Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Фальки, Ф. Магри, М. Педрони, Х. П. Субелли, Элементарный подход к полиномиальным τ -функциям КП-иерархии, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 1, 23–36

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf552>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 04:48:11

© 2000 г. Г. Фальки*, Ф. Магри†, М. Педрони‡, Х. П. Субелли§

ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД К ПОЛИНОМИАЛЬНЫМ τ -ФУНКЦИЯМ КП-ИЕРАРХИИ

Элементарным способом построены ассоциированные с полиномиальными τ -функциями решения КП-иерархии. Построение основано на геометрическом подходе к солитонным уравнениям, базирующемся на концепции бигамильтоновых систем. Как следствие получено выражение для вронскиана полиномиальных τ -функций КП-иерархии. Эта формула, хотя и известная в литературе, получена прямым способом.

1. ВВЕДЕНИЕ

К числу многих замечательных свойств солитонных уравнений относится существование рациональных (относительно пространственных переменных x) решений. Этот факт обсуждался во многих работах как для уравнения Кортевега–де Фриза (КдФ), так и для уравнения Кадомцева–Петвиашвили (КП) (см., например, [1–7]). Было также замечено, что динамика полюсов этих решений описывается конечномерными интегрируемыми гамильтоновыми системами, такими как иерархия Калоджеро–Мозера (см. также [8, 9]). В контексте теории Сато солитонных уравнений [10, 11] рациональные решения КП-иерархии рассматривались, таким образом, как решения, ассоциированные с полиномиальными τ -функциями. Эти решения являются рациональными относительно всех времен иерархии и представляют собой частные случаи рациональных решений уравнения КП.

В работах [12, 13] было показано, что класс решений уравнения КП, ассоциированных с полиномиальными τ -функциями, порождает биспектральные кольца дифференциальных операторов. Свойство биспектральности было объектом интенсивного изучения в последнее время (см., например, [14]), начало которому положили некоторые исследования А. Грюнбаума в

*SISSA, Trieste, Italy. E-mail: falqui@sissa.it

†Dipartimento di Matematica, Università di Milano, Milano, Italy.
E-mail: magri@vmimat.mat.unimi.it

‡Dipartimento di Matematica, Università di Genova, Genova, Italy.
E-mail: pedroni@dimat.unige.it

§IMPA – CNPq, Rio de Janeiro, Brazil. E-mail: zubelli@impa.br

области компьютерной томографии. Дифференциальный оператор $L(x, d/dx)$ называется биспектральным, если он обладает семейством собственных функций $\Psi(x, z)$, которое также является семейством собственных функций для некоторого дифференциального оператора $A(z, d/dz)$. Примечательным является то обстоятельство, что лемма, существенно используемая в работе [12] при доказательстве биспектральности волновых функций, ассоциированных с полиномиальными τ -функциями, оказывается полезной также и в наших исследованиях (см. следствие).

В настоящей работе решения КП-иерархии, ассоциированные с полиномиальными τ -функциями, получены элементарным способом в рамках метода, введенного в работе [15], где предложен геометрический подход к линеаризации уравнений КП. Этот подход, основанный на геометрии бигамильтоновых многообразий, позволяет получить систему уравнений Риккати для бесконечных матриц, которые линеаризуются элементарными методами. Эти уравнения исследовались в работе [16], где было показано, что они описывают линейные потоки на грассманиане Сато. По этой причине упомянутая выше система была названа системой Сато [15]. В настоящей работе явно определены решения системы Сато в случае, если начальное условие имеет только конечное число ненулевых элементов, и показано, что эти решения порождают решения КП-иерархии, ассоциированные с полиномиальными τ -функциями.

В литературе можно найти несколько конструкций таких решений, в которых для получения более широкого класса решений используются стандартные (хотя и нетривиальные) средства, такие как, например, псевдодифференциальные операторы и бесконечномерные грассманианы. Используемая нами конструкция предпочтительна, поскольку является до некоторой степени замкнутой и, вероятно, может быть обобщена для получения и других решений, помимо тех, которые рассматриваются в настоящей работе. Например, если начальные данные находятся в классе операторов Гильберта–Шмидта, нетрудно видеть, что эти решения остаются в этом классе и в том случае, если они эволюционируют вдоль потоков систем Сато. Естественно поэтому попытаться расширить некоторые из представленных в настоящей работе результатов, рассматривая более общие классы начальных данных и соответствующие им τ -функции.

Работа построена следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем, как перейти от КП-иерархии (в форме законов сохранения) к системе Сато через другой важный объект, который называется центральной системой. В разделе 3 представлен обзор процедур линеаризации для систем Сато и приведена некоторая дополнительная информация относительно решения линеаризованной системы при произвольных начальных данных. При допущениях относительно начальных условий, сделанных в разделе 4, система Сато может быть решена в явном виде, а решения могут быть выражены в терминах полиномиальной τ -функции, как это показано в разделе 5. В заключение в разделе 6 приведен пример.

2. КП-ИЕРАРХИЯ, ЦЕНТРАЛЬНАЯ СИСТЕМА И СИСТЕМА САТО

Напомним некоторые результаты работы [15], в которой дано описание линеаризации КП-иерархии, проведенной в рамках бигамильтонова подхода к КдФ-иерархии.

Прежде всего введем уравнения КП в такой форме, которая, будучи эквивалентной обычной, все же отличается от нее (см. [17, 18]). Пусть $h(x, z) = z + \sum_{i \geq 1} h_i(x) z^{-i}$ – ряд Лорана, коэффициенты h_i которого принадлежат пространству функций C^∞ . Рассмотрим итерации Фаа ди Бруно, определенные как

$$h^{(j+1)} = \delta_x h^{(j)} + h h^{(j)}, \quad h^{(0)} = 1. \quad (2.1)$$

Они порождают подпространство $H_+ := \langle h^{(j)} \rangle_{j \geq 0}$, дополнительное к $H_- := \langle z^j \rangle_{j < 0}$. Пусть π_+ и π_- – соответствующие проекции. Назовем

$$H^{(k)} := \pi_+(z^k) \quad (2.2)$$

КП-токами. Они представляют собой единственные ряды Лорана в H_+ , имеющие асимптотическое разложение $H^{(k)} = z^k + O(z^{-1})$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Уравнениями КП являются уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial t_k} = \delta_x H^{(k)} \quad (2.3)$$

для рядов Лорана $h^{(1)}$.

Теперь обратимся к следующей проблеме: если h эволюционирует вдоль k -го КП-потока, то как эволюционируют токи $H^{(j)}$? Ответ на этот вопрос дает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *КП-токи $H^{(j)}$ эволюционируют таким образом, что*

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_k} + H^{(k)} \right) (H_+) \subset H_+. \quad (2.4)$$

В явном виде имеем

$$\frac{\partial H^{(j)}}{\partial t_k} + H^{(k)} H^{(j)} = H^{(k+j)} + \sum_{l=1}^k H_l^j H^{(k-l)} + \sum_{l=1}^j H_l^k H^{(j-l)}. \quad (2.5)$$

Важно заметить, что мы можем забыть о том, что токи $H^{(i)}$ были построены с помощью h ; тогда уравнения (2.5) определяют иерархию векторных полей в пространстве $\mathcal{H}$ последовательностей $\{H^{(i)}\}_{i \geq 0}$ рядов Лорана вида $H^{(i)} = z^i + \sum_{l \geq 1} H_l^i z^{-l}$ (т.е. в пространстве $(N \times N)$ -матриц).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Иерархия, определяемая уравнениями (2.5), называется центральной системой (ЦС).

Можно показать, что ЦС-потоки коммутируют. Другим важным моментом является то, что ЦС представляет собой семейство *динамических систем* в $\mathcal{H}$ (т.е. систем обыкновенных дифференциальных уравнений), поскольку больше не предполагается, что токи $H^{(i)}$ зависят от пространственной переменной x .

¹⁾ Об установлении соответствия с обычным описанием уравнений КП в терминах псевдодифференциальных операторов [19, 20] см. работу [15].

ЗАМЕЧАНИЕ 1. ЦС допускает ряд интересных редукций, описанных в работе [21]. Например, можно получить дробные КдФ-иерархии [22] и стационарные редукции уравнений Гельфанда–Дикого [20] (см. также [23]). В частности, КП-иерархию можно рассматривать как проекцию ЦС на пространство решений первого ЦС-потока.

Теперь покажем, что решения ЦС можно получить, используя решения другой системы (системы Сато), которая легко линеаризуется. Она определена в том же фазовом пространстве ЦС, однако мы будем использовать другие обозначения для точки, поскольку эти две системы различны. Рассмотрим последовательности $\{W^{(i)}\}_{i \geq 0}$ рядов Лорана $W^{(i)} = z^i + \sum_{l \geq 1} W_l^i z^{-l}$, введем подпространство $W_+ := \langle W^{(i)} \rangle_{i \geq 0}$ и определим систему Сато как

$$\left(\frac{\partial}{\partial t_k} + z^k \right) (W_+) \subset W_+. \quad (2.6)$$

В явном виде она записывается как

$$\frac{\partial W^{(j)}}{\partial t_k} + z^k W^{(j)} = W^{(k+j)} + \sum_{l=1}^k W_l^j W^{(k-l)} \quad (2.7)$$

или

$$\frac{\partial W_m^j}{\partial t_k} + W_{k+m}^j - W_m^{k+j} = \sum_{l=1}^k W_l^j W_m^{k-l}. \quad (2.8)$$

Такасаки показал ([16, с. 9]), что в подходящих координатах эти уравнения представляют линейные потоки в больших клетках Gr_0 грассманиана Сато. Он также указал [24] на их связь с формулировкой КП-иерархии в терминах псевдодифференциальных операторов. Основным моментом здесь является то, что $W^{(0)}$ представляет собой одевающий оператор, т.е. $W^{(0)} \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i z^i\right)$ — функция Бейкера–Ахиезера (см., например, [19, 25]). Связь с ЦС (2.5) дает следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $\mu: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — отображение, определенное как

$$\{W^{(i)}\} \mapsto \left\{ H^{(i)} = \sum_{l=0}^i \frac{W_{i-l}^0 W^{(l)}}{W^{(0)}} \right\}. \quad (2.9)$$

Тогда μ переводит решения системы Сато в решения ЦС, удовлетворяющие условию $H^{(0)} = 1$.

Этот результат может быть переведен в контекст накрытий Дарбу, как было предложено в работе [26] при изучении преобразований Дарбу (в особенности для КП-иерархии).

В результате мы свели изучение уравнений КП к изучению уравнений Риккати (2.8). Поскольку решение (2.8) известно, соответствующее решение уравнений КП (2.3) легко получается из соотношения $h(x; t) = H^{(1)}(x + t_1, t_2, \dots)$, где

$$H^{(1)} = \frac{W^{(1)} + W_1^0 W^{(0)}}{W^{(0)}} = z + \frac{\partial}{\partial t_1} \ln W^{(0)}, \quad (2.10)$$

причем последнее равенство есть не что иное, как уравнение (2.7) при $j = 0$ и $k = 1$.

3. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ СИСТЕМЫ САТО

Уравнения (2.8) можно записать в матричной форме:

$$\frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} + \mathcal{W} \cdot {}^T \Lambda^k - \Lambda^k \cdot \mathcal{W} = \mathcal{W} \Gamma_k \mathcal{W}, \quad (3.1)$$

где $\mathcal{W} = [W_m^j]_{j \geq 0, m \geq 1}$ и

$$\Lambda = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots \end{bmatrix}, \quad \Gamma_k = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & & 1 & 0 & \cdots \\ & \ddots & & \ddots & \\ 1 & 0 & & & \\ \vdots & & & & \end{bmatrix}. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.1) – это матричное уравнение Риккати, которое, как известно [27], может быть (формально) линеаризовано, если положить $\mathcal{W} = \mathcal{V} \cdot \mathcal{U}^{-1}$. Действительно, уравнение (3.1) эквивалентно линейной системе уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t_k} = {}^T \Lambda^k \mathcal{U} - \Gamma_k \mathcal{V}, \\ \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t_k} = \Lambda^k \mathcal{V}. \end{cases} \quad (3.3)$$

Второе уравнение решается при любых k посредством формулы

$$\mathcal{V}(t) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right) C = \sum_{i \geq 0} p_i(t) \Lambda^i \cdot C, \quad (3.4)$$

где $t = (t_1, t_2, \dots)$, матрица C постоянна, а полиномы Шура $\{p_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ определяются как обычно:

$$\exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i z^i\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} p_i(t) z^i$$

(очевидно, что $p_i(t) = 0$ при $i < 0$). Тогда у нас остается следующее уравнение для $\mathcal{U}$:

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t_k} = {}^T \Lambda^k \mathcal{U} - \Gamma_k \cdot \sum_{i \geq 0} p_i(t) \Lambda^i \cdot C. \quad (3.5)$$

Если положить

$$\mathcal{U} = \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i {}^T \Lambda^i\right) (\widehat{\mathcal{U}} C + \mathcal{D}), \quad (3.6)$$

где $\mathcal{D}$ – другая постоянная матрица, уравнение (3.5) преобразуется:

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{U}}}{\partial t_k} = -\Omega_k, \quad (3.7)$$

где

$$\begin{aligned}\Omega_k &= \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i {}^T \Lambda^i\right) \cdot \Gamma_k \cdot \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right) = \\ &= \left(\sum_{i \geq 0} \tilde{p}_i {}^T \Lambda^i\right) \cdot \Gamma_k \cdot \sum_{i \geq 0} p_i \Lambda^i,\end{aligned}$$

а $\tilde{p}_i(t) = p_i(-t)$, или, что эквивалентно, $\{\tilde{p}_i(t)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ определяются соотношением

$$\exp\left(-\sum_{i \geq 1} t_i z^i\right) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \tilde{p}_i(t) z^i.$$

Учитывая форму Γ_k , легко показать, что

$$\Omega_k = \begin{bmatrix} \tilde{p}_{1-k} & \tilde{p}_{2-k} & \cdots & \tilde{p}_0 & 0 & \cdots \\ \tilde{p}_{2-k} & \tilde{p}_{3-k} & \cdots & \tilde{p}_1 & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right). \quad (3.8)$$

Тогда, пользуясь тем, что $\partial \tilde{p}_k / \partial t_j = -\tilde{p}_{k-j}$, мы получаем

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Решение уравнения (3.7), удовлетворяющее начальному условию $\hat{\mathcal{U}}(0) = 0$, имеет вид*

$$\hat{\mathcal{U}}(t) = \tilde{\mathcal{H}} \cdot \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right), \quad (3.9)$$

где $\tilde{\mathcal{H}}$ – матрица Ганкеля: $\tilde{\mathcal{H}}_{ij} = \tilde{p}_{i+j-1}$ для $i, j \geq 1$.

Заметим, что хотя решение (3.9) представляет собой произведение бесконечных матриц, каждый элемент $\hat{\mathcal{U}}(t)$ может быть вычислен в явном виде благодаря специальной форме выражения

$$\exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right) = \sum_{i \geq 0} p_i(t) \Lambda^i.$$

Конечно, общее решение уравнения (3.7) находится путем добавления постоянной матрицы к (3.9), однако это всего лишь изменяет постоянную матрицу $\mathcal{D}$ в выражении

$$\mathcal{U}(t) = \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i {}^T \Lambda^i\right) \left(\tilde{\mathcal{H}} \cdot \exp\left(\sum_{i \geq 1} t_i \Lambda^i\right) \mathcal{C} + \mathcal{D} \right). \quad (3.10)$$

Эту матрицу можно вычислить в явном виде (и обратить) только при тщательном выборе $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ (т.е. начальных условий). В следующем разделе мы покажем, что это можно сделать, если $\mathcal{W}(t_0)$ (где $t_0 = (t_{10}, t_{20}, \dots)$) – вектор “начальных времен”) имеет только конечное число ненулевых элементов.

4. КОНЕЧНОМЕРНЫЙ СЛУЧАЙ

В этом разделе мы выпишем в явном виде общее решение системы Сато в случае, когда начальное условие $\mathcal{W}(t_0)$ удовлетворяет соотношению

$$W_i^j(t_0) = 0 \quad \text{для всех } i > n, \quad j \geq m. \quad (4.1)$$

В разделе 5 мы покажем, что таким образом получаются решения КП-иерархии, ассоциированные с полиномиальными τ -функциями.

Прежде всего заметим, что из соотношения (4.1) следует

$$\frac{\partial W_i^j}{\partial t_k}(t_0) = 0 \quad \text{для всех } i > n, \quad j \geq m; \quad (4.2)$$

это означает, что потоки систем Сато являются касательными к подпространству $\mathbb{W}_{m,n}$ матриц $\mathcal{W}$, так что $W_i^j = 0$ для $i > n, j \geq m$, и, таким образом, ограничиваются на $\mathbb{W}_{m,n}$. Следовательно, уравнения (3.1) сводятся к уравнениям Риккати для *конечных* матриц:

$$\frac{\partial \mathcal{W}_{m,n}}{\partial t_k} + \mathcal{W}_{m,n} \cdot (\mathbb{T}\Lambda_{n,n})^k - (\Lambda_{m,m})^k \cdot \mathcal{W}_{m,n} = \mathcal{W}_{m,n} (\Gamma_k)_{n,m} \mathcal{W}_{m,n}, \quad (4.3)$$

где $\mathcal{M}_{m,n}$ обозначает $(m \times n)$ -матрицу, полученную путем выделения из бесконечной матрицы $\mathcal{M}$ ее верхнего угла размером $m \times n$. Кстати, заметим, что из матричной формы системы Сато (3.1) также следует, что

$$\mathcal{W} \in \mathbb{W}_{m,n} \implies \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial t_k} = 0 \quad \text{для всех } k \geq m+n, \quad (4.4)$$

и поэтому решение $\mathcal{W}(t)$ ограничения системы Сато на $\mathbb{W}_{m,n}$ зависит только от времен $(t_1, t_2, \dots, t_{m+n-1})$.

Для упрощения обозначений фиксируем m и n и переопределим возникающую в уравнении (4.3) матрицу следующим образом:

$$\mathcal{W}_{m,n} = W, \quad \Lambda_{m,m} = A, \quad \mathbb{T}\Lambda_{n,n} = B, \quad (\Gamma_k)_{n,m} = G_k. \quad (4.5)$$

Тогда уравнение (4.3) примет вид

$$\frac{\partial W}{\partial t_k} + WB^k - A^k W = WG_k W, \quad (4.6)$$

и его можно линеаризовать (как это было сделано в предыдущем разделе для бесконечномерного случая), полагая $W = VU^{-1}$, где V — $(m \times n)$ -матрица, а U — обратимая $(n \times n)$ -матрица. Эти матрицы удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t_k} = B^k U - G_k V, \\ \frac{\partial V}{\partial t_k} = A^k V. \end{cases} \quad (4.7)$$

Нетрудно показать, что общее решение этой системы получается усечением матриц $\mathcal{U}(t)$ и $\mathcal{V}(t)$ (см. раздел 3), т.е. что

$$V(t) = (\mathcal{V}(t))_{m,n} = \exp\left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i A^i\right) C = \sum_{i=0}^{m-1} p_i(t) A^i C, \quad (4.8)$$

$$U(t) = (\mathcal{U}(t))_{n,n} = \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j B^j\right) \left(D + \tilde{H} \exp\left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i A^i\right) C\right), \quad (4.9)$$

где C и D — соответственно постоянные $(m \times n)$ - и $(n \times n)$ -матрицы, а $\tilde{H} = \tilde{\mathcal{H}}_{n,m}$ (т.е. $\tilde{H} - (n \times m)$ -матрица с элементами $\tilde{H}_{ij} = \tilde{p}_{i+j-1}$). Более простая форма $U(t)$ получается при помощи следующей леммы.

ЛЕММА 1. Пусть $H - (n \times m)$ -матрица, определенная как $H_{ij} = p_{i+j-1}$. Тогда

$$\exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j B^j\right) \tilde{H} \exp\left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i A^i\right) = -H. \quad (4.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Уравнение (4.10) эквивалентно уравнению

$$\tilde{H} \exp\left(\sum_{i=1}^{m-1} t_i A^i\right) = -\exp\left(-\sum_{j=1}^{n-1} t_j B^j\right) H$$

или

$$\tilde{H} \sum_{i=0}^{m-1} p_i A^i = -\sum_{j=0}^{n-1} \tilde{p}_j B^j H. \quad (4.11)$$

Вычисляя (i, j) -элементы обеих частей этого уравнения, мы видим, что оно эквивалентно соотношению

$$\sum_{l=0}^{m-1} \tilde{p}_{i+l} p_{j-1-l} = -\sum_{r=0}^{n-1} \tilde{p}_{i-r-1} p_{j+r},$$

т.е.

$$\sum_{l=i}^{m-1+i} \tilde{p}_l p_{j+i-1-l} = -\sum_{r=i-n}^{i-1} \tilde{p}_r p_{j+i-1-r}.$$

Но это вытекает из соотношения

$$\sum_{l=0}^{j+i-1} \tilde{p}_l p_{j+i-1-l} = 0,$$

которое следует из равенства

$$\left(\sum_{k \geq 0} \tilde{p}_k z^k\right) \left(\sum_{h \geq 0} p_h z^h\right) = 1.$$

Из уравнений (4.9) и (4.10) получаем следующее выражение для $U(t)$:

$$U(t) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} t_j B^j\right) D - HC = \sum_{j=0}^{n-1} p_j B^j D - HC. \quad (4.12)$$

Для того чтобы определить соответствующее решение $W(t)$ системы Сато (ограниченной на $\mathbb{W}_{m,n}$), следует обратить матрицу $U(t)$ и вычислить

$$W(t) = V(t)U(t)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{m-1} p_i(t)A^i\right)C\left(\sum_{j=0}^{n-1} p_j B^j D - HC\right)^{-1}. \quad (4.13)$$

В следующем разделе мы предложим короткий путь вычислений $W(t)$, основанный на введении τ -функции.

5. τ -ФУНКЦИЯ И РАЦИОНАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ КП

В данном разделе мы покажем, как быстрее всего найти решения системы Сато в конечномерном случае, обсуждавшемся в разделе 4, и докажем, что такие решения приводят к рациональным решениям КП-иерархии. Основным объектом является функция $\tau = \det U$, которая в явном виде записывается как

$$\tau(t) = \begin{vmatrix} D_{11} - \sum_{j=1}^m p_j C_{j1} & \cdots & D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_j C_{jn} \\ D_{21} + p_1 D_{11} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{j1} & \cdots & D_{2n} + p_1 D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{jn} \\ \dots\dots\dots \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,1} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{j1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,n} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{jn} \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

Это выражение получено в работе [28, с. 338], где показано, что оно является наиболее общим полиномиальным решением КП-иерархии (в форме Хироты). Очевидно, что можно получить, в частности, τ -функции, ассоциированные с диаграммами Юнга, т.е. $\tau = \det [p_{f_i - i + j}]_{i,j=1,\dots,n}$, где $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_n > 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Функция τ является вронскианом, где производные берутся по t_1 ; более точно, имеем

$$\tau(t) = \text{Wr} \left[\sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,n} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{jn}, \dots, \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,1} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{j1} \right]. \quad (5.2)$$

Свойство вронскиана для $\tau = \det U$ можно непосредственно показать, если умножить уравнение

$$\frac{\partial U}{\partial t_1} = BU - G_1 V \quad (5.3)$$

на векторы $e_2 = [0, 1, 0, \dots, 0]$, $e_3 = [0, 0, 1, \dots, 0]$, $\dots$, $e_n = [0, 0, \dots, 0, 1]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. В работе [16, с. 29] были записаны эволюционные уравнения для τ -функции. Их можно легко получить в нашем формализме, заметив, что

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \ln \tau = \frac{\partial}{\partial t_k} \ln \det U = \operatorname{tr} \left(\frac{\partial U}{\partial t_k} U^{-1} \right) = \operatorname{tr} (B^k - G_k W) = -\operatorname{tr} (G_k W), \quad (5.4)$$

так что

$$\frac{\partial}{\partial t_k} \ln \tau = - \sum_{l=1}^k W_l^{k-l}. \quad (5.5)$$

Покажем теперь, что τ позволяет определить всю матрицу $W(t)$, т.е. ее строки $W^{(k)}$. Начнем с доказательства связи между τ и $W^{(0)}$, которая выражается следующей хорошо известной формулой (см., например, [19]):

$$W^{(0)}(t) = \frac{\tau(t - [z^{-1}])}{\tau(t)}, \quad (5.6)$$

где, как обычно, $[z^{-1}] = (z^{-1}, (1/2)z^{-2}, (1/3)z^{-3}, \dots)$. Прежде всего необходимо напомнить две леммы из работы [12].

ЛЕММА 2. *Полиномы Шура удовлетворяют соотношениям*

$$p_k(t - [z^{-1}]) = p_k(t) - z^{-1} p_{k-1}(t). \quad (5.7)$$

ЛЕММА 3. *Если $v_1, v_2, \dots, v_{j+1}$ – векторы-строки в $\mathbb{C}^{j+1}$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, то*

$$\det \begin{bmatrix} v_j - \lambda v_{j+1} \\ \vdots \\ v_1 - \lambda v_2 \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 1 & v_{j+1} \\ \lambda & v_j \\ \vdots & \vdots \\ \lambda^j & v_1 \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

СЛЕДСТВИЕ. *Имеет место формула*

$$\begin{aligned} \tau(t - [z^{-1}]) = & \left| \begin{array}{cccc} 1 & - \sum_{j=1}^m p_{j-1} C_{j1} & \cdots & - \sum_{j=1}^m p_{j-1} C_{jn} \\ z^{-1} & D_{11} - \sum_{j=1}^m p_j C_{j1} & \cdots & D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_j C_{jn} \\ z^{-2} & D_{21} + p_1 D_{11} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{j1} & \cdots & D_{2n} + p_1 D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z^{-n} & \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,1} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{j1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,n} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{jn} \end{array} \right|, \quad (5.9) \end{aligned}$$

и, следовательно, коэффициент при z^{-l} в $\tau(t - [z^{-1}])$ для $l = 0, \dots, n$ определяется из

$$(-1)^l \begin{vmatrix} -\sum_{j=1}^m p_{j-1} C_{j1} & \cdots & -\sum_{j=1}^m p_{j-1} C_{jn} \\ D_{11} - \sum_{j=1}^m p_j C_{j1} & \cdots & D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_j C_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (l+1)\text{-я строка пропущена} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,1} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{j1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,n} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{jn} \end{vmatrix}. \quad (5.10)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно применить леммы 2 и 3 к уравнению (5.1).

Для того чтобы доказать соотношение (5.6), необходимо вычислить $W_l^0(t) = e^1 W(t) e_l$, где $W(t)$ определяется выражением (4.13), а e^i и e_l — соответственно векторы i -й строки и l -го столбца стандартного базиса. Имеем

$$W_l^0 = e^1 W e_l = e^1 \sum_{i=0}^{m-1} C U^{-1} e_l = \tau^{-1} [1, p_1, \dots, p_{m-1}] C \begin{bmatrix} U_{1l}^\dagger \\ \vdots \\ U_{nl}^\dagger \end{bmatrix}, \quad (5.11)$$

где $U^\dagger = \det(U) U^{-1}$ — матрица алгебраических дополнений. Тогда

$$\tau W_l^0 = \sum_{i=1}^m p_{i-1} \sum_{k=1}^n C_{ik} (-1)^{k+l} \times \begin{vmatrix} D_{11} - \sum_{j=1}^m p_j C_{j1} & \cdots & D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_j C_{jn} \\ D_{21} + p_1 D_{11} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{j1} & \cdots & D_{2n} + p_1 D_{1n} - \sum_{j=1}^m p_{j+1} C_{jn} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ l\text{-я строка и } k\text{-й столбец пропущены} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,1} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{j1} & \cdots & \sum_{j=0}^{n-1} p_j D_{n-j,n} - \sum_{j=1}^m p_{j+n-1} C_{jn} \end{vmatrix}, \quad (5.12)$$

что согласуется с (5.10). Следовательно, необходимо показать, что поскольку $\tau(t)$ получена с помощью уравнения (5.1), то $W^{(0)}$ может быть найдена с использованием соотношения (5.6). Тогда все строки матрицы $W(t)$ можно вычислить рекуррентным способом, если записать первый поток системы Сато, который имеет вид

$$\frac{\partial W^{(j)}}{\partial t_1} + z W^{(j)} = W^{(j+1)} + W_1^j W^{(0)}, \quad (5.13)$$

что позволяет получить $W^{(j+1)}$ из предыдущей строки $W^{(l)}$. Заметим, однако, что соответствующее решение уравнений КП (2.3) определяется просто как (см. (2.10))

$$h(x; t) = z + \frac{\partial}{\partial t_1} \ln W^{(0)}(x + t_1, t_2, \dots). \quad (5.14)$$

6. ПРИМЕР

Получим в явном виде решение системы Сато (2.8), соответствующее начальным условиям

$$W_2^0(t_0) = W_2^2(t_0) = -2, \quad W_i^j(t_0) = 0 \quad \text{для других } i, j, \quad (6.1)$$

где $t_0 = (0, 1, 0, \dots)$. Нам уже известно, что допустимо рассматривать ограничение системы Сато на $\mathbb{W}_{3,2}$ и что в рассмотрение включены только времена $(t_1, \dots, t_4)$. Более точно, нам необходимо решить уравнения (4.6) при $m = 3, n = 2$ с начальным условием

$$W(t_0) = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

Нам также известно, что общее решение системы (4.6) имеет вид $W(t) = V(t)U(t)^{-1}$, где (см. (4.12) и (5.6))

$$V(t) = \begin{bmatrix} 1 & p_1 & p_2 \\ 0 & 1 & p_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} C, \quad U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_1 & 1 \end{bmatrix} D - \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ p_2 & p_3 & p_4 \end{bmatrix} C, \quad (6.3)$$

здесь C и D — соответственно постоянные (3×2) - и (2×2) -матрицы. Эти матрицы определяются из начальных значений U и V , которые мы можем выбрать в виде $V(t_0) = W(t_0)$, $U(t_0) = I$. Это значит, что

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

и, следовательно,

$$V(t) = \begin{bmatrix} 0 & -2p_2 \\ 0 & -2p_1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad U(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2p_3 \\ p_1 & 2p_4 \end{bmatrix}, \quad (6.5)$$

откуда

$$W(t) = \frac{2}{\tau} \begin{bmatrix} p_1 p_2 & -p_2 \\ p_1^2 & -p_1 \\ p_1 & -1 \end{bmatrix}, \quad (6.6)$$

где $\tau = \det U = 2(p_4 - p_1 p_3) = 2t_4 + t_2^2 - t_1^2 t_2 - (1/4)t_1^4$. Следовательно, мы имеем

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= 1 + 2\tau^{-1}(p_1 p_2 z^{-1} - p_2 z^{-2}), \\ W^{(1)} &= z + 2\tau^{-1}(p_1^2 z^{-1} - p_1 z^{-2}), \\ W^{(2)} &= z^2 + 2\tau^{-1}(p_1 z^{-1} - z^{-2}), \end{aligned} \quad (6.7)$$

и, очевидно, $W^{(k)} = z^k$ для всех $k \geq 3$. Эквивалентно можно начать с τ -функции и вычислить

$$\begin{aligned} W^{(0)} &= \frac{\tau(t - [z^{-1}])}{\tau(t)}, \\ W^{(1)} &= \frac{\partial W^{(0)}}{\partial t_1} + zW^{(0)} - W_1^0 W^{(0)}, \\ W^{(2)} &= \frac{\partial W^{(1)}}{\partial t_1} + zW^{(1)} - W_1^1 W^{(0)}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

В любом случае соответствующее решение КП-иерархии дается выражением (5.14).

Благодарности. Мы хотели бы выразить благодарность Паоло Касати за полезные обсуждения и замечания, а также рецензенту за ряд полезных замечаний.

Во время работы над данной статьей Г.Ф., Ф.М. и М.П. пользовались поддержкой Italian M.U.R.S.T. и Итальянского национального исследовательского совета (CNR) через GNFM. Х.П.С. был поддержан Бразильским национальным исследовательским советом (CNPq) (грант MA 521329/94-9).

Список литературы

- [1] *M. J. Ablowitz, J. Satsuma.* J. Math. Phys. 1978. V. 19. P. 2180–2186.
- [2] *H. Airault, H. P. McKean, J. Moser.* Commun. Pure Appl. Math. 1977. V. 30. P. 95–148.
- [3] *F. Calogero.* Nuovo Cimento B. 1978. V. 43. P. 177–241.
- [4] *D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky.* Nuovo Cimento B. 1977. V. 40. P. 339–353.
- [5] *И. М. Кривчевер.* Функци. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 1. С. 76–78.
- [6] *M. D. Kruskal.* The Korteweg–de Vries equation and related evolution equations. In: Nonlinear Wave Motion. Lect. Appl. Math. V. 15. Ed. A. C. Newell. Providence: AMS, 1974. P. 61–83.
- [7] *V. B. Matveev.* Lett. Math. Phys. 1979. V. 3. P. 503–512.
- [8] *T. Shiota.* J. Math. Phys. 1994. V. 35. P. 5844–5849.
- [9] *G. Wilson.* Invent. Math. 1998. V. 133. P. 1–41.
- [10] *M. Sato, Y. Sato.* Soliton equations as dynamical systems on infinite-dimensional Grassmann manifold. In: Nonlinear PDEs in Applied Sciences (US–Japan Seminar, Tokyo). Eds. P. Lax, H. Fujita. Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1982. P. 259–271.
- [11] *Y. Ohta, J. Satsuma, D. Takahashi, T. Tokihiro.* Progr. Theor. Phys. Suppl. 1988. V. 94. P. 210–241.
- [12] *J. P. Zubelli.* Lett. Math. Phys. 1992. V. 24. P. 41–48.
- [13] *G. Wilson.* J. Reine Angew. Math. 1993. V. 442. P. 177–204.
- [14] The Bispectral Problem (Montreal, PQ, 1997). Eds. J. Harnad, A. Kasman. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1998.
- [15] *G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* Commun. Math. Phys. 1998. V. 197. P. 303–324.
- [16] *K. Takasaki.* Rev. Math. Phys. 1989. V. 1. P. 1–46.
- [17] *И. В. Чередник.* Функци. анализ и его прилож. 1978. Т. 12. № 3. С. 45–54.
- [18] *G. Wilson.* Quart. J. Math. Oxford. 1981. V. 32. P. 491–512.
- [19] *E. Date, M. Jimbo, M. Kashiwara, T. Miwa.* Transformation groups for soliton equations. In: Proceed. of R.I.M.S. Symp. on Nonlinear Integrable Systems – Classical Theory and Quantum Theory. Eds. M. Jimbo, T. Miwa. Singapore: World Scientific, 1983. P. 39–119.
- [20] *L. A. Dickey.* Soliton equations and Hamiltonian systems. Adv. Series in Math. Phys. V. 12. Singapore: World Scientific, 1991.
- [21] *P. Casati, G. Falqui, F. Magri, M. Pedroni.* J. Math. Phys. 1997. V. 38. P. 4606–4628.

- [22] *M. F. de Groot, T. J. Hollowood, J. L. Miramontes.* Commun. Math. Phys. 1992. V. 145. P. 57–84.
- [23] *Г. Фальки, Ф. Магри, Г. Тондо.* ТМФ. 2000. Т. 122. № 2.
- [24] *K. Takasaki.* Integrable systems as deformations of $\mathcal{D}$ -modules. In: Theta Functions – Bowdoin 1987. Eds. L. Ehrenpreis, R.C. Gunning; Proc. Symp. Pure Math. 1989. V. 49. Part 1. P. 143–168.
- [25] *M. Mulase.* Algebraic theory of the KP equations. In: Perspectives in Mathematical Physics. Eds. R. Penner, S-T. Yau. Boston: International Press, 1994. P. 151–217.
- [26] *F. Magri, M. Pedroni, J. P. Zubelli.* Commun. Math. Phys. 1997. V. 188. P. 305–325.
- [27] *W. T. Reid.* Riccati Differential Equations. New York: Academic Press, 1972.
- [28] *V. G. Kac.* Infinite Dimensional Lie Algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990.