобразование Беклунда следующего вида:

$$\mathbf{u}_x = G \left(2 \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v}_x \right), \quad (52)$$

где

$$G = \lambda a f + 1 \pm \sqrt{\lambda f(\lambda a f + 2)} \sqrt{\frac{1 + a \mathbf{v}_x^2}{\mathbf{v}_x^2}}, \quad f = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2,$$

λ – параметр. В скалярном пределе это преобразование переходит в (49), а при ограничении на сферу редуцируется в преобразование, найденное в работе [1]. При $a = 0$ уравнение (11') становится масштабно-инвариантным, тем не менее преобразование (52) остается существенно зависящим от λ :

$$G \rightarrow G_0 = 1 + \lambda' |\mathbf{u} + \mathbf{v}| |\mathbf{v}_x|^{-1}.$$

При $a \rightarrow \infty$ уравнение (11') переходит в (10'), и можно было бы ожидать, что и преобразование (52) перейдет в “правильное” преобразование Беклунда для уравнения (10'). Однако, положив в (52) $\lambda = \mu/a$ и выполнив предельный переход $a \rightarrow \infty$, мы обнаруживаем, что функция G перестает зависеть от $\mathbf{v}_x^2$ и преобразование Беклунда (52) переходит в тривиальное преобразование для уравнения (10').

Уравнение (12') допускает следующее автопреобразование Беклунда:

$$\mathbf{u}_x = G \left(\left(a \lambda^2 \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{1 + \nu} + \lambda(q - 1) \right) (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{v}_x \right), \quad (53)$$

где

$$G = a \lambda \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{q - 1} + \nu, \quad q = \sqrt{1 + a \mathbf{v}_x^2}, \quad \nu^2 = 1 + a \lambda^2 (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2,$$

λ – параметр. В скалярном пределе это преобразование переходит в (49).

Автопреобразование Беклунда, которое допускает уравнение (14'), имеет вид

$$\mathbf{u}_x = \left(1 + \lambda \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{\mathbf{v}_x^2} \right) \left(2 \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v}_x \right), \quad (54)$$

где λ – параметр. В скалярном пределе это преобразование переходит в $u_x = v_x + \lambda(u + v)$.

Анизотропное уравнение (13') имеет автопреобразование Беклунда следующего вида:

$$\mathbf{u}_x = \left(1 + \sqrt{\frac{\lambda f - a g}{\mathbf{v}_x^2}} \right) \left(2 \frac{(\mathbf{v}_x, \mathbf{u} + \mathbf{v})}{(\mathbf{u} + \mathbf{v})^2} (\mathbf{u} + \mathbf{v}) - \mathbf{v}_x \right), \quad (55)$$

где λ – параметр, $f = (\mathbf{u} + \mathbf{v})^2$, $g = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle$. Это преобразование допускает редукцию на сферу. Отметим также, что преобразования (52) и (55) совпадают при $a = 0$.

Благодарности. Авторы благодарны В. Э. Адлеру и А. И. Бобенко за полезные обсуждения. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 02-01-00431 и Президентским грантом поддержки ведущих научных школ № НШ 1716.2003.1.

Список литературы

- [1] *A. G. Meshkov, V. V. Sokolov.* Commun. Math. Phys. 2002. V. 232. № 1. P. 1–18.
- [2] *С. И. Свинолунов, В. В. Соколов.* ТМФ. 1994. Т. 100. № 2. С. 214–218; *V. V. Sokolov, T. Wolf.* J. Phys. A. 2001. V. 34. P. 11139–11148.
- [3] *C. Athorne, A. Fordy.* J. Phys. A. 1987. V. 20. P. 1377–1386; *S. I. Svinolupov.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 143. № 1. P. 559–575; *С. И. Свинолунов.* ТМФ. 1991. Т. 87. № 3. С. 391–403; *I. T. Habibullin, V. V. Sokolov, R. I. Yamilov.* Multi-component integrable systems and non-associative structures. In: Nonlinear Physics: Theory and Experiment. Eds. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1996. P. 139–168.
- [4] *И. З. Голубчик, В. В. Соколов.* ТМФ. 2000. Т. 124. № 1. С. 62–71.
- [5] *В. Э. Адлер, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* ТМФ. 2000. Т. 125. № 3. С. 355–424.
- [6] *F. Calogero.* Why are certain nonlinear PDE's both widely applicable and integrable? What is Integrability? Ed. V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1991. P. 1–62.
- [7] *Н. Х. Ибрагимов, А. Б. Шабат.* Функц. анализ и его прилож. 1980. Т. 14. № 4. С. 79–80.
- [8] *С. И. Свинолунов, В. В. Соколов.* Функц. анализ и его прилож. 1982. Т. 16. № 4. С. 86–87.
- [9] *H. H. Chen, Y. C. Lee, C. S. Liu.* Phys. Scripta. 1979. V. 20. № 3–4. P. 490–492.
- [10] *A. G. Meshkov.* Inverse Problems. 1994. V. 10. P. 635–653.
- [11] *V. V. Sokolov, A. B. Shabat.* Sov. Sci. Rev. C. 1984. V. 4. P. 221–280.
- [12] *S. I. Svinolupov.* Phys. Lett. A. 1989. V. 135. № 1. P. 32–36.
- [13] *А. В. Михайлов, А. Б. Шабат, Р. И. Ямилов.* УМН. 1987. Т. 42. № 4. С. 3–53.
- [14] *A. V. Mikhailov, V. V. Sokolov, A. B. Shabat.* The symmetry approach to classification of integrable equations. What is Integrability? Ed. V. E. Zakharov. Berlin: Springer, 1991. P. 113–184.
- [15] *V. E. Adler.* Int. Math. Res. Notices. 1998. V. 1998. № 1. P. 1–4.
- [16] *A. I. Bobenko, Yu. B. Suris.* Int. Math. Res. Notices. 2002. V. 2002. № 11. P. 573–611.
- [17] *A. I. Bobenko, Yu. B. Suris.* Lett. Math. Phys. 2002. V. 61. P. 241–254.

Поступила в редакцию 22.IV.2003 г.,
после доработки 21.V.2003 г.