Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. А. Кларксон, Э. Л. Менсфилд, Х. Н. Вебстер, О соотношении между дискретными и непрерывными уравнениями Пенлеве, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 1, 5–22

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf551>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.73.92

26 апреля 2023 г., 18:16:18

© 2000 г. П. А. Кларксон*, Э. Л. Менсфилд†, Х. Н. Вебстер‡

О СООТНОШЕНИИ МЕЖДУ ДИСКРЕТНЫМИ И НЕПРЕРЫВНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ПЕНЛЕВЕ

Обсуждается один метод вывода дифференциальных уравнений, в частности дискретных уравнений Пенлеве, из преобразований Беклунда для непрерывных уравнений Пенлеве. Используя эту технику, можно вывести первое и второе дискретные уравнения Пенлеве и некоторые из их альтернативных версий. Известно, что уравнения Пенлеве обладают иерархиями рациональных решений и однопараметрических семейств решений, выражающихся через классические специальные функции при некоторых определенных значениях параметров. Поэтому с помощью вышеупомянутых соотношений можно получить иерархии точных решений присоединенных дискретных уравнений Пенлеве. Таким образом, точные решения уравнений Пенлеве одновременно удовлетворяют дифференциальному и разностному уравнениям по аналогии со специальными функциями.

1. ВВЕДЕНИЕ

На рубеже столетий Пенлеве и его коллеги при изучении одной задачи, сформулированной Пикаром [1], исследовали новые уравнения. Пикар поставил вопрос о том, какие обыкновенные дифференциальные уравнения второго порядка вида

$$w'' = F(z, w, w') \quad (' \equiv d/dz), \quad (1.1)$$

где функция F полиномиальна по w' , рациональна по w и аналитична по z , обладают тем свойством, что отличные от полюсов особые точки их любого решения зависят только от рассматриваемого уравнения и не зависят от постоянных интегрирования. Теперь это называется *свойством Пенлеве*. Пенлеве и его коллеги показали, что существуют пятьдесят канонических уравнений вида (1.1), имеющих это свойство. Шесть из них — это новые нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, а остальные сорок четыре либо могут быть сведены к одному из этих шести, либо могут быть проинтегрированы с помощью известных функций (ср. [2]). Эти шесть новых уравнений называются *уравнениями Пенлеве* и обозначаются PI–PVI.

*Institute of Mathematics and Statistics, University of Kent, Canterbury, UK.
E-mail: P.A.Clarkson@ukc.ac.uk

†Institute of Mathematics and Statistics, University of Kent, Canterbury, UK.
E-mail: E.L.Mansfield@ukc.ac.uk

‡Institute of Mathematics and Statistics, University of Kent, Canterbury, UK. Current address:
Meteorological Office, London Road, Bracknell, RG12 2SZ, UK. E-mail: hnwebster@meto.gov.uk

Хотя уравнения Пенлеве были найдены на основании чисто математических соображений, они возникают во многих физических ситуациях. По-видимому, наиболее существенным проявлением этого является редукция уравнений в частных производных, так называемых солитонных уравнений, разрешимых с помощью метода обратной задачи теории рассеяния. Поэтому уравнения Пенлеве привлекают внимание исследователей и широко изучаются (см. [3] и приведенные там ссылки).

Уравнения Пенлеве можно интерпретировать как нелинейные аналоги уравнений для классических специальных функций. Их общие решения трансцендентны в том смысле, что они не выражаются через известные элементарные функции. Однако они имеют много рациональных решений и однопараметрических семейств решений, выражающихся через специальные функции, такие как функции Бесселя, при определенных значениях параметров (например, см. [4–17]). Далее, уравнения Пенлеве обладают преобразованиями Беклунда, связывающими одно решение с другим либо для одного и того же уравнения при разных значениях параметров, либо для разных уравнений (см., например, [4, 5, 11–21]). Для изучения уравнений Пенлеве был разработан метод изомодромии [22–24], и в этом смысле говорят, что они интегрируемы. Уравнения Пенлеве обладают также множеством других замечательных свойств.

С недавнего времени существенный интерес проявляется к интегрируемым отображениям и дискретным системам. Дискретные уравнения Пенлеве dPI–dPVI стали привлекать внимание по этой причине, а также ввиду важности непрерывных уравнений Пенлеве. Дискретные уравнения Пенлеве имеют вид

$$x_{n+1} = \frac{f_1(x_n, n) + x_{n-1}f_2(x_n, n)}{f_3(x_n, n) + x_{n-1}f_4(x_n, n)}, \quad (1.2)$$

где $f_j(x_n, n)$ – многочлены от x_n степени не выше четырех. Дискретные уравнения Пенлеве возникают в теории ортогональных полиномов (ср. [25]), а также встречаются во многих физических приложениях, например dPI и dPII появляются в теории двумерной квантовой гравитации [26–28]. Дискретные уравнения Пенлеве dPIII–dPV выводились с помощью метода ограничения особенностей [29, 30], связывающего интегрируемый характер дискретных уравнений со структурой их особенностей. Известно, однако, что само по себе это свойство недостаточно для интегрируемости (ср. [31]). Джимбо и Сакаи [32] (см. также [33]) нашли двухкомпонентную форму dPVI, а Грамматикос и Рамани [34] недавно предложили однокомпонентную форму dPVI. В непрерывном пределе дискретные уравнения Пенлеве порождают соответствующие непрерывные уравнения, хотя некоторые дискретные уравнения Пенлеве дают в пределе более чем одно уравнение Пенлеве. Более того, они обладают также и множеством других общих свойств со своими непрерывными аналогами. Так, например, у них имеются лаковы пары, билинейные представления, преобразования Беклунда и частные решения, выражающиеся при определенных значениях параметров через рациональные или дискретные специальные функции (см., например, [33, 35–55]).

Впрочем, дискретные уравнения Пенлеве в некотором отношении значительно богаче, чем уравнения Пенлеве. У них, например, есть некоторые решения, не имеющие непрерывного предела, и ряд других их свойств также теряется в непрерывном пределе. Наиболее принципиальное различие состоит, по-видимому, в том, что уравнения Пенлеве имеют единственную каноническую форму, в то время как для дискретных уравнений

Пенлеве это не так. У каждого дискретного уравнения Пенлеве имеется несколько таких различных форм. Далее, существуют два различных типа дискретных уравнений Пенлеве, а именно уравнения разностного типа, в которых независимая переменная n появляется аддитивным образом, и мультипликативные q -дискретные уравнения Пенлеве, у которых независимая переменная n возникает мультипликативным образом.

Недавно появилось несколько исследований по выводу дискретных уравнений Пенлеве из преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве, в частности работы Фокаса, Грамматикоса и Рамани [56] (см. также [39, 46, 57, 58]), которые использовали подход, основанный на преобразованиях Шлезингера, относящихся к присоединенной задаче изомонодромии для уравнения Пенлеве, и Громака и Цегельника [59–62], хотя последние не идентифицировали уравнения, которые они получили, как дискретные уравнения Пенлеве.

2. ВЫВОД ДИСКРЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕНЛЕВЕ

Прежде чем описывать процедуру для уравнений Пенлеве, мы рассмотрим классические специальные функции, используя функции Бесселя в качестве примера.

ПРИМЕР 2.1. Функции Бесселя. Функция Бесселя $J_n(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z^2 J_n''(z) + z J_n'(z) + (z^2 - n^2) J_n(z) = 0 \quad (2.1)$$

и рекуррентным соотношениям

$$z J_n'(z) = z J_{n-1}(z) - n J_n(z), \quad (2.2)$$

$$z J_n'(z) = n J_n(z) - z J_{n+1}(z), \quad (2.3)$$

$$z J_{n+1}(z) - 2n J_n(z) + z J_{n-1}(z) = 0 \quad (2.4)$$

(ср. [63]). Исключение $J_n'(z)$ из (2.2) и (2.3) дает рекуррентное соотношение (2.4). Полагая $n \rightarrow n+1$ в (2.2) и исключая $J_{n+1}(z)$ с помощью (2.3), мы приходим к дифференциальному уравнению (2.1). Таким образом, функция Бесселя $J_n(z)$ удовлетворяет и дифференциальному уравнению (2.1), и разностному уравнению (2.4). Теперь мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место и для уравнений Пенлеве.

Общая процедура вывода дискретных уравнений Пенлеве из преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве заключается в следующем. Предположим, что имеются два преобразования Беклунда для заданного уравнения Пенлеве вида

$$w^+(z; \alpha^+) = \mathbf{T}^+(w(z; \alpha)) = F(w(z; \alpha), w'(z; \alpha), z, \alpha), \quad (2.5)$$

$$w^-(z; \alpha^-) = \mathbf{T}^-(w(z; \alpha)) = G(w(z; \alpha), w'(z; \alpha), z, \alpha), \quad (2.6)$$

где $w(z; \alpha)$ – решение присоединенного уравнения Пенлеве, соответствующего параметрам $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$, а $w^\pm(z; \alpha^\pm)$ – решения, соответствующие параметрам $\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm, \alpha_2^\pm, \dots, \alpha_m^\pm)$. Исключение $w'(z; \alpha)$ из (2.5) и (2.6) приводит к алгебраическому соотношению, являющемуся рекуррентным соотношением, для трех решений $w^+(z; \alpha^+)$, $w(z; \alpha)$ и $w^-(z; \alpha^-)$ уравнения Пенлеве. Это алгебраическое соотношение

можно интерпретировать как нелинейный принцип суперпозиции для решений уравнения Пенлеве, как альтернативную форму преобразований Беклунда или как дискретное уравнение типа Пенлеве. Непрерывная переменная z входит в уравнение просто как параметр, а независимая переменная в дискретном уравнении порождается параметрами α .

Чтобы последовательно выполнить эту процедуру для заданного уравнения Пенлеве, нам потребуются два преобразования Беклунда $\mathbf{T}^+$ и $\mathbf{T}^-$ такие, что $\mathbf{T}^+ = (\mathbf{T}^-)^{-1}$, т.е. они должны являться взаимно обратными преобразованиями, и тогда рассматриваемые решения и параметры будут связаны следующим образом:

$$\{w^-(z; \alpha^-), \alpha^-\} \xrightleftharpoons[\mathbf{T}^-]{\mathbf{T}^+} \{w(z; \alpha), \alpha\} \xrightleftharpoons[\mathbf{T}^-]{\mathbf{T}^+} \{w^+(z; \alpha^+), \alpha^+\}.$$

Следовательно, полагая $w(z; \alpha) = x_n$, $w^\pm(z; \alpha^\pm) = x_{n\pm 1}$, где $\alpha = \mathbf{a}_n$ и $\alpha^\pm = \mathbf{a}_{n\pm 1}$, мы получаем цепочку

$$\{x_{n-1}, \mathbf{a}_{n-1}\} \xrightleftharpoons[\mathbf{T}^-]{\mathbf{T}^+} \{x_n, \mathbf{a}_n\} \xrightleftharpoons[\mathbf{T}^-]{\mathbf{T}^+} \{x_{n+1}, \mathbf{a}_{n+1}\}.$$

Проиллюстрируем эту процедуру на примере второго уравнения Пенлеве (см. также [56]).

ПРИМЕР 2.2. Второе уравнение Пенлеве. Допустим, что $w(z; \alpha)$ является решением второго уравнения Пенлеве РИ

$$w'' = 2w^3 + zw + \alpha, \quad (2.7)$$

где α — константа. Известно, что в этом случае (ср. [18, 64])

$$\mathbf{S}: w(z; -\alpha) = -w(z; \alpha), \quad (2.8)$$

$$\mathbf{T}^+: w(z; \alpha + 1) = -w(z; \alpha) - \frac{2\alpha + 1}{2w^2(z; \alpha) + 2w'(z; \alpha) + z}, \quad \alpha \neq -\frac{1}{2}, \quad (2.9)$$

также решения РИ (2.7) соответственно для параметров $-\alpha$ и $\alpha + 1$. Комбинация этих преобразований дает преобразование Беклунда

$$\mathbf{T}^-: w(z; \alpha - 1) = -w(z; \alpha) - \frac{2\alpha - 1}{2w^2(z; \alpha) - 2w'(z; \alpha) + z}, \quad \alpha \neq \frac{1}{2}, \quad (2.10)$$

которое является обратным к $\mathbf{T}^+$. Поэтому исключение $w'(z; \alpha)$ из (2.9) и (2.10) дает

$$\frac{2\alpha + 1}{w(z; \alpha + 1) + w(z; \alpha)} + \frac{2\alpha - 1}{w(z; \alpha) + w(z; \alpha - 1)} + 4w^2(z; \alpha) + 2z = 0. \quad (2.11)$$

Теперь, если положить

$$a_{n+1} = \alpha + 1, \quad a_n = \alpha, \quad a_{n-1} = \alpha - 1, \quad (2.12)$$

а затем решить разностные уравнения, то получится

$$\alpha = a_n = n + \kappa - \frac{1}{2},$$

где κ – произвольная постоянная (множитель $1/2$ вводится для удобства). Так как преобразования $\mathbf{T}^+$ и $\mathbf{T}^-$ взаимно обратны, уравнения (2.12) имеют одно и то же общее решение. Далее, полагая $x_m = w(z; a_m)$ в (2.11), получаем разностное уравнение

$$\frac{n + \kappa}{x_{n+1} + x_n} + \frac{n - 1 + \kappa}{x_n + x_{n-1}} + 2x_n^2 + z = 0, \quad (2.13)$$

где z – параметр, которое является альтернативной формой dPI (a-dPI) [56, 57].

Поэтому решения РИ (2.7) удовлетворяют и дифференциальному уравнению, а именно самому уравнению РИ и разностному уравнению a-dPI (2.13), что аналогично ситуации с функциями Бесселя, которая обсуждалась в предыдущем примере.

2.1. Рациональные решения. При $\kappa = 1/2$, $x_0 = 0$ и $x_1 = -1/z$ мы получаем иерархию совместных рациональных решений РИ (2.7) и a-dPI (2.13), приведенную в табл. 1.

Таблица 1

Рациональные решения РИ и a-dPI

n	α	$x_n = w(z; \alpha)$
0	0	0
1	1	$-\frac{1}{z}$
2	2	$-\frac{2(z^3 - 2)}{z(z^3 + 4)}$
3	3	$-\frac{3z^2(z^6 + 8z^3 + 160)}{(z^3 + 4)(z^6 + 20z^3 - 80)}$
4	4	$-\frac{4(z^{15} + 50z^{12} + 100z^9 - 22400z^6 - 112000z^3 - 224000)}{z(z^6 + 20z^3 - 80)(z^9 + 60z^6 + 11200)}$

2.2. Решения Эйри. При $\kappa = 1$, $x_{-1} = \Phi(z) = \phi'(z)/\phi(z)$ и $x_0 = -\Phi(z)$, где $\phi(z)$ удовлетворяет уравнению Эйри

$$\phi'' + \frac{1}{2}z\phi = 0,$$

мы получаем иерархию рациональных решений РИ (2.7) и a-dPI (2.13) (табл. 2).

Таблица 2

Решения Эйри для РII и a-dPI

n	α	$x_n = w(z; \alpha)$
0	$\frac{1}{2}$	$-\Phi(z)$
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{2\Phi^3(z) + z\Phi(z) - 1}{2\Phi^2(z) + z}$
2	$\frac{5}{2}$	$\frac{4z\Phi^4(z) + 6\Phi^3(z) + 4z^2\Phi^2(z) + 3z\Phi(z) + z^3 - 1}{[2\Phi^2(z) + z]}$

ПРИМЕР 2.3. Второе уравнение Пенлеве и Р34. В этом примере мы выведем систему дискретных уравнений. Пусть $v(z; \alpha)$ и $w(z; \alpha)$ – соответственно решения второго уравнения Пенлеве РII и Р34:

$$v'' = 2v^3 + zv + \alpha, \quad (2.14)$$

$$w'' + 2w^2 + zw + \frac{(\alpha + \frac{1}{2})^2 - w^2}{2w} = 0. \quad (2.15)$$

Название уравнения Р34 (2.15) объясняется тем, что оно эквивалентно уравнению XXXIV в главе 14 книги Айнса [2]. Известно, что [18] решения РII (2.14) и Р34 (2.15) связаны следующим обратимым преобразованием:

$$v(z; \alpha) = \frac{2w'(z; \alpha) + 2\alpha + 1}{4w(z; \alpha)}, \quad (2.16)$$

$$w(z; \alpha) = -v'(z; \alpha) - v^2(z; \alpha) - \frac{1}{2}z, \quad (2.17)$$

и, более того, преобразования Беклунда для РII и Р34 имеют соответственно вид

$$v(z; \alpha + 1) = -v(z; \alpha) - \frac{2\alpha + 1}{2v^2(z; \alpha) + 2v'(z; \alpha) + z}, \quad (2.18)$$

$$w(z; \alpha + 1) = -w(z; \alpha) - \left(\frac{2w'(z; \alpha) - 2\alpha - 1}{w(z; \alpha)} \right)^2. \quad (2.19)$$

Исключение v' из (2.17) и (2.18) дает

$$v(z; \alpha + 1) = -v(z; \alpha) + \frac{2\alpha + 1}{2w(z; \alpha)}, \quad (2.20)$$

а исключение w' из (2.16) и (2.19) приводит к

$$w(z; \alpha + 1) = -w(z; \alpha) - z - 2 \left(v(z; \alpha) - \frac{2\alpha + 1}{2w(z; \alpha)} \right)^2. \quad (2.21)$$

Как и в предыдущем примере, решение разностных уравнений для соотношений между параметрами дает $\alpha = a_n = n + \kappa - 1/2$. Итак, если положить $x_m = v(z; a_n)$ и $y_m = w(z; a_m)$ в (2.20) и (2.21), то получится дискретная система

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= -x_n + \frac{n + \kappa}{y_n}, \\ y_{n+1} &= -y_n - z - 2 \left(x_n - \frac{n + \kappa}{y_n} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.22)$$

где z – параметр.

Теперь мы рассмотрим систему (2.22). Исключая y_n , получаем dPI (2.13), а исключение x_n приводит к уравнению второго порядка и второй степени:

$$\frac{(y_{n+1} - y_{n-1})^2 y_n^2}{4(n + \kappa)^2} + y_{n+1} + 2y_n + y_{n-1} + 2z + \frac{(n + \kappa)^2}{y_n^2} = 0. \quad (2.23)$$

Можно непосредственно получить это дискретное уравнение из преобразования Беклунда для Р34, используя присоединенное обратное преобразование

$$w(z; \alpha - 1) = -w(z; \alpha) - 2 \left(\frac{w'(z; \alpha) + \alpha}{2w(z; \alpha) - z} \right)^2,$$

которое легко находится из (2.19) и дискретной симметрии $w(z; -1 - \alpha) = w(z; \alpha)$.

Таким образом, мы обобщили вышеупомянутую процедуру и получили дискретную систему (2.22). Эта система включает дискретные уравнения, получающиеся из преобразований Беклунда для РII и Р34, т.е. соответственно (2.13) и (2.23).

3. ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОЛУЧАЮЩИЕСЯ ИЗ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ БЕКЛУНДА ДЛЯ ТРЕТЬЕГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В этом разделе обсуждаются дискретные уравнения, получающиеся из преобразований Беклунда для третьего уравнения Пенлеве РIII

$$w'' = \frac{(w')^2}{w} - \frac{w'}{z} + \frac{\alpha w^2 + \beta}{z} + \gamma w^3 - \frac{\delta}{w}, \quad (3.1)$$

где α, β, γ и δ – произвольные постоянные.

3.1. Преобразования Беклунда для РIII при $\gamma\delta \neq 0$. В общем случае, когда $\gamma\delta \neq 0$ в (3.1), мы полагаем, не нарушая общности, что $\gamma = 1$ и $\delta = -1$. Известно, что

все преобразования Беклунда для РШ при $\gamma = 1$ и $\delta = -1$ являются комбинациями следующих шести преобразований (дальнейшие подробности см. в [11]):

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_1: w_1(z; \alpha_1, \beta_1, 1, -1) &= \frac{w(zw' + zw^2 + \alpha w + w + z)}{zw' + zw^2 - \beta w - w + z}, & \alpha_1 &= -\beta - 2, & \beta_1 &= -\alpha - 2, \\ \mathbf{T}_2: w_2(t; \alpha_2, \beta_2, 1, -1) &= \frac{w(zw' - zw^2 - \alpha w + w + z)}{zw' - zw^2 - \beta w - w + z}, & \alpha_2 &= \beta + 2, & \beta_2 &= \alpha - 2, \\ \mathbf{T}_3: w_3(z; \alpha_3, \beta_3, 1, -1) &= \frac{w(zw' + zw^2 + \alpha w + w - z)}{zw' + zw^2 + \beta w - w - z}, & \alpha_3 &= \beta - 2, & \beta_3 &= \alpha + 2, \\ \mathbf{T}_4: w_4(z; \alpha_4, \beta_4, 1, -1) &= \frac{w(zw' - zw^2 - \alpha w + w - z)}{zw' - zw^2 + \beta w - w - z}, & \alpha_4 &= -\beta + 2, & \beta_4 &= -\alpha + 2, \\ \widehat{\mathbf{T}}: \widehat{w}(t; \widehat{\alpha}, \widehat{\beta}, 1, -1) &= -w, & \widehat{\alpha} &= -\alpha, & \widehat{\beta} &= -\beta, \\ \widetilde{\mathbf{T}}: \widetilde{w}(t; \widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, 1, -1) &= \frac{1}{w}, & \widetilde{\alpha} &= -\beta, & \widetilde{\beta} &= -\alpha, \end{aligned}$$

где $w \equiv w(z; \alpha, \beta, 1, -1)$ – решение (3.1).

Используя преобразования Беклунда $\{\mathbf{T}_j, \widehat{\mathbf{T}}_j \equiv \widehat{\mathbf{T}} \circ \mathbf{T}_j, \widetilde{\mathbf{T}}_j \equiv \widetilde{\mathbf{T}} \circ \mathbf{T}_j, \mathbf{T}_j^* \equiv \widehat{\mathbf{T}} \circ \widetilde{\mathbf{T}} \circ \mathbf{T}_j\}_{j=1}^4$ для РШ, можно непосредственно показать, что существуют двенадцать совместных пар параметров α и β с соответствующими нетривиальными решениями. В каждом случае, чтобы получить дискретное уравнение, нужно решить рекуррентные соотношения для α и β , исключить w' и подставить α и β .

СЛУЧАЙ 3.1. $\{\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_1^*\}$. Полагая $a_{n+1} = a_1$, $a_n = \alpha$, $a_{n-1} = a_1^*$, $b_{n+1} = b_1$, $b_n = \beta$, $b_{n-1} = b_1^*$ в соотношениях для параметров, мы получаем системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -b_n - 2, & a_{n-1} &= -a_n - 2, \\ b_{n+1} &= -a_n - 2, & b_{n-1} &= -b_n - 2 \end{aligned}$$

с одним и тем же общим решением

$$a_n = \mu(-1)^n - 1, \quad b_n = \mu(-1)^n - 1,$$

где μ – произвольная постоянная. Следовательно, полагая $x_m = w(z; a_m, b_m)$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= w_1(z; a_{n+1}, b_{n+1}) = \frac{w(zw' + zw^2 + a_n w + w + z)}{zw' + zw^2 - b_n w - w + z}, \\ x_{n-1} &= w_1^*(z; a_{n-1}, b_{n-1}) = -\frac{(zw' + zw^2 - b_n w - w + z)}{w(zw' + zw^2 + a_n w + w + z)} \end{aligned}$$

и исключая w' , мы получаем простое разностное уравнение

$$x_{n+1}x_{n-1} = -1. \quad (3.2)$$

Применение этой процедуры к парам преобразований Беклунда $\{\mathbf{T}_2, \widetilde{\mathbf{T}}_2\}$, $\{\mathbf{T}_3, \widetilde{\mathbf{T}}_3\}$ и $\{\mathbf{T}_4, \mathbf{T}_4^*\}$ тоже дает разностные уравнения, которые эквивалентны (3.2).

СЛУЧАЙ 3.2. $\{\widehat{\mathbf{T}}_1, \widehat{\mathbf{T}}_4\}$. Полагая $a_{n+1} = \widehat{a}_1$, $a_n = \alpha$, $a_{n-1} = \widehat{a}_4$, $b_{n+1} = \widehat{b}_1$, $b_n = \beta$, $b_{n-1} = \widehat{b}_4$ в соотношениях для параметров, мы получаем системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= b_n + 2, & a_{n-1} &= b_n - 2, \\ b_{n+1} &= a_n + 2, & b_{n-1} &= a_n - 2 \end{aligned}$$

с одним и тем же общим решением

$$a_n = \kappa + \mu(-1)^n + 2n, \quad b_n = \kappa - \mu(-1)^n + 2n,$$

где κ и μ — произвольные постоянные. Поэтому подстановка $x_m = w(z; a_m, b_m)$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \widehat{w}_1(z; a_{n+1}, b_{n+1}) = -\frac{w(zw' + zw^2 + a_n w + w + z)}{zw' + zw^2 - b_n w - w + z}, \\ x_{n-1} &= \widehat{w}_4(z; a_{n-1}, b_{n-1}) = -\frac{w(zw' - zw^2 - a_n w + w - z)}{zw' - zw^2 + b_n w - w - z} \end{aligned}$$

и исключение w' дают

$$\frac{\kappa + 2n + 1}{x_{n+1} + x_n} + \frac{\kappa + 2n - 1}{x_n + x_{n-1}} + z - \frac{2n + \kappa - \mu(-1)^n}{x_n} + \frac{z}{x_n^2} = 0. \quad (3.3)$$

Можно показать, что континуальный предел этого уравнения приводит к частному случаю РШ (3.1) с $\alpha = \beta$ и $\gamma = \delta = 0$. Применение этой процедуры к паре преобразований Беклунда $\{\widehat{\mathbf{T}}_2, \widehat{\mathbf{T}}_3\}$ также дает разностное уравнение, которое эквивалентно (3.3).

СЛУЧАЙ 3.3. $\{\mathbf{T}_2^*, \mathbf{T}_3^*\}$. Полагая $a_{n+1} = a_2^*$, $a_n = \alpha$, $a_{n-1} = a_3^*$, $b_{n+1} = b_2^*$, $b_n = \beta$, $b_{n-1} = b_3^*$ в соотношениях для параметров, мы получаем системы разностных уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - 2, & a_{n-1} &= a_n + 2, \\ b_{n+1} &= b_n + 2, & b_{n-1} &= b_n - 2 \end{aligned}$$

с одним и тем же общим решением

$$a_n = 2\kappa - 2n, \quad b_n = 2\mu + 2n,$$

где κ и μ — произвольные постоянные. Следовательно, подставляя $x_m = w(z; a_m, b_m)$,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= w_2^*(z; a_{n+1}, b_{n+1}) = -\frac{(zw' - zw^2 - b_n w - w + z)}{w(zw' - zw^2 - a_n w + w + z)}, \\ x_{n-1} &= w_3^*(z; a_{n-1}, b_{n-1}) = -\frac{(zw' + zw^2 + b_n w - w - z)}{w(zw' + zw^2 + a_n w + w - z)} \end{aligned}$$

и исключая w' , мы приходим к

$$\frac{2n + 1 - \kappa + \mu}{x_n x_{n+1} + 1} + \frac{2n - 1 - \kappa + \mu}{x_n x_{n-1} + 1} + x_n z - 2n + 2\kappa - \frac{z}{x_n} = 0, \quad (3.4)$$

что представляет собой альтернативную форму для dРШ [46, 56]. Применение этой процедуры к паре преобразований Беклунда $\{\widetilde{\mathbf{T}}_1, \widetilde{\mathbf{T}}_4\}$ также дает разностное уравнение, которое эквивалентно dРШ (3.4).

Поэтому непрерывные преобразования Беклунда для РШ приводят к двум дискретным уравнениям Пенлеве вида (3.3) и (3.4). Как и для всех дискретных уравнений Пенлеве, названия этих уравнений происходят от непрерывных уравнений, получающихся в непрерывном пределе, хотя, как было отмечено выше, здесь нет единственности.

3.2. Пример. Теперь мы обсудим один пример, показывающий, что совместность значений параметров сама по себе недостаточна для вывода дискретных уравнений Пенлеве. Дело в том, что надо еще проверить, являются ли преобразования Беклунда взаимно обратными.

Рассмотрим преобразования Беклунда $\tilde{\mathbf{T}}_1$ и $\hat{\mathbf{T}}_4$, определенные формулами

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{T}}_1: \tilde{w}_1(z; \tilde{\alpha}_1, \tilde{\beta}_1, 1, -1) &= \frac{zw' + zw^2 - \beta w - w + z}{w(zw' + zw^2 + \alpha w + w + z)}, \quad \tilde{\alpha}_1 = \alpha + 2, \quad \tilde{\beta}_1 = \beta + 2, \\ \hat{\mathbf{T}}_4: \hat{w}_4(z; \hat{\alpha}_4, \hat{\beta}_4, 1, -1) &= -\frac{w(zw' - zw^2 - \alpha w + w - z)}{zw' - zw^2 + \beta w - w - z}, \quad \hat{\alpha}_4 = \beta - 2, \quad \hat{\beta}_4 = \alpha - 2.\end{aligned}$$

Полагая $a_{n+1} = \tilde{\alpha}_1$, $a_n = \alpha$, $a_{n-1} = \hat{\alpha}_4$, $b_{n+1} = \tilde{\beta}_1$, $b_n = \beta$, $b_{n-1} = \hat{\beta}_4$ в соотношениях для параметров, мы получаем системы разностных уравнений

$$\begin{aligned}\alpha_{n+1} &= \alpha_n + 2, & \alpha_{n-1} &= \beta_n - 2, \\ \beta_{n+1} &= \beta_n + 2, & \beta_{n-1} &= \alpha_n - 2\end{aligned}$$

с одним и тем же решением

$$\alpha_n = \kappa + 2n, \quad \beta_n = \kappa + 2n,$$

где κ — произвольная постоянная. Заметим, что здесь имеется только одна произвольная постоянная, и поэтому эта ситуация не является столь общей, как в случаях, обсуждавшихся выше. Следуя прежней процедуре, мы исключаем w' из преобразований Беклунда $\tilde{\mathbf{T}}_1$ и $\hat{\mathbf{T}}_4$ и получаем дискретное уравнение

$$zx_n + 1 + \frac{z}{x_n} + \frac{x_n(2n + \kappa - 1)}{x_n + x_{n-1}} + \frac{2n + \kappa + 1}{x_n x_{n+1} - 1} = 0. \quad (3.5)$$

Теперь мы продолжим исследование отображения (3.5) и изучим его действие на рациональные решения РПП (3.1), в котором $\alpha = \beta$, $\gamma = 1$ и $\delta = -1$. Применяя преобразование Беклунда $\tilde{\mathbf{T}}_1$ к простому рациональному решению $w(z; 0, 0, 1, -1) = 1$, мы получаем рациональное решение $w(z; 2, 2, 1, -1) = (2z - 1)/(2z + 1)$. Подстановка $x_0 = 1$, $x_1 = (2z - 1)/(2z + 1)$ и $\kappa = 0$ в (3.5) дает выражение

$$x_2 = \frac{(2z + 1)(32z^4 - 24z^3 + 4z^2 + 6z + 1)}{(2z - 1)(32z^4 + 24z^3 + 4z^2 - 6z + 1)},$$

не являющееся решением РПП (3.1). Поэтому (3.5) не является отображением для решений РПП.

Возникает вопрос, почему совместность параметров недостаточна в данном случае? Чтобы разобраться в этом, рассмотрим рациональное решение

$$w(z; 2, 2, 1, -1) = \frac{2z - 1}{2z + 1}, \quad (3.6)$$

входящее в так называемую “ $w = 1$ ”-иерархию (см. [11]). Здесь применение преобразования Беклунда $\tilde{\mathbf{T}}_1$, а затем преобразования $\hat{\mathbf{T}}_4$ к (3.6) дает рациональное решение

$$w(z; 2, 2, 1, -1) = -\frac{2z + 1}{2z - 1},$$

входящее в “ $w = -1$ ”-иерархию. Следовательно, рассматриваемое затруднение вызвано неединственностью решений РПП (3.1). Заданному набору параметров может соответствовать несколько решений. Эта неединственность объясняет, почему совместность параметров недостаточна.

В общем случае можно непосредственно показать, что $\widehat{\mathbf{T}}_4(\widetilde{\mathbf{T}}_1(w)) = -1/w$. Значит, преобразования $\widetilde{\mathbf{T}}_1$ и $\widehat{\mathbf{T}}_4$ не являются взаимно обратными, и поэтому смысл уравнения (3.5) здесь неясен. В самом деле, мы не считаем, что это дискретное уравнение Пенлеве и что непрерывный предел (3.5) неизвестен на этой стадии. Действительно, оказывается, что дискретное уравнение (3.5) не является интегрируемым. Чтобы показать это, рассмотрим ограничение особенностей для (3.5). Найдя x_{n+1} , мы видим, что расходимость может возникнуть, если $x_n = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Мы полагаем $x_n = \varepsilon$ вместо строгого равенства нулю и по-прежнему считаем, что x_{n-1} произвольно. Тогда исследование итерации (3.5) дает

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \varepsilon^{-1} + O(1), & x_{n+3} &= \varepsilon^{-1} + O(1), \\ x_{n+2} &= \varepsilon + O(\varepsilon^2), & x_{n+4} &= \varepsilon + O(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

и т.д. *до бесконечности*. Поэтому дискретное уравнение (3.5) не обладает свойством ограничения особенностей и вследствие этого скорее всего неинтегрируемо.

3.3. Преобразования Беклунда для РПП при $\gamma = 0$. Как и в общем случае, при $\gamma = 0$ мы можем зафиксировать два параметра, выбирая масштабы для зависимой и независимой переменных. Если $\gamma = 0$, то мы полагаем $\alpha = 1$ и $\delta = -1$, не нарушая общности, и $w(z; \beta) \equiv w(z; 1, \beta, 0, -1)$, и тогда РПП (3.1) имеет преобразования Беклунда

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_5: \quad w_5(z; \beta_5) &= \frac{zw'(z; \beta) - (1 + \beta)w(z; \beta) + z}{w^2(z; \beta)}, & \beta_5 &= \beta + 2, \\ \mathbf{T}_6: \quad w_6(z; \beta_6) &= -\frac{zw'(z; \beta) - (1 - \beta)w(z; \beta) - z}{w^2(z; \beta)}, & \beta_6 &= \beta - 2, \end{aligned}$$

которые являются взаимно обратными. Подстановка $b_{n+1} = \beta_5$, $b_n = \beta$ и $b_{n-1} = \beta_6$ приводит к рекуррентным соотношениям $b_{n+1} = b_n + 2$ и $b_{n-1} = b_n - 2$, имеющим одно и то же общее решение $b_n = 2(\kappa + n)$, где κ — произвольная постоянная. Исключая $w'(z; \beta)$ из $\mathbf{T}_5$ и $\mathbf{T}_6$ и полагая затем $x_m = w(z; b_m)$, мы получаем дискретное уравнение

$$x_{n+1} + x_{n-1} = -\frac{4(\kappa + n)}{x_n} + \frac{2z}{x_n^2}, \quad (3.7)$$

являющееся альтернативной формой dPI [56] (см. также [59]).

3.4. Преобразования Беклунда для РПП при $\delta = 0$. Если $\delta = 0$, мы полагаем, не нарушая общности, что $\beta = 1$ и $\gamma = 1$, и тогда РПП (3.1) тоже имеет следующие преобразования Беклунда:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_7: \quad w_7(z; \alpha_7) &= -\frac{1}{zw'(z; \alpha) + (1 + \alpha)w(z; \alpha) + zw^2(z; \alpha)}, & \alpha_7 &= \alpha + 2, \\ \mathbf{T}_8: \quad w_8(z; \alpha_8) &= \frac{1}{zw'(z; \alpha) + (1 - \alpha)w(z; \alpha) - zw^2(z; \alpha)}, & \alpha_8 &= \alpha - 2, \end{aligned}$$

где $w(z; \alpha) \equiv w(z; \alpha, 1, 1, 0)$. Подстановка $a_{n+1} = \alpha_7$, $a_n = \alpha$ и $a_{n-1} = \alpha_8$ приводит к рекуррентным соотношениям $a_{n+1} = a_n + 2$ и $a_{n-1} = a_n - 2$, имеющим одно и то же общее решение $a_n = 2(\kappa + n)$, где κ — произвольная постоянная. Исключая $w'(z; \alpha)$ из $\mathbf{T}_7$ и $\mathbf{T}_8$ и полагая затем $x_m = w(z; \alpha_m)$, мы получаем дискретное уравнение, которое эквивалентно альтернативной форме dPI (3.7).

4. ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ, ПОРОЖДЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ БЕКЛУНДА ДЛЯ ЧЕТВЕРТОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ

В этом разделе мы обсуждаем дискретные уравнения, порожденные преобразованиями Беклунда для четвертого уравнения Пенлеве

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w + \frac{\beta}{w}, \quad (4.1)$$

где α и β — произвольные постоянные.

4.1. Преобразования Беклунда для четвертого уравнения Пенлеве. Канонические преобразования Беклунда для PIV имеют вид

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{W}}^\pm: \quad \widetilde{w}^\pm(z; \widetilde{\alpha}^\pm, \widetilde{\beta}^\pm) &= \frac{w' - w^2 - 2zw \mp \sqrt{-2\beta}}{2w}, \\ \widetilde{\alpha}^\pm &= \frac{1}{4} \left(2 - 2\alpha \pm 3\sqrt{-2\beta} \right), \quad \widetilde{\beta}^\pm = -\frac{1}{2} \left(1 + \alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta} \right)^2, \\ \widehat{\mathbf{W}}^\pm: \quad \widehat{w}^\pm(z; \widehat{\alpha}^\pm, \widehat{\beta}^\pm) &= -\frac{w' + w^2 + 2zw \mp \sqrt{-2\beta}}{2w}, \\ \widehat{\alpha}^\pm &= -\frac{1}{4} \left(2 + 2\alpha \pm 3\sqrt{-2\beta} \right), \quad \widehat{\beta}^\pm = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta} \right)^2, \\ \mathbf{W}^{\dagger\pm}: \quad w^{\dagger\pm}(z; \alpha^{\dagger\pm}, \beta^{\dagger\pm}) &= w + \frac{2(1 - \alpha \mp \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta})w}{w' \pm \sqrt{-2\beta} + 2zw + w^2}, \\ \alpha^{\dagger\pm} &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha \mp \frac{3}{4}\sqrt{-2\beta}, \quad \beta^{\dagger\pm} = -\frac{1}{2} \left(1 - \alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta} \right)^2, \\ \mathbf{W}^{\ddagger\pm}: \quad w^{\ddagger\pm}(z; \alpha^{\ddagger\pm}, \beta^{\ddagger\pm}) &= w + \frac{2(1 + \alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta})w}{w' \mp \sqrt{-2\beta} - 2zw - w^2}, \\ \alpha^{\ddagger\pm} &= -\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha \mp \frac{3}{4}\sqrt{-2\beta}, \quad \beta^{\ddagger\pm} = -\frac{1}{2} \left(-1 - \alpha \pm \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta} \right)^2, \\ \overline{\mathbf{W}}: \quad \overline{w}(z; \overline{\alpha}, \overline{\beta}) &= -iw(iz; \alpha, \beta), \quad \overline{\alpha} = -\alpha, \quad \overline{\beta} = \beta, \end{aligned}$$

где $w \equiv w(z; \alpha, \beta)$ — решение PIV (4.1). Эти четыре преобразования справедливы для всех решений $w(z; \alpha, \beta)$, у которых числители и знаменатели отличны от нуля. Преобразования Беклунда $\widetilde{\mathbf{W}}^\pm$ и $\widehat{\mathbf{W}}^\pm$ были найдены Лукашевичем [65] и Громаком [6], а $\mathbf{W}^{\dagger\pm}$ и $\mathbf{W}^{\ddagger\pm}$ — Китаевым [66] (см. также [5, 12, 19]). Преобразование $\mathbf{W}^{\dagger\pm}$ эквивалентно преобразованиям $\mathbf{T}_1$ (при нижнем знаке) и $\mathbf{T}_2$ (при верхнем знаке), полученным Муратой [12]. Заметим, что преобразования Беклунда $\mathbf{W}^{\dagger\pm}$ и $\mathbf{W}^{\ddagger\pm}$ можно выразить через преобразования $\widetilde{\mathbf{W}}^\pm$ и $\widehat{\mathbf{W}}^\pm$ (дальнейшие подробности см. в [5]).

В преобразованиях Беклунда для PIV имеется трудность, вызванная членом с квадратным корнем $\sqrt{-2\beta}$, и поэтому проще положить $\gamma = \sqrt{-2\beta}$ и далее рассматривать уравнение

$$w'' = \frac{(w')^2}{2w} + \frac{3}{2}w^3 + 4zw^2 + 2(z^2 - \alpha)w - \frac{\gamma^2}{2w} \quad (4.2)$$

вместо (4.1), хотя необходимо проявить внимание при выборе знака для γ . Из этого следует, что соотношения для параметров становятся линейными, а это весьма удобно.

СЛУЧАЙ 4.1. $\{\widetilde{\mathbf{W}}^+, \widehat{\mathbf{W}}^-\}$. В этом случае соотношения для параметров дают систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}c_n, & a_{n-1} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}a_n - \frac{3}{4}c_n, \\ c_{n+1} &= 1 + a_n + \frac{1}{2}c_n, & c_{n-1} &= -1 + a_n + \frac{1}{2}c_n, \end{aligned}$$

имеющих одно и то же общее решение

$$a_n = \frac{1}{2}\kappa - \frac{3}{2}\mu(-1)^n + \frac{1}{2}n, \quad c_n = \kappa + \mu(-1)^n + n,$$

где κ и μ – произвольные постоянные. Исключая w' из $\widetilde{\mathbf{W}}^+$ и $\widehat{\mathbf{W}}^-$ и полагая $x_n = w(z; a_n, c_n)$, $x_{n+1} = \widetilde{w}^+(z; a_{n+1}, c_{n+1})$ и $x_{n-1} = \widehat{w}^-(z; a_{n-1}, c_{n-1})$, где $c_m = \sqrt{-2b_m}$, получаем

$$x_{n+1} + x_n + x_{n-1} = -2z + \frac{-n + \kappa(-1)^n + \mu}{x_n}, \quad (4.3)$$

что представляет собой dPI. На связь между решениями PIV (4.1) и dPI (4.3) впервые указали Фокас, Итс и Китаев [67] (см. также [56, 59, 60]). Впоследствии она была изучена Бассомом, Кларксоном и Хиксом [5, 68], которые составили таблицы совместных решений для PIV (4.1) и dPI (4.3), выраженных через функции параболического цилиндра, а недавно – Грамматикосом и Рамани [58]. Эта связь между решениями PIV (4.1) и dPI (4.3) проявляется в удивительном сходстве результатов в [58] для dPI (4.3) и в [5, 12, 16, 69] для PIV (4.1).

Применение этой процедуры к паре преобразований Беклунда $\{\widetilde{\mathbf{W}}^-, \widehat{\mathbf{W}}^+\}$ также приводит к разностному уравнению, которое эквивалентно dPI (4.3).

СЛУЧАЙ 4.2. $\{\overline{\mathbf{W}}^{\dagger+} \equiv \overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{W}^{\dagger+}, \overline{\mathbf{W}}^{\dagger+} \equiv \overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{W}^{\dagger+}\}$. В этом случае соотношения для параметров дают систему разностных уравнений

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{3}{2} + \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}c_n, & a_{n-1} &= \frac{3}{2} + \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{4}c_n, \\ c_{n+1} &= -1 + a_n - \frac{1}{2}c_n, & c_{n-1} &= 1 + a_n - \frac{1}{2}c_n, \end{aligned}$$

имеющих одно и то же общее решение

$$a_n = -\frac{3}{2}\kappa + \frac{1}{2}\mu(-1)^n - \frac{3}{2}n, \quad c_n = -\kappa - \mu(-1)^n - n,$$

где κ и μ — произвольные постоянные. Исключение w' из $\overline{\mathbf{W}}^{\dagger+}$ и $\overline{\mathbf{W}}^{\ddagger+}$ и подстановка $x_n = w(z; a_n, c_n)$, $x_{n+1} = \overline{w}^{\dagger+}(z; a_{n+1}, c_{n+1})$ и $x_{n-1} = \overline{w}^{\ddagger+}(z; a_{n-1}, c_{n-1})$ приводят к выражению

$$\frac{2n+1+2\kappa}{x_{n+1}-x_n} + \frac{2n-1+2\kappa}{x_{n-1}-x_n} + x_n + 2z + \frac{n+\kappa+\mu(-1)^n}{x_n}.$$

Полагая затем в этом уравнении $x_m = (-1)^m y_m$, мы получаем

$$\frac{2n+1+2\kappa}{y_{n+1}+y_n} + \frac{2n-1+2\kappa}{y_n+y_{n-1}} = y_n + 2(-1)^n z - \frac{n+\kappa+\mu(-1)^n}{y_n}, \quad (4.4)$$

что является еще одной альтернативной формой для dPI.

Применение этой процедуры к паре преобразований Беклунда $\{\overline{\mathbf{W}}^{\dagger-} \equiv \overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{W}^{\dagger-}, \overline{\mathbf{W}}^{\ddagger-} \equiv \overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{W}^{\ddagger-}\}$ дает разностное уравнение, которое эквивалентно альтернативной форме dPI (4.4).

4.2. Разностное уравнение второго порядка и второй степени. Следующие два преобразования Беклунда для PIV (4.1), выведенные Фокасом, Мьюганом и Абловцем [19], записываются как преобразования $\mathbf{R}_5$ и $\mathbf{R}_7$, заданные формулами

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_5: \quad w_5(z; \alpha_5, \beta_5) &= \frac{(w' - w^2 - 2zw)^2 + 2\beta}{2w[w' - w^2 - 2zw + 2(\alpha + 1)]}, \quad \alpha_5 = \alpha + 2, \quad \beta_5 = \beta, \\ \mathbf{R}_7: \quad w_7(z; \alpha_7, \beta_7) &= \frac{(w' + w^2 + 2zw)^2 + 2\beta}{2w[w' + w^2 + 2zw - 2(\alpha - 1)]}, \quad \alpha_7 = \alpha - 2, \quad \beta_7 = \beta, \end{aligned}$$

которые совпадают с преобразованиями $\mathbf{T}_+$ и $\mathbf{T}_-$, найденными Муратой [12]. Заметим, что Бассом, Кларксон и Хикс [5] показали, что $\mathbf{R}_5$ и $\mathbf{R}_7$ можно выразить через преобразования $\widehat{\mathbf{W}}^{\pm}$ и $\widehat{\mathbf{W}}^{\pm}$. Подстановка $\alpha_5 = a_{n+1}$, $\alpha = a_n$, $\alpha_7 = a_{n-1}$ и решение разностных уравнений дают $\alpha_n = \kappa + 2n$, где κ — произвольная постоянная. Полагая затем $x_{n+1} = w_5(z; a_{n+1}, \beta)$, $x_n = w(z; a_n, \beta)$ и $x_{n-1} = w_7(z; a_{n-1}, \beta)$ и исключая w' , мы получаем разностное уравнение второго порядка и второй степени:

$$\begin{aligned} &x_{n+1}^2 \{ 2x_n^4 + 8x_n^3 z + 4(2z^2 - \alpha - 2n - 1)x_n^2 - 8z(\alpha + 2n + 1)x_n + \\ &\quad + 2(\alpha + 2n + 1)^2 + \beta - [2x_n^2 - 4zx_n - 4(\alpha + 2n)]x_n x_{n-1} \} + \\ &\quad + 2x_n^6 + 4x_n^5(4z + x_{n+1} - x_{n-1}) + 24zx_n^4(x_{n+1} - x_{n-1}) - 6x_n^4 x_{n+1} x_{n-1} + \\ &\quad + 48z^2 x_n^3(x_{n+1} - x_{n-1}) - 4x_n^3(x_{n-1} + x_{n+1}) - 4(\alpha + 2n)x_n^3(x_{n+1} - x_{n-1}) - \\ &\quad - 24zx_n^3 x_{n+1} x_{n-1} + 8(\alpha + 2n - 3z^2)x_n^2 x_{n+1} x_{n-1} + \\ &\quad + 16z(\alpha + 2n)x_n x_{n+1} x_{n-1} + [4(\alpha + 2n)^2 - 4 - 2]x_{n+1} x_{n-1} - \\ &\quad - 16z(\alpha + 2n + 1 - 2z^2)x_n^2 x_{n+1} + 16z(\alpha + 2n - 1 - 2z^2)x_n^2 x_{n-1} - \\ &\quad - 16z^2(\alpha + 2n + 1)x_n x_{n+1} + 16z^2(\alpha + 2n - 1)x_n x_{n-1} + \\ &\quad + 48z^2 x_n^4 + 64z^3 x_n^3 + 32z^4 + 4(x_n + 2z)^2 + 4(x_n + 2z)(x_{n+1} - x_{n-1}) + \\ &\quad + x_{n-1}^2 \{ 2x_n^4 + 8x_n^3 z + 4(2z^2 - \alpha - 2n + 1)x_n^2 - 8z(\alpha + 2n - 1)x_n + \\ &\quad + 2(\alpha + 2n - 1)^2 + \beta + [2x_n^2 + 4zx_n - 4(\alpha + 2n)]x_n x_{n+1} \} = 0. \end{aligned}$$

4.3. Дробные преобразования Китаева. Китаев [66] исследовал преобразования Беклунда для PIV (4.1) с помощью представления ассоциированной деформации изомонодромии, которое имеет регулярную особую точку при $\lambda = 0$ и нерегулярную особую точку ранга 2 при $\lambda = \infty$ (ср. [19]). Китаев показал, что преобразования Беклунда $\widetilde{\mathbf{W}}$ и $\widehat{\mathbf{W}}$ соответствуют регулярной точке при $\lambda = 0$, а преобразования $\mathbf{W}^\dagger$ и $\mathbf{W}^\ddagger$ связаны с нерегулярной точкой при $\lambda = \infty$. Как было отмечено выше, Бассом, Кларксоном и Хикс [5] показали, что преобразования Беклунда $\mathbf{W}^{\pm}$ и $\mathbf{W}^{\ddagger\pm}$ выражаются через $\widetilde{\mathbf{W}}^\pm$ и $\widehat{\mathbf{W}}^\pm$. Таким образом, они получили следующие *дробные преобразования Китаева*:

$$w^{\dagger+}(z; \alpha^{\dagger+}, \beta^{\dagger+}) = w(z; \alpha, \beta) - \frac{1 - \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta}}{\widehat{w}^-(z; \alpha, \beta)}, \quad (4.5)$$

$$w^{\dagger-}(z; \alpha^{\dagger-}, \beta^{\dagger-}) = w(z; \alpha, \beta) - \frac{1 - \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta}}{\widehat{w}^+(z; \alpha, \beta)}, \quad (4.6)$$

$$w^{\ddagger+}(z; \alpha^{\ddagger+}, \beta^{\ddagger+}) = w(z; \alpha, \beta) + \frac{1 + \alpha + \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta}}{\widetilde{w}^+(z; \alpha, \beta)}, \quad (4.7)$$

$$w^{\ddagger-}(z; \alpha^{\ddagger-}, \beta^{\ddagger-}) = w(z; \alpha, \beta) + \frac{1 + \alpha - \frac{1}{2}\sqrt{-2\beta}}{\widetilde{w}^-(z; \alpha, \beta)}, \quad (4.8)$$

представляющие собой алгебраические соотношения или *нелинейные формулы суперпозиции* для трех решений PIV (4.1). Преобразования (4.5)–(4.8) могут быть использованы для эффективного нахождения иерархий решений для PIV с помощью одних только *алгебраических* операций (дальнейшие подробности см. в [5]). Интересным открытым вопросом является выяснение того, относятся ли дробные преобразования Китаева (4.5)–(4.8) к дискретным уравнениям или к их специальным случаям.

5. ОБСУЖДЕНИЕ

В этой статье мы показали, что имеется тесная связь между преобразованиями Беклунда и иерархиями решений уравнений Пенлеве и дискретных уравнений Пенлеве. Иерархии решений уравнений Пенлеве удовлетворяют как дифференциальному, так и разностному уравнению. Преобразования Беклунда уравнений Пенлеве можно применить для вывода разнообразных разностных уравнений (включая некоторые дискретные уравнения Пенлеве).

Иерархии точных решений для PII, PIII и PIV, как рациональных, так и однопараметрических семейств решений, широко известны (ср. [4–9, 11–13, 16, 17, 69–77]). Поскольку существует явное соотношение между PII, PIII и PIV и дискретными уравнениями Пенлеве, эти иерархии решений для PII, PIII и PIV тоже удовлетворяют не только обыкновенным дифференциальным уравнениям, но и разностным уравнениям. Это вполне аналогично ситуации с классическими специальными функциями, такими как функции Бесселя, гипергеометрические функции, функции Лежандра, Вебера–Эрмита и Уиттекера, удовлетворяющими и обыкновенному дифференциальному уравнению, и рекуррентному соотношению, которое является дискретным уравнением. Это еще одно свидетельство того, что уравнения Пенлеве можно интерпретировать как уравнения для нелинейных специальных функций и что существует глубокая связь между классическими специальными функциями, уравнениями Пенлеве и дискретными уравнениями

Пенлеве (см., например, также [54]).

В заключение мы сформулируем некоторые открытые вопросы, касающиеся соотношения между дискретными и непрерывными уравнениями Пенлеве.

1. Являются ли все разностные уравнения, выведенные из преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве, “интегрируемыми”? Заметим, что лаксова пара для уравнения Пенлеве принимает форму

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} = \mathbf{A} \Psi, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial z} = \mathbf{U} \Psi,$$

где z – независимая переменная и переменная ζ связана с задачей Римана–Гильберта, а лаксова пара для дискретного уравнения Пенлеве имеет вид

$$\frac{\partial \Psi_n}{\partial \zeta} = \mathbf{A}_n \Psi_n, \quad \Psi_{n+1} = \mathbf{U}_n \Psi_n,$$

где первое уравнение такое же, как в непрерывной задаче.

2. Как можно алгоритмически получить лаксову пару (или задачу монодромии) для дискретного уравнения из лаксовой пары (или задачи монодромии) и преобразований Беклунда для присоединенного уравнения Пенлеве?

3. Можно ли получить все дискретные уравнения Пенлеве из преобразований Беклунда для уравнений Пенлеве? В частности, можно ли использовать эту же процедуру для вывода q -дискретных уравнений Пенлеве? Заметим, что до настоящего времени только дискретные уравнения Пенлеве разностного типа были выведены с помощью этой процедуры.

4. В работах Окамото [14–17] показано, что уравнения Пенлеве PII–PVI допускают симметрии под действием аффинной группы Вейля $A_1^{(1)}$, которые связаны с присоединенными преобразованиями Беклунда. Связь между симметрией аффинной группы Вейля и структурой рациональных решений PII–PVI изучена в работах [8, 69, 75–79]. Связь между аффинной группой Вейля, уравнениями Пенлеве и дискретными уравнениями обсуждалась недавно в статье Ноуми и Ямады [80], хотя в ней эти дискретные уравнения и не были отнесены к дискретным уравнениям Пенлеве. Это, очевидно, требует дальнейшего исследования.

5. Может ли эта процедура быть применена для получения конечных периодических разностных уравнений, т.е. разностных уравнений, в которых $x_{n+N} = x_n$ для всех n при фиксированном N ?

6. Можно ли распространить эту процедуру на уравнения высших порядков, например на иерархию РП (ср. [81])?

7. Что получится, если применить эту процедуру к преобразованиям Беклунда для дискретных уравнений Пенлеве?

Благодарности. Мы хотим поблагодарить Налини Джоши за полезные замечания и многое объясняющее обсуждение результатов. П. А. Кларксон и Е. Л. Менсфилд благодарны Отделению теоретической математики, Университет Аделаиды, Австралия, за гостеприимство во время их визита, когда было начато это исследование, частично поддержанное Австралийским исследовательским советом. П. А. Кларксон также благодарит Институт математических научных исследований, Беркли, США (MSRI), за гостеприимство при завершении этой статьи. Исследования в MSRI были частично поддержаны NSF, грант DMS-9701755. Работа Х. Н. Вебстер была поддержана Институтом математики и статистики (аспирантский грант Кентского университета).

Список литературы

- [1] *E. Picard.* Compt. Rend. Acad. Sci. Paris. 1887. V. 104. P. 41–43.
- [2] *Э. Л. Айнс.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Харьков: ГНТИ Украины, 1939.
- [3] *M. J. Ablowitz, P. A. Clarkson.* Solitons, nonlinear evolution equations and inverse scattering. L.M.S. Lect. Notes Math. V. 149. Cambridge: C.U.P., 1991.
- [4] *H. Airault.* Stud. Appl. Math. 1979. V. 61. P. 31–53.
- [5] *A. P. Bassom, P. A. Clarkson, A. C. Hicks.* Stud. Appl. Math. 1995. V. 95. P. 1–71.
- [6] *В. И. Громак.* Диф. уравн. 1978. Т. 14. С. 2131–2135.
- [7] *K. Kajiwara, T. Masuda.* A generalization of determinant formulas for the solutions of Painlevé II and XXIV equations. solv-int/9903014.
- [8] *K. Kajiwara, T. Masuda.* On the Umemura polynomials for the Painlevé III equation. solv-int/9903015.
- [9] *K. Kajiwara, Y. Ohta.* J. Math. Phys. 1996. V. 37. P. 4393–4704.
- [10] *K. Kajiwara, Y. Ohta.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 2431–2446.
- [11] *A. E. Milne, P. A. Clarkson, A. P. Bassom.* Stud. Appl. Math. 1997. V. 98. P. 139–194.
- [12] *Y. Murata.* Funkc. Ekvacioj. Ser. Int. 1985. V. 28. P. 1–32.
- [13] *Y. Murata.* Nagoya Math. J. 1995. V. 139. P. 37–65.
- [14] *K. Okamoto.* Ann. Mat. Pure Appl. 1987. V. 146. P. 337–381.
- [15] *K. Okamoto.* Japan. J. Math. 1987. V. 13. P. 47–76.
- [16] *K. Okamoto.* Math. Annal. 1986. V. 275. P. 221–255.
- [17] *K. Okamoto.* Funkc. Ekvacioj. Ser. Int. 1987. V. 30. P. 305–332.
- [18] *A. S. Fokas, M. J. Ablowitz.* J. Math. Phys. 1982. V. 23. P. 2033–2042.
- [19] *A. S. Fokas, U. Mugan, M. J. Ablowitz.* Physica D. 1988. V. 30. P. 247–283.
- [20] *В. И. Громак.* Диф. уравн. 1975. Т. 11. С. 373–376.
- [21] *U. Mugan, A. S. Fokas.* J. Math. Phys. 1992. V. 33. P. 2031–2045.
- [22] *H. Flaschka, A. C. Newell.* Commun. Math. Phys. 1980. V. 76. P. 65–116.
- [23] *A. R. Its, V. Yu. Novokshenov.* The Isomonodromic Deformation Method in the Theory of Painlevé Equations. Lect. Notes in Math. V. 1191. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [24] *K. Okamoto.* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math. 1986. V. 33. P. 575–618.
- [25] *A. P. Magnus.* J. Comp. Appl. Anal. 1995. V. 57. P. 215–237.
- [26] *E. Brézin, V. A. Kazakov.* Phys. Lett. B. 1990. V. 236. P. 144–150.
- [27] *D. J. Gross, A. A. Migdal.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 127–130.
- [28] *V. Periwal, D. Shevitz.* Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 1326–1329.
- [29] *B. Grammaticos, A. Ramani, V. Papageorgiou.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1825–1828.
- [30] *A. Ramani, B. Grammaticos, J. Hietarinta.* Phys. Rev. Lett. 1991. V. 67. P. 1829–1832.
- [31] *M. Hietarinta, C. Viallet.* Phys. Rev. Lett. 1998. V. 81. P. 325–328.
- [32] *J. Jimbo, H. Sakai.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 38. P. 145–154.
- [33] *M. Jimbo, H. Sakai, A. Ramani, B. Grammaticos.* Phys. Lett. A. 1996. V. 217. P. 111–118.
- [34] *B. Grammaticos, A. Ramani.* The hunting for the discrete Painlevé VI is over. solv-int/9901006.
- [35] *A. P. Bassom, P. A. Clarkson.* Phys. Lett. A. 1994. V. 194. P. 358–370.
- [36] *P. A. Clarkson, H. N. Webster.* Chaos, Solitons and Fractals (в печати).
- [37] *C. Cresswell, N. Joshi.* J. Phys. A. 1999. V. 32. P. 655–669.
- [38] *B. Grammaticos, F. W. Nijhoff, V. Papageorgiou, A. Ramani, J. Satsuma.* Phys. Lett. A. 1994. V. 185. P. 446–452.
- [39] *B. Grammaticos, F. W. Nijhoff, A. Ramani.* Discrete Painlevé equations. In: The Painlevé Property, One Century Later. CRM series in Mathematical Physics. Ed. R. Conte. New York: Springer-Verlag, 1999. P. 413–516.
- [40] *J. Hietarinta, K. Kajiwara.* Rational solutions to d-PIV. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations. LMS Lect. Notes Series. V. 255. Eds. P. A. Clarkson, F. W. Nijhoff. Cambridge: C.U.P., 1999. P. 206–216.
- [41] *N. Joshi, A. Ramani, B. Grammaticos.* Phys. Lett. A. 1998. V. 249. P. 59–62.
- [42] *K. Kajiwara.* The discrete Painlevé II equation and the classical special functions. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations. LMS Lect. Notes Series, V. 255. Eds. P. A. Clarkson, F. W. Nijhoff. Cambridge: C.U.P., 1999. P. 217–227.
- [43] *K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma.* J. Math. Phys. 1995. V. 36. P. 4162–4174.

- [44] *K. Kajiwara, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos, A. Ramani.* J. Phys. A. 1994. V. 27. P. 915–922.
- [45] *K. Kajiwara, K. Yamamoto, Y. Ohta.* Phys. Lett. A. 1997. V. 232. P. 189–199.
- [46] *F. W. Nijhoff, J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, A. Ramani.* Inverse Problems. 1996. V. 12. P. 697–716.
- [47] *Y. Ohta, K. Kajiwara, J. Satsuma.* Bilinear structure and exact solutions of the discrete Painlevé I equation. In: Symmetries and Integrability of Difference Equations. CRM Proc. Lecture Notes. V. 9. Eds. P. Winternitz, D. Levi. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. P. 265–268.
- [48] *Y. Ohta, A. Ramani, B. Grammaticos, K.M. Tamizhmani.* Phys. Lett. A. 1996. V. 216. P. 255–261.
- [49] *A. Ramani, B. Grammaticos.* Physica A. 1996. V. 228. P. 160–171.
- [50] *A. Ramani, B. Grammaticos, J. Satsuma.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 4655–4665.
- [51] *A. Ramani, Y. Ohta, J. Satsuma, B. Grammaticos.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 192. P. 67–76.
- [52] *J. Satsuma, K. Kajiwara, B. Grammaticos, J. Hietarinta, A. Ramani.* J. Phys. A. 1995. V. 28. P. 3541–3548.
- [53] *K.M. Tamizhmani, B. Grammaticos, A. Ramani.* Lett. Math. Phys. 1993. V. 29. P. 49–54.
- [54] *K.M. Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos, K. Kajiwara.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5799–5810.
- [55] *K.M. Tamizhmani, A. Ramani, B. Grammaticos, Y. Ohta.* Lett. Math. Phys. 1996. V. 38. P. 289–296.
- [56] *A. S. Fokas, B. Grammaticos, A. Ramani.* J. Math. Anal. Appl. 1993. V. 180. P. 342–360.
- [57] *B. Grammaticos, A. Ramani.* Discrete Painlevé equations: derivation and properties. In: Application of Analytic and Geometric Methods to Nonlinear Differential Equations. NATO ASI Series C. V. 413. Ed. P. A. Clarkson. Dordrecht: Kluwer, 1993. P. 299–313.
- [58] *B. Grammaticos, A. Ramani.* J. Phys. A. 1998. V. 31. P. 5787–5798.
- [59] *В. И. Громак, В. В. Цегельник.* Диф. уравн. 1994. Т. 30. С. 1118–1124.
- [60] *В. И. Громак, В. В. Цегельник.* Диф. уравн. 1996. Т. 32. С. 1018–1023.
- [61] *В. В. Цегельник.* ТМФ. 1995. Т. 102. С. 364–366.
- [62] *В. В. Цегельник.* Диф. уравн. 1996. Т. 32. С. 1434–1435.
- [63] *Э. Уиттекер, Дж. Ватсон.* Курс современного анализа. М.: Физматгиз, 1962.
- [64] *Н. А. Лукашевич.* Диф. уравн. 1971. Т. 7. С. 1124–1125.
- [65] *Н. А. Лукашевич.* Диф. уравн. 1967. Т. 3. С. 771–780.
- [66] *А. В. Китаев.* 1991 (частное сообщение).
- [67] *A. S. Fokas, A. R. Its, A. V. Kitaev.* Commun. Math. Phys. 1991. V. 142. P. 313–344.
- [68] *A. P. Bassom, P. A. Clarkson, A. C. Hicks.* Adv. Diff. Eqns. 1995. V. 1. P. 175–198.
- [69] *H. Umemura, H. Watanabe.* Nagoya Math. J. 1997. V. 148. P. 151–198.
- [70] *P. A. Clarkson.* Europ. J. Appl. Math. 1990. V. 1. P. 279–300.
- [71] *V. I. Gromak.* Bäcklund transformations of Painlevé equations and their applications. In: The Painlevé Property, One Century Later. CRM series in Mathematical Physics. Ed. R. Conte. New York: Springer-Verlag, 1999. P. 687–734.
- [72] *Н. А. Лукашевич.* Диф. уравн. 1965. Т. 1. С. 731–735.
- [73] *Н. А. Лукашевич.* Диф. уравн. 1967. Т. 3. С. 1913–1923.
- [74] *E. L. Mansfield, H. N. Webster.* Stud. Appl. Math. 1998. V. 101. P. 321–341.
- [75] *M. Noumi, S. Okada, K. Okamoto, H. Umemura.* Special polynomials associated with the Painlevé equation II. In: Integrable Systems and Algebraic Geometry. Eds. M.-H. Saito, Y. Shimizu, R. Ueno. Singapore: World Scientific, 1998. P. 349–372.
- [76] *H. Umemura.* Special polynomials associated with the Painlevé equations I. Preprint, 1996.
- [77] *H. Umemura, H. Watanabe.* Nagoya Math. J. 1998. V. 151. P. 1–24.
- [78] *M. Noumi, Y. Yamada.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 199. P. 281–295.
- [79] *M. Noumi, Y. Yamada.* Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 65–69.
- [80] *M. Noumi, Y. Yamada.* Nagoya Math. J. (в печати); Symmetries in the fourth Painlevé equation and Okamoto polynomials. q-alg/9708018.
- [81] *P. A. Clarkson, N. Joshi, A. Pickering.* Inverse Problems. 1999. V. 15. P. 175–187.