Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. А. Бойкова, С. В. Клещевская, Ю. Н. Тюхтяев,
Р. Н. Фаустов, К вопросу о влиянии движения ядра
на тонкую структуру водородоподобного атома с раз-
личными массами частиц, *ТМФ*, 2006, том 149, но-
мер 3, 325–338

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5520>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 09:03:12

© 2006 г.

Н. А. Бойкова*, С. В. Клещевская*,
Ю. Н. Тюхтяев*, Р. Н. Фаустов†

К ВОПРОСУ О ВЛИЯНИИ ДВИЖЕНИЯ ЯДРА НА ТОНКУЮ СТРУКТУРУ ВОДОРОДОПОДОБНОГО АТОМА С РАЗЛИЧНЫМИ МАССАМИ ЧАСТИЦ

С помощью модифицированной квазипотенциальной теории возмущений исследована величина тонкого сдвига S -уровней энергии водородоподобных атомов от двухфотонных кулоновских взаимодействий и ее зависимость от параметра отношения масс частиц.

Ключевые слова: релятивистская квантовая теория, связанные состояния, водородоподобный атом, тонкий сдвиг S -уровней энергии, эффекты отдачи, поправки отдачи.

Квазипотенциальный подход в теории поля был предложен в работе Логунова и Тавхелидзе [1]. С тех пор с его помощью изучено и решено значительное число проблем релятивистской квантовой теории двух тел. Кроме того, метод квазипотенциала стимулировал разработку сходных по основным чертам уравнений в теории квантованных полей. В настоящей статье метод квазипотенциала применяется к исследованию новых форм зависимости величины тонкого сдвига от параметра отношения масс частиц.

Водородоподобные атомы являются идеальным объектом для прецизионных теоретических и экспериментальных исследований связанных состояний системы двух частиц. В настоящее время благодаря использованию методов двухфотонной лазерной спектроскопии интервал $2S_{1/2} - 1S_{1/2}$ в атоме водорода [2] известен с точностью до 10 Гц:

$$\nu_{1S-2S}^L = 2\,466\,061\,413\,187\,103(46) \text{ Гц} \quad (1)$$

Это позволяет, в частности, с рекордной точностью определить значение такой фундаментальной величины, как постоянная Ридберга.

Заметим, что при обосновании рекомендуемого CODATA значения этой универсальной мировой константы [3] учитывались в том числе и наши теоретические разработки [4].

*Саратовский государственный университет, Саратов, Россия. E-mail: theorphys@sgu.ru, klechshevskaya@mail.ru

†Вычислительный центр им. А. А. Дородницына РАН, Москва, Россия.
E-mail: faustov@theory.sinp.msu.ru

Определение путем сравнения данных теории и эксперимента более точных значений таких мировых констант, как постоянная тонкой структуры, – совершенно необходимый элемент для развития физики элементарных частиц в целом.

Прогресс, достигнутый в последних экспериментальных работах, стимулирует развитие теоретических методов по прецизионному определению поправок к известным значениям величины сдвигов уровней энергии.

Результаты исследований двухфотонных кулоновских взаимодействий приведены в таблице VIII обзора [5]. Величина тонкого сдвига от кулон-кулоновского термина с точностью до пятого порядка по константе тонкой структуры вычислена в работе 1954 г. [6]. Вклады, пропорциональные шестому порядку по константе тонкой структуры, рассчитывались сравнительно недавно [7], [8]. Для исследований с подобной точностью в настоящей работе вносятся необходимые коррективы в общепринятую квазипотенциальную теорию возмущений.

В работе Фултона и Мартина [6] вклад от обменов кулоновскими фотонами в тонкий сдвиг S -уровней энергии водородоподобных атомов дается интегралами (3.6) и (3.9), которые вычисляются без приближений и имеют указанные значения:

$$\begin{aligned} \Phi\text{М}(3.6) = \Delta E_{Ca} &= \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{2\pi} \int \frac{d^3k}{k^4} \frac{1}{\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}} \left[\frac{(\varepsilon_{1k} + m_1)(\varepsilon_{2k} - m_2)}{(\varepsilon_{1k} - \varepsilon_{2k}) - (m_1 + m_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2k} + m_2)}{(\varepsilon_{2k} - \varepsilon_{1k}) - (m_1 + m_2)} - \frac{2(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2k} - m_2)}{\varepsilon_{1k} + \varepsilon_{2k} + m_1 + m_2} \right] = \\ &= -\frac{2}{3} \alpha^2 |\varphi_C(0)|^2 \left(\frac{2}{m_1^2} + \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \Phi\text{М}(3.9) = \Delta E_{Cb} &= \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{2\pi} \int \frac{d^3k}{k^4} \frac{1}{\varepsilon_{1k}\varepsilon_{2k}} \left[\frac{(\varepsilon_{1k} + m_1)(\varepsilon_{2k} - m_2)}{(\varepsilon_{1k} - m_1) + (\varepsilon_{2k} + m_2)} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2k} + m_2)}{(\varepsilon_{1k} + m_1) + (\varepsilon_{2k} - m_2)} \right] = \frac{2}{3} \alpha^2 |\varphi_C(0)|^2 \left(\frac{2}{m_1^2} - \frac{1}{m_1 m_2} + \frac{2}{m_2^2} \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\varepsilon_{ik} = \sqrt{k^2 + m_i^2}$, $i = 1, 2$, $|\varphi_C(0)|^2 = \alpha^3 \mu^3 / \pi$, α – постоянная тонкой структуры, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – приведенная масса, m_1, m_2 – массы легкой и тяжелой частиц, соответственно. Индекс a соответствует приводимым кулоновским диаграммам, индекс b – перекрестному обмену двумя кулоновскими фотонами.

В работе [9] те же результаты получаются с чрезвычайной простотой. Однако отдельные пункты этого исследования требуют дополнительных уточнений. Так, например, непосредственно видно, что интеграл (13) из работы [9] на самом деле расходится, но при этом не указано, как устраняется расходимость. В предложенной теории возмущений недостаточно полно учтена кинематическая часть квазипотенциала. Кроме того, различные фрагменты исследования зависят от параметра обрезания в низкочастотной области.

Это не влияет на точность вычислений, если используется δ -приближение кулоновской волновой функции φ_C . Но для прецизионных исследований следует учесть зависимость квазипотенциала от импульсов $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ и энергии связи E :

$$V = V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E). \quad (4)$$

Сделав это, мы получим возможность находить поправки более высокого порядка к результатам работ [6]–[9].

Представляется целесообразным максимально сблизить различные методы исследований, использованные в работах [6] и [9].

Совпадение аналитических результатов двух различных методов исследования задачи о влиянии эффектов отдачи на тонкий сдвиг S -уровней энергии в водородоподобных атомах будет свидетельствовать о корректности теории возмущений, использованной для построения квазипотенциала.

Заметим, что в работе [10] поправка к тонкому сдвигу от обмена кулоновским фотоном исследована с большой точностью, и это обстоятельство, по-видимому, должно сказаться на теории возмущений, используемой при рассмотрении двухфотонных диаграмм.

В связи с этим обратимся к результату расчета амплитуды, отвечающей обмену двумя кулоновскими фотонами, изложенному в статье [9]. Выпишем интеграл

$$\begin{aligned} T_{CC}^{>}(0,0) &= i \frac{(Z\alpha)^2}{\pi^2} \int \frac{d^3k}{k^4} \int \frac{dk_0}{(m_1+k_0)^2 - k^2 - m_1^2} \left\{ \frac{4m_1m_2 + 2(m_2 - m_1)k_0 - k_0^2}{(m_2 - k_0)^2 - k^2 - m_2^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{4m_1m_2 + 2(m_1 + m_2)k_0 + k_0^2}{(m_2 + k_0)^2 - k^2 - m_2^2} \right\} \cong \\ &\cong -\frac{16\mu(Z\alpha)^2}{3\lambda^3} + \frac{4(Z\alpha)^2}{\lambda(m_1 + m_2)} - \frac{4(Z\alpha)^2}{3m_1m_2}, \end{aligned} \quad (5)$$

где Z – заряд ядра, λ – нефизический параметр обрезания, который компенсируется в сумме диаграмм, а индекс $>$ показывает, что выражение для амплитуды взаимодействия рассматривается в высокочастотной области.

Сравнение результатов (2), (3) и (5) показывает, что в последнем случае вводится искусственное обрезание интегралов в низкочастотной области. Если задаться целью увеличить точность расчетов величины тонкого сдвига, то при дальнейшем исследовании влияния движения ядра на тонкую структуру методом квазипотенциала нужно отказаться от введения дополнительного параметра, тем более что можно показать: упомянутые выше выражения (2) и (3) естественным образом получаются при решении с помощью теории возмущений квазипотенциального уравнения

$$F^{-1}(E)\Psi_E(\mathbf{q}) = V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)\Psi_E(\mathbf{q}), \quad (6)$$

где $F^{-1}(E) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})(E - \varepsilon_{1p} - \varepsilon_{2p})$, $V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$ – квазипотенциал, выраженный в терминах диаграммной техники Фейнмана, $\Psi_E(\mathbf{q})$ – волновая функция.

Представим $F^{-1}(E)$ в виде

$$F^{-1}(E) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) [E - E_C + E_C - (m_1 + m_2) - (\varepsilon_{1p} - m_1) - (\varepsilon_{2p} - m_2)]. \quad (7)$$

Распишем уравнение (6) с точностью до второго порядка теории возмущений:

$$\left(\Delta E_C + W_C - \frac{p^2}{2\mu} + v_C + V_{\text{kin}} + \Delta V_{1\gamma} + V_{2\gamma} \right) \varphi_C = 0, \quad (8)$$

Рис. 1

Рис. 2

где $\Delta V_{1\gamma} = V_{1\gamma} - v_C = (K_C)_+ - v_C + (K_T)_+$,

$$V_{\text{kin}} = -(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \frac{p^4}{2} \left(\frac{1}{m_1 M_{1p}^2} + \frac{1}{m_2 M_{2p}^2} \right), \quad M_{ip} = \varepsilon_{ip} + m_i,$$

$v_C(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -4\pi\alpha/(\mathbf{p} - \mathbf{q})^2$ – кулоновский потенциал, $W_C = E_C - (m_1 + m_2)$ – энергия связи системы, $\Delta E_C = E - E_C$.

Операция $(\dots)_+ = u_1^* u_2^* \gamma_{10} \gamma_{20} (\dots) u_1 u_2$ означает проектирование на состояния с положительными энергиями,

$$u_i(\mathbf{p}) = N_{ip} \begin{pmatrix} w \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \mathbf{p}}{\varepsilon_{ip} + m_i} w \end{pmatrix}, \quad N_{ip} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{ip} + m_i}{2\varepsilon_{ip}}}, \quad (9)$$

– дираковский биспинор, записанный в двухкомпонентной форме, w – обычный спинор, удовлетворяющий условию нормировки $w^* w = 1$, $\boldsymbol{\sigma}$ – вектор, компонентами которого являются матрицы Паули, $K_C = v_C \gamma_{10} \gamma_{20}$,

$$K_T = -\frac{4\pi\alpha}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i0} \left(\gamma_1 \gamma_2 - \frac{(\gamma_1 \mathbf{k})(\gamma_2 \mathbf{k})}{\mathbf{k}^2} \right), \quad (10)$$

γ_{i0} , γ_i – матрицы Дирака, $i = 1, 2$, ядра $(K_C)_+$ и $(K_T)_+$ описывают обмен одним кулоновским и одним поперечным фотонами, соответственно.

Квазипотенциал $\Delta V_{1\gamma}$, отвечающий однофотонному обмену в случае кулоновской калибровки, изображен на рис. 1, а квазипотенциал $V_{2\gamma} = T_{CC} - V_{1\gamma} F V_{1\gamma}$, отвечающий двухфотонным кулоновским обменам, – на рис. 2.

Определяя сдвиг ΔE_C из уравнения (8) по теории возмущений, находим

$$\Delta E_C = \langle \varphi_C | V_{\text{kin}} + \Delta V_{1\gamma} + V_{2\gamma} + (V_{\text{kin}} + \Delta V_{1\gamma}) F (V_{\text{kin}} + \Delta V_{1\gamma}) | \varphi_C \rangle. \quad (11)$$

При рассмотрении двухфотонных процессов ограничимся только обменами двумя кулоновскими фотонами, тогда

$$\begin{aligned} \Delta E_C = & \langle \varphi_C | V_{\text{kin}} + (K_C)_+ - v_C + (K_T)_+ + (V_{\text{kin}} - v_C) F ((K_C)_+ - v_C) + \\ & + ((K_C)_+ - v_C) F (V_{\text{kin}} - v_C) + V_{\text{kin}} F V_{\text{kin}} + (K_C \overline{G_0} K_C)_+ - v_C F v_C + (K_{CC})_+ | \varphi_C \rangle, \end{aligned} \quad (12)$$

где $\overline{G}_0 = (\Lambda_1^+(\mathbf{k})\Lambda_2^+(-\mathbf{k})F - \Lambda_1^-(\mathbf{k})\Lambda_2^-(-\mathbf{k})F')\gamma_{10}\gamma_{20}$, $F' = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{q})(E + \varepsilon_{1p} + \varepsilon_{2p})^{-1}$.

Проекционные операторы выражаются через прямое произведение решений уравнения Дирака для i -й свободной частицы и равны

$$\Lambda_i^\pm(\mathbf{p}) = \frac{1}{2\varepsilon_{ip}} \begin{pmatrix} \varepsilon_{ip} \pm m_i & \pm \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{p} \\ \pm \boldsymbol{\sigma}_i \mathbf{p} & \varepsilon_{ip} \mp m_i \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2.$$

Оператор $(K_{CC})_+$ отвечает перекрестному обмену двумя кулоновскими фотонами и соответствует второму слагаемому в выражении (5). Это слагаемое, записанное с помощью проекционных операторов, при использовании ранее указанных приближений дает

$$\langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (K_{CC})_+ | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = \Phi \text{М} (3.9). \quad (13)$$

Комбинируя члены выражения (12) $(K_C \overline{G}_0 K_C)_+ - v_C F v_C$ и используя свойство полноты решений уравнения Дирака $\Lambda_i^+ + \Lambda_i^- = I$, после применения δ -приближения кулоновских волновых функций

$$\varphi_C(\mathbf{p}) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}) \varphi_C(0) \quad (14)$$

и несложных преобразований находим

$$\begin{aligned} & \langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (K_C \overline{G}_0 K_C)_+ - v_C F v_C | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = \\ & = \Phi \text{М} (3.6) + \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{\pi(m_1 + m_2)} \int \frac{d^3 k}{k^4} \left(\left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) + \right. \\ & \quad \left. + k^2 \left(\frac{1}{M_{1k} M_{2k}} - \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{M_{2k}^2} - \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{M_{1k}^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (15)$$

(напомним, что $\Phi \text{М} (3.6)$ – выражение (3.6) работы [6], см. формулу (2)).

Из выражения (15) видно, что первое слагаемое подынтегрального выражения имеет расходимость при $k = 0$.

Приведем результаты вычислений четвертого и второго слагаемых подынтегрального выражения (15):

$$i_{1/\beta} = \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{\pi(m_1 + m_2)} \frac{m_2}{m_1} \int \frac{d^3 k}{k^2} \frac{1}{M_{1k}^2} \approx \frac{1}{\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{1}{\beta}, \quad (16)$$

$$i_{\text{st}} = \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{\pi(m_1 + m_2)} \int \frac{d^3 k}{k^2} \frac{1}{M_{1k} M_{2k}} \approx \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} m_1 \int_0^\infty \frac{dk}{\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k}} \approx \frac{2}{\pi} \frac{\alpha^5 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \ln \beta^{-1}, \quad (17)$$

где $\beta = m_1/m_2$ – параметр отношения масс частиц.

Вклад (16) не имеет смысла, поскольку превосходит α^4 ; вклад (17) содержит $\ln \beta^{-1}$. Ни в работе [6], ни в работе [9] таких поправок к сдвигу нет.

Таким образом, трудности возникают только в интерпретации выражения (15). С целью их устранения рассмотрим поправки, непосредственно связанные с кинематической частью квазипотенциала:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_C(\mathbf{p}) | V_{\text{kin}} + V_{\text{kin}} F V_{\text{kin}} | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = & -\frac{5}{8} \alpha^4 \mu \left(1 - \frac{3\mu}{m_1 + m_2} \right) - \frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{\pi(m_1 + m_2)} \int \frac{d^3 k}{k^2} \times \\ & \times \left(\frac{1}{M_{1k} M_{2k}} - \frac{m_1}{m_2} \frac{1}{M_{2k}^2} - \frac{m_2}{m_1} \frac{1}{M_{1k}^2} \right). \end{aligned} \quad (18)$$

Легко видеть, что подынтегральные выражения в формулах (15) и (18) взаимно уничтожаются.

Остается обсудить указанную выше особенность интеграла при $k = 0$. Прецизионный расчет одного из слагаемых в выражении (12) дает следующий результат:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (V_{\text{kin}} - v_C) F ((K_C)_+ - v_C) + ((K_C)_+ - v_C) F (V_{\text{kin}} - v_C) | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = \\ = -\frac{\alpha^2 |\varphi_C(0)|^2}{\pi(m_1 + m_2)} \left(\frac{m_1}{m_2} + \frac{m_2}{m_1} \right) \int \frac{d^3 k}{k^4} + \\ + \frac{\alpha^2 \mu |\varphi_C(0)|^2}{\pi} \int \frac{d^3 k}{k^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1k} M_{1k}} \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1 M_{1k}} - \frac{1}{\varepsilon_{1k} M_{1k} (1 + N_{1k})^2} \right] + \right. \\ + \frac{1}{\varepsilon_{2k} M_{2k}} \left[\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_2 M_{2k}} - \frac{1}{\varepsilon_{2k} M_{2k} (1 + N_{2k})^2} \right] + \\ \left. + \frac{2}{\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k} M_{1k} M_{2k} (1 + N_{1k}) (1 + N_{2k})} \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Анализируя вклады, содержащие расходимость при $k = 0$, в выражениях (15) и (19), мы можем легко заметить, что они имеют противоположные знаки и поэтому компенсируют друг друга при подстановке в формулу (12).

Обобщая результаты работы [10], обнаруживаем, что поправки к тонкому сдвигу порядка α^5 от обмена одним кулоновским фотоном

$$\begin{aligned} \langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (K_C)_+ - v_C | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = & \frac{\alpha^4 \mu}{2} \left(1 - \frac{2\mu}{m_1 + m_2} \right) - \\ - \frac{\alpha^2 \mu |\varphi_C(0)|^2}{\pi} \int \frac{d^3 k}{k^2} \left\{ \frac{1}{\varepsilon_{1k} M_{1k}} \left[\frac{1}{m_1^2} + \frac{1}{m_1 M_{1k}} - \frac{1}{\varepsilon_{1k} M_{1k} (1 + N_{1k})^2} \right] + \right. \\ + \frac{1}{\varepsilon_{2k} M_{2k}} \left[\frac{1}{m_2^2} + \frac{1}{m_2 M_{2k}} - \frac{1}{\varepsilon_{2k} M_{2k} (1 + N_{2k})^2} \right] + \\ \left. + \frac{2}{\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k} M_{1k} M_{2k} (1 + N_{1k}) (1 + N_{2k})} \right\} + o(\alpha^6) \end{aligned} \quad (20)$$

взаимно уничтожаются с оставшимися слагаемыми из (19).

Расчет диаграммы обмена одним поперечным фотоном приводит к выражению

$$\langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (K_T)_+ | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle = -\frac{\alpha^4 \mu^2}{m_1 + m_2} + o(\alpha^6). \quad (21)$$

Рис. 3

Подставляя в выражение (12) результаты (13), (15), (18)–(21), получим

$$\begin{aligned} \Delta E_C &= \Phi\text{М}(3.6) + \Phi\text{М}(3.9) - \frac{\alpha^4 \mu}{8} \left(1 + \frac{\mu}{m_1 + m_2} \right) + o(\alpha^6) = \\ &= -\frac{\alpha^4 \mu}{8} \left(1 + \frac{\mu}{m_1 + m_2} \right) - \frac{4\alpha^2}{3m_1 m_2} |\varphi_C(0)|^2 + o(\alpha^6). \end{aligned} \quad (22)$$

Таким образом, уже на этапе вычисления величины сдвига с точностью до α^5 требуется включение зависимости квазипотенциала от импульса и энергии связи.

В данной работе, в отличие от статьи [9], квазипотенциал строится через элементы амплитуды $T(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E)$.

В этом случае амплитуда $T(0, 0; m_1 + m_2)$ может рассматриваться как основной член ряда теории возмущений.

Тогда величина тонкого сдвига задается выражением

$$\Delta E = \int d^3 p d^3 q \varphi_C^*(\mathbf{p}) V(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) \varphi_C(\mathbf{q}). \quad (23)$$

Результат интегрирования (23) зависит от параметров α , $Z\alpha$, β , поэтому члены ряда теории возмущений по степеням константы тонкой структуры представляют собой еще и определенные функции параметра отношения масс частиц.

Из работы [6] следует, что поправки к тонкому сдвигу могут содержать целочисленные степени или логарифмы от параметра отношения масс частиц β . Однако нами обнаружен другой вид таких поправок.

Рассмотрим фейнмановскую диаграмму с перекрестными фотонными линиями, изображенную на рис. 3. Квазипотенциал, определяющий соответствующую величину тонкого сдвига, записывается в виде

$$V_{\text{cr}} = (K_{\text{CC}})_+. \quad (24)$$

В выражении

$$\Delta E_{\text{cr}} = \langle \varphi_C(\mathbf{p}) | (K_{\text{CC}})_+(\mathbf{p}, \mathbf{q}; E) | \varphi_C(\mathbf{q}) \rangle \quad (25)$$

проведем интегрирование по нулевым компонентам импульсов, воспользовавшись явным видом ядра

$$K_{CC}(k, k'; E) = \frac{i\alpha^2}{\pi^2} \int d^4s \gamma_{1\rho} S_1(\eta_1 E + k_0 + s_0, \mathbf{s}) \gamma_{1m} \gamma_{2n} \times \\ \times S_2(\eta_2 E + s_0 - k'_0, \mathbf{s} - \mathbf{k} - \mathbf{k}') \gamma_{2\theta} D^{\rho\theta}(s_0, \mathbf{s} - \mathbf{k}) D^{mn}(s_0 + k_0 - k'_0, \mathbf{s} - \mathbf{k}'), \quad (26)$$

где S_r – одноэлектронная функция Грина, $r = 1, 2$, $\rho, \theta, m, n = 0, 1, 2, 3$,

$$\eta_1 = \frac{E^2 + m_1^2 - m_2^2}{2E^2}, \quad \eta_2 = \frac{E^2 + m_2^2 - m_1^2}{2E^2}, \\ D^{\rho\theta}(k_0, \mathbf{k}) = \begin{cases} D^{00} = -\frac{1}{\mathbf{k}^2}, \\ D^{l0} = D^{0j} = 0, \\ D^{lj} = -\frac{1}{k_0^2 - \mathbf{k}^2 + i0} (\delta^{lj} - \frac{\mathbf{k}^l \mathbf{k}^j}{\mathbf{k}^2}), \end{cases} \quad l, j = 1, 2, 3.$$

Тогда лидирующий вклад от обмена двумя перекрестными кулоновскими фотонами после интегрирования по трехимпульсу $\mathbf{p}$ принимает вид

$$\Delta E_{cr} \approx -\frac{\alpha^6 \mu^4}{2\pi^4} \int \frac{d^3q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3k}{(k^2 + \alpha^2 \mu^2) \varepsilon_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \times \\ \times \left\{ -\frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2kq} + m_2)}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2} - \frac{(\varepsilon_{1k} + m_1)(\varepsilon_{2kq} - m_2)}{\varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2kq} + E_2} - \right. \\ - \frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2kq} - \varepsilon_{2k})}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{2k} + m_2}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2k} - E_2} \right) - \\ - \frac{(\varepsilon_{1k} + m_1)(\varepsilon_{2kq} - \varepsilon_{2k})}{\varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2kq} + E_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{2k} - m_2}{\varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2k} + E_2} \right) + \\ + \frac{2}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2} \left[(\mathbf{kq}) \left(\frac{\varepsilon_{1k} - m_1}{M_{2q}} + \frac{\varepsilon_{2kq} + m_2}{M_{1q}} \right) - \right. \\ - \frac{k^2 q^2}{M_{1k} M_{2q}} + \frac{(\mathbf{kq})(q^2 - (\mathbf{kq}))}{M_{1q} M_{2q}} \Big] + \\ + \frac{2}{\varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2kq} + E_2} \left[-(\mathbf{kq}) \left(\frac{M_{1k}}{M_{2q}} + \frac{\varepsilon_{2kq} - m_2}{M_{1q}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{M_{1k} q^2}{M_{2q}} + \frac{(\mathbf{kq})(q^2 - (\mathbf{kq}))}{M_{1q} M_{2q}} \right] \Big\}, \quad (27)$$

где $\varepsilon_{2kq} = \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{q})^2 + m_2^2}$.

Первые два слагаемых выражения (27) содержат вклад, пропорциональный α^5 , который совпадает с результатом, выписанным в работе [6]. Этот вклад легко получить, используя δ -приближение кулоновских волновых функций. Однако при вычислениях с использованием точных значений кулоновской волновой функции возникают вклады и более высокого порядка по константе тонкой структуры.

Первое и третье слагаемые в фигурных скобках выражения (27) из-за одновременной малости величин $\varepsilon_{2kq} - m_2$ и $\varepsilon_{1k} + m_1$ при малых значениях k, q представляют особый интерес.

Несложные алгебраические преобразования приводят к равенствам

$$\begin{aligned} & \frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2kq} - \varepsilon_{2k})}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_{2k} + m_2}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2k} - E_2} \right) = \\ & = \frac{2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} \frac{\varepsilon_{1k} + m_1 - \varepsilon_{2kq} - m_2}{\varepsilon_{1k} + m_1 + \varepsilon_{2k} - m_2} \frac{q^2 - 2\mathbf{kq}}{q^2 - 2\mathbf{kq} + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon_{2kq} + m_2}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2} = \frac{\varepsilon_{2k} + m_2}{\varepsilon_{1k} + m_1 + \varepsilon_{2k} - m_2} + \\ & + \frac{2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} \frac{\varepsilon_{1k} + m_1 - \varepsilon_{2kq} - m_2}{\varepsilon_{1k} + m_1 + \varepsilon_{2k} - m_2} \frac{q^2 - 2\mathbf{kq}}{q^2 - 2\mathbf{kq} + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}. \end{aligned} \quad (29)$$

Условимся исследовать зависимость членов ряда теории возмущений от параметра β с точностью до величин, пропорциональных $\alpha^6 \mu^3 \beta^2 / (m_1 m_2)$. Тогда при подстановке первого слагаемого из правой части равенства (29) в выражение (27) получаем интеграл

$$\begin{aligned} i_1 = & \frac{\alpha^6 \mu^4}{2\pi^4} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 k}{(k^2 + \alpha^2 \mu^2) \varepsilon_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \times \\ & \times \left\{ \frac{(\varepsilon_{1k} - m_1)(\varepsilon_{2k} + m_2)}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2k} - E_2} + \frac{(\varepsilon_{1k} + m_1)(\varepsilon_{2k} - m_2)}{\varepsilon_{1k} - E_1 + \varepsilon_{2k} + E_2} \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

С оговоренной точностью

$$\begin{aligned} i_1 = & \Phi\text{М}(3.9) + \frac{8}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^4}{E_1 - E_2} \int_0^\infty \frac{dk}{\varepsilon_{1k}(\varepsilon_{1k} + m_1)^2} \left[2(m_1 - m_2) + \frac{k^2}{\varepsilon_{1k} + m_1} \right] \times \\ & \times \left(\frac{2}{k} \ln \frac{2\varepsilon_{2k}}{\varepsilon_{2k} + m_2} + \frac{k}{\varepsilon_{2k}^2} \ln \frac{\varepsilon_{2k} + m_2}{2m_2} - \frac{1}{\varepsilon_{2k}} + \frac{1}{k} \ln \frac{\varepsilon_{2k} + k}{m_2} + \frac{k}{\varepsilon_{2k}^2} \ln \frac{\varepsilon_{2k} + k}{m_2} \right) \approx \\ & \approx \Phi\text{М}(3.9) + \frac{4}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{1}{1 + \beta} \left(\beta + \frac{13}{3} \beta^2 \ln \beta^{-1} \right). \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение (28) и второе слагаемое из правой части равенства (29) после подстановки их в формулу (27) приводят к интегралу

$$\begin{aligned} i_{\text{leader}} = & \frac{\alpha^6 \mu^4}{\pi^4} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} \times \\ & \times \frac{\varepsilon_{1k} + m_1 - \varepsilon_{2kq} - m_2}{\varepsilon_{1k} + m_1 + \varepsilon_{2k} - m_2} \frac{q^2 - 2\mathbf{kq}}{q^2 - 2\mathbf{kq} + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}. \end{aligned} \quad (32)$$

Учитывая равенство

$$\begin{aligned} & \frac{2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} \frac{\varepsilon_{1k} + m_1 - \varepsilon_{2kq} - m_2}{\varepsilon_{1k} + m_1 + \varepsilon_{2k} - m_2} = (2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1) \times \\ & \times \left(\frac{1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} + \frac{1}{2(m_2 - m_1)} - \frac{k^2}{2(m_2 - m_1) M_{1k} M_{2k}} - \frac{m_2}{m_2 - m_1} \frac{1}{M_{1k}} \right), \end{aligned} \quad (33)$$

получаем

$$\begin{aligned}
 i_{\text{leader}} = & \frac{\alpha^6 \mu^4}{\pi^4} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\
 & \times \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{q^2 - 2\mathbf{kq}}{q^2 - 2\mathbf{kq} + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} \times \\
 & \times (2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1) \left(\frac{1}{\varepsilon_{2k} + \varepsilon_{2kq}} + \frac{1}{2(m_2 - m_1)} - \right. \\
 & \left. - \frac{k^2}{2(m_2 - m_1)M_{1k}M_{2k}} - \frac{m_2}{m_2 - m_1} \frac{1}{M_{1k}} \right). \quad (34)
 \end{aligned}$$

При малых значениях k и q последний член в выражении (34) пропорционален β^{-1} и превалирует над остальными. Поэтому для исследования наибольшего вклада важен интеграл

$$I = -\frac{\alpha^6 \mu^4}{m_2 \pi^4} \int \frac{d^3 q}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k}^3 (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{(2m_2 - \varepsilon_{1k} - m_1)(q^2 - 2\mathbf{kq})}{q^2 - 2\mathbf{kq} + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}. \quad (35)$$

Используя тождество

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

и опуская вклады, пропорциональные α^7 , после интегрирования по угловым переменным находим

$$\begin{aligned}
 I \cong & \frac{\alpha^6 \mu^4}{m_2 \pi^4} 2\pi \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k}^3} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \times \\
 & \times \left(2 - \frac{2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}{2kq} \ln \frac{q^2 + 2kq + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}{q^2 - 2kq + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} \right). \quad (36)
 \end{aligned}$$

На самом деле дальнейшее интегрирование требует разбиения промежутка интегрирования на два ($0 \leq k \leq 2m_2\sqrt{1-\beta}$ и $2m_2\sqrt{1-\beta} \leq k < \infty$), но оценку наибольшего вклада можно произвести более просто. Воспользуемся разложением

$$\ln \frac{q^2 + 2kq + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)}{q^2 - 2kq + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} \approx \frac{4kq}{q^2 + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} + \dots \quad (37)$$

Тогда интеграл I принимает вид

$$\begin{aligned}
 I \sim & \frac{4}{\pi^3} \frac{\alpha^6 \mu^4}{m_2} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k}^3} \int_0^\infty \frac{dq q^2}{(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \left(1 - \left[1 - \frac{q^2}{q^2 + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} \right] \right) = \\
 = & \frac{16}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^4}{m_2} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{\varepsilon_{1k} M_{1k}^3} \int_0^\infty \frac{dq}{q^2 + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1)} \approx \frac{1}{4} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^{1/2}, \quad (38)
 \end{aligned}$$

и результат точного вычисления

$$i_{\text{leader}} = \frac{1}{4} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^{1/2} \left(1 - \frac{5}{4} \beta \right). \quad (39)$$

Лидирующий вклад от выражения, заключенного во вторых квадратных скобках соотношения (27), представляется интегралом

$$i_2 = -\frac{\alpha^6 \mu^4}{2\pi^4} \int \frac{d^3 q}{M_{2q}(q^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k} \varepsilon_{2kq} (\varepsilon_{1k} - m_1 + \varepsilon_{2kq} + m_2) (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \approx \\ \approx -\frac{1}{2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}. \quad (40)$$

Таким образом, дробно-степенная зависимость величины сдвига от параметра β может быть компенсирована только еще не рассмотренными нами слагаемыми из первой квадратной скобки выражения (27). Легко установить, что последнее слагаемое этой скобки вносит вклад, не превышающий $\alpha^6 \mu^3 \beta / (m_1 m_2)$. Остальные члены сгруппируем в два интеграла:

$$i_3 = -\frac{\alpha^6 \mu^4}{\pi^4} \int \frac{d^3 q}{M_{1q}(q^2 + \alpha^2 \mu^2)^2} \int \frac{d^3 k (\mathbf{kq})}{(k^2 + \alpha^2 \mu^2) \varepsilon_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{\varepsilon_{2kq} + m_2}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2}, \quad (41)$$

$$i_4 = \frac{\alpha^6 \mu^4}{\pi^4} \int \frac{d^3 q}{M_{2q}(q^2 + \alpha^2 \mu^2)} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k} \varepsilon_{2kq} (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} \frac{1}{\varepsilon_{1k} + E_1 + \varepsilon_{2kq} - E_2}. \quad (42)$$

В интеграле i_3 возможны те же преобразования, что использовались выше. Лидирующий член, содержащий дробно-степенную зависимость, после этих преобразований записывается в виде

$$i_3^{\text{leader}} = \frac{64}{3\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{m_1^2 m_2^2}{m_1 + m_2} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{\varepsilon_{1k} M_{1k}} \int_0^\infty \frac{dq}{(q^2 + 2(m_2 - m_1)(\varepsilon_{1k} + m_1))^2 M_{1q}}. \quad (43)$$

После вычисления интеграла по q выражение (43) сводится к однократному интегралу

$$i_3^{\text{leader}} = \frac{8}{3\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \frac{\beta^2}{(1 + \beta)(1 - \beta)^2} \int_0^\infty \frac{dk k^2}{\sqrt{k^2 + \beta^2} (\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)^3} \times \\ \times \left(3(\ln 2 - 1) + \ln \beta^{-1} \left(1 - \frac{\beta^2}{2(\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)} \right) + \right. \\ \left. + \ln \frac{\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta}{\beta} + \frac{3\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\beta}{\sqrt{\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta}} \right) = \\ = \frac{1}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \left(\frac{8}{9} \ln \beta^{-1} + \frac{8}{9} \left(2 \ln 2 - \frac{1}{3} \right) + \frac{\pi^2}{8} \sqrt{\beta} - \frac{4}{45} \beta \ln \beta^{-1} \right). \quad (44)$$

При вычислении интеграла i_4 с точностью до $\alpha^6 \mu^3 \beta^2 / (m_1 m_2)$ можно использовать приближение $1/M_{2q} \approx 1/(2m_2)$. Тогда после сдвига $\mathbf{k} - \mathbf{q} = \mathbf{q}'$ и последующей

замены $\mathbf{q}' = \mathbf{q}$ получим

$$\begin{aligned}
 i_4 &\cong \frac{\alpha^6 \mu^4}{4\pi^4 m_2} \int \frac{d^3 k}{\varepsilon_{1k} M_{1k}} \int \frac{d^3 q}{q^2 \varepsilon_{2q} (\varepsilon_{2q} - m_2 + \varepsilon_{1k} + m_1) (\mathbf{k} - \mathbf{q})^2} = \\
 &= \frac{2}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^4}{m_2^3} \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + \beta^2} (\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)^2} \int_0^\infty \frac{dq}{q \sqrt{q^2 + 1}} \ln \frac{k+q}{k-q} \times \\
 &\quad \times \left(1 - \frac{\sqrt{q^2 + 1} - 1}{\sqrt{q^2 + 1} - 1 + \sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta} \right) \approx \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta (\pi^2 - 8\beta \ln \beta^{-1}) - \\
 &\quad - \frac{2}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + \beta^2} (\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)^2} \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty \frac{dq q}{\sqrt{q^2 + 1}} \frac{\ln((k+q)/(k-q))}{q^2 + (\sqrt{q^2 + 1} + 1)(\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)}. \quad (45)
 \end{aligned}$$

Опуская в подынтегральном выражении члены, приводящие к значениям, превышающим порядок $\alpha^6 \mu^3 \beta^2 / (m_1 m_2)$, запишем

$$i_4 = \frac{1}{2\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta (\pi^2 - 8\beta \ln \beta^{-1}) + i^* + j^*, \quad (46)$$

где

$$\begin{aligned}
 j^* &= \frac{2}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + \beta^2} (\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)^2} \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty \frac{dq q}{\sqrt{q^2 + 1}} \frac{1}{\sqrt{q^2 + 1} + 1} \ln \frac{k+q}{k-q} = \frac{4}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \ln \beta^{-1}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 i^* &= -\frac{2}{\pi^2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^2 \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + \beta^2} (\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)^2} \times \\
 &\quad \times \int_0^\infty \frac{dq q}{q^2 + 2(\sqrt{k^2 + \beta^2} + \beta)} \ln \frac{k+q}{k-q}. \quad (48)
 \end{aligned}$$

Интеграл по переменной q можно считать табличным, так что легко получаем

$$i^* = -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \int_0^\infty \frac{dk k}{\sqrt{k^2 + 1} (\sqrt{k^2 + 1} + 1)^2} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{\beta}{2}} \sqrt{\sqrt{k^2 + 1} - 1} \right), \quad (49)$$

и, сделав замену $\sqrt{k^2 + 1} + k = x$, находим

$$i^* = -\frac{4}{\pi} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta \int_1^\infty \frac{dx (x-1)}{(x+1)^3} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sqrt{\beta}}{2} \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \right). \quad (50)$$

С нужной нам точностью интегрирование по частям дает

$$i^* = -\frac{1}{\pi} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^{3/2} \int_1^\infty \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x} (1 + \beta x / (2(2-\beta)))}. \quad (51)$$

Положив $\xi = \beta/(2(2 - \beta))$, после очевидных преобразований (а именно $\sqrt{x} = z$, а затем $1/z^2 = y$), запишем

$$i^* = -\frac{2}{\pi} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^{3/2} \frac{1}{1 - \xi} \int_0^1 dy \left(\frac{1}{y^2 + 1} - \frac{\xi}{y^2 + \xi} \right); \quad (52)$$

его значение равно

$$i^* \approx -\frac{1}{2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta^{3/2}. \quad (53)$$

Отсюда суммарный результат выражения (46) дает величину

$$i^* = \frac{1}{2} \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \beta (1 - \sqrt{\beta}). \quad (54)$$

Отметим, что при описании связанных состояний с помощью амплитуды рассеяния вблизи массовой поверхности возникают проблемы со сходимостью. Устранить эти особенности можно либо введением параметра обрезания виртуального импульса в инфракрасной области, либо использованием точной зависимости амплитуды рассеяния от естественных параметров связанных состояний: энергии связи и импульсов частиц на концах диаграмм.

Использование первого способа возможно лишь при условии, что нефизический параметр компенсируется в сумме содержащих его выражений.

Второй способ предоставляет возможность вычисления поправок к величине сдвига в более высоких порядках по константе тонкой структуры. Применяя его, мы получили возможность еще на этапе аналитической записи поправки сравнивать результаты квазипотенциального подхода и метода, используемого Фултоном и Мартином. Вклад неприводимой кулоновской диаграммы не зависит от характера учета поправок низшего порядка в рамках теории возмущений. Поэтому нами прежде всего рассчитан ряд новых поправок к тонкому сдвигу от двухфотонного перекрестного обмена. Как и прежде, эти поправки содержат либо целые степени, либо логарифмы по параметру отношения масс частиц β . Вклад интегралов i_{leader} и i^* носит особый, не известный до сих пор характер.

Необычность ситуации состоит в том, что зависимость поправок к тонкому сдвигу от параметра отношения масс частиц β оказалась более разнообразной, чем это было известно: поправка к тонкому сдвигу может содержать как целочисленные степени или логарифмы величины β , так и быть дробно-степенной функцией этого параметра.

Неоднократно отмечалось, что вклад от кулоновских обменов с точностью до пятого порядка по константе тонкой структуры пропорционален $\alpha^5 \mu^3/(m_1 m_2)$ и дополнительной зависимости от параметра β не содержит.

Тот же вывод может быть сделан и при анализе результатов расчета этой величины с точностью до $\alpha^6 \mu^3/(m_1 m_2)$ в работах [7], [11]. Найденная нами впервые характеристика зависимости вклада неприводимой кулоновской диаграммы от параметра β может быть интерпретирована как малая поправка к значениям порядка $\alpha^6 \mu^3/(m_1 m_2)$:

$$\delta E = \frac{\alpha^6 \mu^3}{m_1 m_2} \left(\frac{1}{4} \sqrt{\beta} + \frac{8}{9\pi^2} \beta \ln \beta^{-1} \right). \quad (55)$$

Численное значение найденной поправки $-\delta E = 0.06$ кГц для водорода и $\delta E = 1.75$ кГц для мюония.

Поправка δE к значению $\alpha^6 \mu^3 / (m_1 m_2)$, найденному для уровня энергии $1S$ в атоме водорода в работах [11], чрезвычайно мала при рассмотрении кулоновских взаимодействий и составляет примерно 0.008 от нее.

Что касается мюония, то здесь величина этой же поправки меньше в ~ 37 раз.

Таким образом, поправка, связанная с параметром β , не замедляет существенно сходимость ряда теории возмущений по константе α . Расчеты величины тонкого сдвига в водородоподобном атоме с точностью до $\alpha^7 \mu^3 / (m_1 m_2)$ проводились в работах [12]. Эта поправка для $1S$ -уровня энергии атома водорода составляет -0.42 кГц. Она лишь в 7 раз по величине превышает полученный нами вклад. В атоме же мюония разница между отмеченными значениями не превышает двух раз. Можно также упомянуть работы [4], [13], где учитывались очень незначительные логарифмические по параметру отношения масс частиц вклады.

Таким образом, поправки порядка величины δE уже известны и используются при сравнении данных теории и эксперимента. Прогресс, достигнутый в экспериментальных исследованиях уровней энергии водородоподобных атомов, делает расчет этих поправок актуальным.

Благодарности. Авторы выражают признательность С. Н. Багаеву, В. И. Саврину и О. А. Хрусталёву за внимание к работе. Работа частично финансировалась РФФИ (грант № 05-02-16955а).

Список литературы

- [1] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29**:2 (1963), 380.
- [2] M. Niering, R. Holzwarth, J. Reichert et al., *Phys. Rev. Lett.*, **84**:24 (2000), 5496.
- [3] P. J. Mohr, B. N. Taylor, *Rev. Mod. Phys.*, **72**:2 (2000), 351.
- [4] Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **61**:5 (1998), 866.
- [5] M. I. Eides, H. Grotch, V. A. Shelyuto, *Phys. Rep.*, **342**:2–3 (2001), 63.
- [6] T. Fulton, P. C. Martin, *Phys. Rev.*, **95**:3 (1954), 811.
- [7] K. Pachucki, H. Grotch, *Phys. Rev. A*, **51**:3 (1995), 1854.
- [8] M. I. Eides, H. Grotch, *Phys. Rev. A*, **55**:5 (1997), 3351.
- [9] Н. Е. Нюнько, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *Влияние движения ядра на тонкую структуру водорода*, Сообщение Р2-7493, ОИЯИ, Дубна, 1973.
- [10] Н. А. Бойкова, С. В. Клещевская, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **67**:3 (2004), 548.
- [11] G. W. Erickson, H. Grotch, *Phys. Rev. Lett.*, **60**:25 (1988), 2611; **63**:12 (1989), 1326 (Erratum).
- [12] K. Pachucki, S. G. Karshenboim, *Phys. Rev. A*, **60**:4 (1999), 2792; K. Melnikov, A. S. Yelkhovsky, *Phys. Lett. B*, **458**:1 (1999), 143.
- [13] Н. А. Бойкова, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **64**:5 (2001), 986; Н. А. Бойкова, С. В. Клещевская, Ю. Н. Тюхтяев, Р. Н. Фаустов, *ЯФ*, **64**:8 (2001), 1437; S. G. Karshenboim, *Phys. Rep.*, **422**:1–2 (2005), 1.

Поступила в редакцию 7.06.2006