Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, Перечисление матриц чередующихся знаков нечетного порядка, симметричных относительно поворота на 90° , *ТМФ*, 2006, том 149, номер 3, 395–408

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5531>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 07:07:05

© 2006 г.

А. В. Разумов*, Ю. Г. Строганов*

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ЗНАКОВ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА, СИММЕТРИЧНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТА НА 90°

Как показано Купербергом, статистическая сумма модели квадратного льда, связанная с матрицами чередующихся знаков четного порядка, симметричными относительно поворота на 90° , является произведением двух сходных множителей. Предложена модель квадратного льда, состояния которой находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами чередующихся знаков нечетного порядка, симметричными относительно поворота на 90° , и показано, что статистическая сумма этой модели может быть выражена подобным образом. Это позволяет, в частности, доказать гипотезы Роббинса, относящиеся к перечислению всех матриц чередующихся знаков, симметричных относительно поворота на 90° .

Ключевые слова: матрицы чередующихся знаков, перечисления, модель квадратного льда.

1. ВВЕДЕНИЕ

Матрица чередующихся знаков – это матрица с элементами 1, 0 и -1 такая, что 1 и -1 чередуются в каждом столбце и в каждой строке и, кроме того, первый и последний ненулевые элементы в каждом столбце и в каждой строке равны 1. Начиная с известных гипотез Миллса, Роббинса и Рамсея [1], было получено много результатов, относящихся к матрицам чередующихся знаков и к их разнообразным подклассам, по перечислениям и по равенствам перечислений.

Большинство результатов было доказано с использованием взаимно однозначного соответствия между матрицами чередующихся знаков и состояниями различных вариантов статистической модели квадратного льда. Впервые этот метод решения задач перечисления был использован Купербергом [2], см. также богатую результатами работу [3].

Наша предыдущая статья была посвящена перечислению матриц чередующихся знаков нечетного порядка, симметричных относительно поворота на 180° , на основе соответствующей модели квадратного льда. В настоящей статье мы вновь исследуем

*Институт физики высоких энергий, Протвино, Московская обл., Россия.
E-mail: Alexander.Razumov@ihep.ru, Yuri.Stroganov@ihep.ru

матрицы нечетного порядка, но на этот раз рассматриваем матрицы чередующихся знаков, симметричные относительно поворота на 90° .

В начале раздела 2 мы обсуждаем модель квадратного льда, связанную с матрицами чередующихся знаков четного порядка, симметричными относительно поворота на 90° , предложенную Купербергом [3]. Затем вводится модель квадратного льда, состояния которой находятся во взаимно однозначном соответствии с матрицами чередующихся знаков нечетного порядка, симметричными относительно поворота на 90° . В отличие от случая матриц четного порядка, для матриц нечетного порядка обычных рекурсивных соотношений недостаточно для того, чтобы найти статистическую сумму модели с помощью интерполяции Лагранжа.

В разделе 3 мы получаем некоторые важные дополнительные рекурсивные соотношения, содержащие специальный спектральный параметр, который приписан центральной линии графа, описывающего состояния модели.

В разделе 4 мы показываем, что статистическая сумма модели является произведением двух множителей, тесно связанных с пфаффианами, использованными Купербергом для того, чтобы записать статистическую сумму модели льда, соответствующей матрицам чередующихся знаков четного порядка, симметричным относительно поворота на 90° [3].

В разделе 5 мы рассматриваем важный специальный случай общего для всех вершин параметра модели, что позволяет, в частности, доказать перечислительную гипотезу Роббинса [4], относящуюся к матрицам чередующихся знаков нечетного порядка, симметричным относительно поворота на 90° .

Мы используем обозначение $\bar{x} = x^{-1}$ и следующие удобные сокращения:

$$\begin{aligned}\sigma(x) &= x - \bar{x}, \\ \alpha(x) &= \sigma(ax)\sigma(a\bar{x}),\end{aligned}$$

предложенные Купербергом [3]. Здесь a – некоторый параметр, который будет определен ниже.

2. МОДЕЛЬ КВАДРАТНОГО ЛЬДА, СВЯЗАННАЯ С МАТРИЦАМИ ЧЕРЕДУЮЩИХСЯ ЗНАКОВ, СИММЕТРИЧНЫМИ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОВОРОТА НА 90°

Матрица чередующихся знаков A размера $n \times n$ называется симметричной относительно поворота на 90° , если

$$(A)_{j,n+1-i} = (A)_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Можно показать, что матрицы чередующихся знаков четного порядка n , симметричные относительно поворота на 90° , существуют только тогда, когда n кратно 4. Матрицы чередующихся знаков порядка $n = 2m + 1$, симметричные относительно поворота на 90° , имеют в центре -1 , если m нечетно, и 1 , если m четно.

Для того чтобы перечислить матрицы чередующихся знаков, принадлежащие некоторому классу симметрии, Куперберг предложил начать с модели квадратного

льда, состояния которой находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами рассматриваемого класса симметрии [3]. Следующим шагом было вычисление статистической суммы модели. Оказалось, что для многих классов симметрии матриц чередующихся знаков можно найти детерминантное или пфаффианное представление статистической суммы соответствующей модели квадратного льда. Используя такие представления и конкретизируя подходящим образом параметры модели, мы получаем желаемые перечисления [3], [5], [6].

Для описания состояний модели квадратного льда удобно использовать графическое представление. Например, состояния модели квадратного льда, соответствующие матрицам чередующихся знаков четного порядка, симметричным относительно поворота на 90° , описываются графом, приведенным на рис. 1. Метки x_i являются

Рис. 1

спектральными параметрами, используемыми для задания статистической суммы модели. Чтобы получить конкретное состояние модели, надо выбрать ориентацию для всех неориентированных ребер так, чтобы два ребра входили в каждую четырехвалентную вершину и два ребра выходили из нее, а также чтобы оба ребра двухвалентной вершины были или входящими, или исходящими¹⁾. Мы приводим рисунки для фиксированного порядка матриц, но обобщение на случай произвольного возможного порядка всегда очевидно.

Вес состояния равен произведению весов всех вершин. Выбор весов четырехвалентных вершин, используемый в данной работе, приведен на рис. 2. Параметр a является общим для всех четырехвалентных вершин. Все двухвалентные вершины имеют вес 1. Пусть вершина не помечена и образована пересечением двух помеченных линий. Тогда значение метки вершины равно $x\bar{y}$, если эта метка лежит в

¹⁾Куперберг использовал штриховую линию, пересекающую ребра, чтобы показать, что при пересечении их ориентация меняется [3]. Для наших целей удобно рассматривать смену ориентации как специальный тип вершины.

Рис. 2

квадранте, заметаемой линией со спектральным параметром x , когда она поворачивается против часовой стрелки к линии со спектральным параметром y . Можно переместить метку вершины x из одного квадранта в смежный, сменив ее на $\bar{x}$.

Граф, подобный приведенному на рис. 1, обозначает также соответствующую функцию. При этом подразумевается суммирование по всем возможным ориентациям внутренних ребер. Легко понять, что принятые нами соглашения приводят к формализму, который инвариантен относительно поворотов и относительно сохраняющих ориентацию гладких деформаций графов. Отражая граф относительно какой-либо линии и надчеркивая метки, относящиеся ко всем линиям, мы получаем граф, который описывает ту же функцию, что и начальный граф. И наконец, обращая ориентацию всех ориентированных ребер, мы снова получаем граф, который дает ту же функцию, что и начальный граф.

Если у нас есть неориентированные граничные ребра, то граф представляет множество величин, соответствующих их всевозможным ориентациям. Обычно графы с такими ребрами возникают, если мы рассматриваем графическое представление равенства некоторых функций. В этом случае мы должны вращать, если это необходимо, обе части равенства одновременно.

В качестве полезного примера можно взять граф, соответствующий хорошо известному уравнению Янга–Бакстера

=

(1)

Это уравнение справедливо, если $x y z = a$.

Для матриц чередующихся знаков четного порядка, инвариантных относительно поворота на 90° , описанная выше процедура была реализована Купербергом [3]. В настоящей работе мы рассматриваем случай матриц чередующихся знаков нечетного порядка, инвариантных относительно поворота на 90° . Образец графа для пространства состояний соответствующей модели квадратного льда зависит от размера матриц. Для матриц порядка $2m + 1$ при четном m мы имеем образец, приведенный на рис. 3, а для матриц порядка $2m + 1$ при нечетном m мы имеем образец, приведенный на рис. 4. Отличие, на самом деле, состоит в ориентации граничных ребер, принадлежащих “средней” линии. Нетрудно убедиться в том, что существует

Рис. 3

Рис. 4

взаимно однозначное соответствие между состояниями моделей квадратного льда, описываемых рис. 3 и рис. 4, и соответствующими подмножествами матриц чередующихся знаков.

Статистическая сумма модели зависит от $m + 1$ спектральных параметров $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$. Мы обозначаем ее $Z_{QT}(2m + 1; \mathbf{x})$, где $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_{m+1})$ представляет собой $(m + 1)$ -мерный вектор, образованный спектральными параметрами. Используя уравнение Янга–Бакстера (1) и очевидное равенство

$$\begin{array}{c} y \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ x \end{array} = \begin{array}{c} y \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ x \end{array},$$

можно показать, что функция $Z_{QT}(2m + 1; \mathbf{x})$ симметрична по переменным $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Нетрудно убедиться в том, что справедливо следующее равенство:

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ y \\ \bullet \\ x \\ \bullet \\ \downarrow \\ z \end{array} = \begin{array}{c} y \\ \bullet \\ \downarrow \\ x \\ \bullet \\ \uparrow \\ z \end{array}. \quad (2)$$

Справедливы также и подобные равенства с различными ориентациями ориентированных ребер в левой части и с противоположными им ориентациями в правой части. Отразим теперь граф, изображенный на рис. 4, относительно пунктирной линии, изображенной точками на рис. 5, надчеркнем все метки и обратим ориентации

Рис. 5

Рис. 6

ориентированных ребер. Как следует из сделанных выше замечаний, результирующий граф, который приводится на рис. 5, соответствует той же функции, что и граф, изображенный на рис. 4. Используя равенство (2), преобразуем рис. 5 в рис. 6, который опять соответствует той же самой функции, что и граф, изображенный на рис. 4. Таким образом, мы доказали равенство

$$Z_{QT}(2m + 1; \mathbf{x}) = Z_{QT}(2m + 1; \bar{\mathbf{x}}), \tag{3}$$

где $\bar{\mathbf{x}} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{m+1})$.

Следуя обычной процедуре (см., например, доказательство леммы 13 в работе [3]), мы получаем $2m - 2$ рекурсивных соотношения

$$\begin{aligned} Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})|_{x_1=ax_j} &= \sigma^2(a)\sigma^2(a^2) \times \\ &\times \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{m+1} \sigma^2(a^2 \bar{x}_k x_j) \sigma^2(a \bar{x}_j x_k) Z_{QT}(2m-3; \mathbf{x} \setminus x_1 \setminus x_j), \\ Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})|_{x_1=\bar{a}x_j} &= \sigma^2(a)\sigma^2(a^2) \times \\ &\times \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^{m+1} \sigma^2(a \bar{x}_k x_j) \sigma^2(a^2 \bar{x}_j x_k) Z_{QT}(2m-3; \mathbf{x} \setminus x_1 \setminus x_j), \end{aligned}$$

где $j = 2, \dots, m$. Поскольку статистическая сумма $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ симметрична по переменным $x_1, \dots, x_m$, мы имеем $m^2 - m$ рекурсивных соотношений

$$\begin{aligned} Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})|_{x_i=ax_j} &= \sigma^2(a)\sigma^2(a^2) \times \\ &\times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{m+1} \sigma^2(a^2 \bar{x}_k x_j) \sigma^2(a \bar{x}_j x_k) Z_{QT}(2m-3; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j), \end{aligned} \quad (4)$$

где $i, j = 1, \dots, m$ и $i \neq j$.

Рассмотрим некоторое фиксированное значение индекса i такое, что $1 \leq i \leq m$. Статистическая сумма $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ является центрированным полиномом Лорана ширины $2m - 2$ по квадрату переменной x_i . Следовательно, если мы знаем $2m - 1$ значений $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ для $2m - 1$ значений x_i^2 , то мы полностью знаем $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ для любого $\mathbf{x}$. Рекурсивные соотношения (4) дают нам возможность выразить $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ через $Z_{QT}(2m-3; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j)$ для $2m - 2$ значений x_i . Этого недостаточно для того, чтобы найти $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ рекурсивно с помощью интерполяции Лагранжа²⁾. С другой стороны, статистическая сумма $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ является центрированным полиномом Лорана по переменной x_{m+1}^2 ширины $m - 1$, если m нечетно, и ширины m , если m четно. Оказывается, что существует достаточное количество рекурсивных соотношений, включающих переменную x_{m+1} , чтобы определить $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ с помощью интерполяции Лагранжа.

3. РЕКУРСИВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ x_{m+1}

Умножим статистическую сумму $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ на $\sigma(az_m)$, где z_m – параметр, который пока не зафиксирован. Можно легко понять, что результирующая функция может быть представлена графом, приведенным на рис. 7. Положим $z_m = ax_{m+1}\bar{x}_m$

²⁾Заметим, что для $Z_{QT}(4k, \mathbf{x})$ рекурсивные соотношения, подобные соотношениям (4), дают достаточно данных для интерполяции Лагранжа [3].

и, используя уравнение Янга–Бакстера (1), преобразуем граф, изображенный на рис. 7, в граф, изображенный на рис. 8. Повторяя эту процедуру, мы видим, что рис. 9, где $z_i = ax_{m+1}\bar{x}_i$, соответствует статистической сумме $Z_{QT}(2m + 1; \mathbf{x})$, умноженной на произведение $\prod_{i=1}^m \sigma(a^2x_{m+1}\bar{x}_i)$. Положим теперь $x_{m+1} = \bar{a}x_1$. Легко

Рис. 7

Рис. 8

видеть, что в результате этого некоторые вершины становятся фиксированными (см. рис. 10). Удаляя эти вершины, мы приходим к функции, описываемой рис. 11. Используя равенство (2), мы можем показать, что эта функция равна функции, описываемой рис. 12. Удаление фиксированных вершин из графа, описывающего некоторую функцию, эквивалентно делению этой функции на веса этих вершин.

Рис. 9

Рис. 10

Учтя все сделанные умножения и деления, мы получаем важное рекурсивное соотношение

$$Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})|_{x_{m+1}=\bar{a}x_1} = \sigma(a)\sigma(a^2) \times \\ \times \prod_{k=2}^m \sigma(a^2 \bar{x}_1 x_k) \sigma(a \bar{x}_k x_1) Z_{QT}(2m-1; (x_2, \dots, x_m, x_1)).$$

Используя симметрию статистической суммы $Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})$ по переменным $x_1, \dots, x_m$, мы получаем m рекурсивных соотношений

$$Z_{QT}(2m+1; \mathbf{x})|_{x_{m+1}=\bar{a}x_j} = \sigma(a)\sigma(a^2) \times \\ \times \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \sigma(a^2 \bar{x}_j x_k) \sigma(a \bar{x}_k x_j) Z_{QT}(2m-1; (x_1, \dots, \hat{x}_j, \dots, x_m, x_j)), \quad (5)$$

Напомним, что пфаффиан антисимметричной $(2l \times 2l)$ -матрицы A может быть определен как

$$\text{Pf } A = \frac{1}{2^l l!} \sum_{s \in S_{2l}} \text{sgn}(s) A_{s(1)s(2)} A_{s(3)s(4)} \cdots A_{s(2l-1)s(2l)},$$

где S_{2l} – симметричная группа степени $2l$.

Вновь следуя Купербергу, определим следующие функции $2l$ переменных $x_1, x_2, \dots, x_{2l}$:

$$Z_{\text{QT}}^{(r)}(l; \mathbf{x}) = \prod_{1 \leq i < j \leq 2l} \frac{\alpha(\bar{x}_i x_j)}{\sigma(\bar{x}_i x_j)} \text{Pf } M^{(r)}(l; \mathbf{x}).$$

Функции $Z_{\text{QT}}^{(r)}(l; \mathbf{x})$ симметричны по переменным $x_1, \dots, x_{2l}$, и можно проверить, что выполняются следующие рекурсивные соотношения:

$$Z_{\text{QT}}^{(r)}(l; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = \frac{\sigma(a^r)}{\sigma(a)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l} [\sigma(a^2 \bar{x}_k x_j) \sigma(a \bar{x}_j x_k)] Z_{\text{QT}}^{(r)}(l-1; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j), \quad (8)$$

где $i, j = 1, \dots, 2l$ и $i \neq j$. На основе этих рекурсивных соотношений Куперберг доказал [3], что статистическая сумма квадратного льда, соответствующего матрицам чередующихся знаков четного порядка, инвариантным относительно поворота на 90° , может быть представлена как

$$Z_{\text{QT}}(4l; \mathbf{x}) = [\sigma^{3l}(a) \sigma^l(a^2)] Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x}) Z_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x}).$$

Оказывается, что статистическая сумма квадратного льда, соответствующего матрицам чередующихся знаков нечетного порядка, инвариантным относительно поворота на 90° , может быть представлена подобным образом.

Функция $Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x})$ является центрированным полиномом Лорана ширины $2l-2$ по квадрату каждой из переменных $x_1, \dots, x_{2l}$, а для функции $Z_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x})$ мы имеем

$$Z_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{2l} c_i(l; \mathbf{x} \setminus x_{2l}) x_{2l}^{2i-2l-1}.$$

Определим функцию

$$\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x}) = \left[\prod_{k=1}^{2l-1} x_k \right] c_{2l}(l; \mathbf{x}),$$

которая является центрированным полиномом Лорана ширины $2l-2$ по квадрату каждой из переменных $x_1, \dots, x_{2l-1}$. Из соотношения (8) следует, что

$$\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = -\frac{\sigma(a^2)}{\sigma(a)} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l-1} [\sigma(a^2 \bar{x}_k x_j) \sigma(a \bar{x}_j x_k)] \tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l-1; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j), \quad (9)$$

где $i, j = 1, \dots, 2l-1$ и $i \neq j$. Теперь мы можем написать следующие выражения для статистической суммы модели квадратного льда, соответствующей матрицам чередующихся знаков нечетного порядка, инвариантным относительно поворота на 90° :

$$Z_{\text{QT}}(4l+1; \mathbf{x}) = [(-1)^l \sigma^{3l}(a) \sigma^l(a^2)] Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x} \setminus x_{2l+1}) \tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l+1; \mathbf{x}), \quad (10)$$

$$Z_{\text{QT}}(4l-1; \mathbf{x}) = [(-1)^{l+1} \sigma^{3l-2}(a) \sigma^l(a^2)] Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x}) \tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x} \setminus x_{2l}). \quad (11)$$

Используя рекурсивные соотношения (8) и (9), а также начальные значения

$$Z_{\text{QT}}^{(1)}(1; \mathbf{x}) = 1, \quad \tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(1; \mathbf{x}) = 1,$$

мы можем без труда проверить, что правые части равенств (10) и (11) удовлетворяют начальным условиям (7) и рекурсивным соотношениям (5) и (6).

5. СПЕЦИАЛЬНОЕ ЗНАЧЕНИЕ ПАРАМЕТРА a И ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ

Оказывается, что в специальном случае, когда $a = e^{i\pi/3}$, можно связать функцию $Z_{\text{QT}}^{(1)}(1; \mathbf{x})$ со статистической суммой модели квадратного льда, соответствующей всем матрицам чередующихся знаков, а функцию $\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(1; \mathbf{x})$ – со статистической суммой модели, соответствующей матрицам чередующихся знаков нечетного порядка, инвариантным относительно поворота на 180° .

Если $a = e^{i\pi/3}$, то

$$\sigma(a^2 x) = -\sigma(\bar{a} x) = \sigma(a \bar{x}), \quad (12)$$

и рекурсивные соотношения (8) для $r = 1$ принимают вид

$$Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l} \sigma^2(a \bar{x}_j x_k) Z_{\text{QT}}^{(1)}(l-1; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j). \quad (13)$$

Напомним, что статистическая сумма $Z(l; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ модели квадратного льда, соответствующей всем матрицам чередующихся знаков, зависит от $2l$ параметров $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_l$ (см., например, [3]). Она является центрированным полиномом Лорана ширины $l-1$ по квадрату каждой из переменных $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_l$, удовлетворяющим рекурсивным соотношениям

$$Z(l; \mathbf{x}, \mathbf{y})|_{y_i = ax_j} = \sigma(a^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^l \sigma(a \bar{x}_j y_k) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^l \sigma(a^2 \bar{x}_k x_j) Z(l-1; \mathbf{x} \setminus x_j, \mathbf{y} \setminus y_i), \quad (14)$$

где $i, j = 1, \dots, l$ и $i \neq j$, с начальным значением $Z(1; \mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sigma(a^2)$. В работе [7] было показано, что для случая $a = e^{i\pi/3}$ эта функция симметрична по объединению переменных $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_l$ (см. также [8] и приводимые там ссылки). Вводя симметричные обозначения

$$x_i = x_i, \quad x_{i+l} = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, l,$$

и принимая во внимание тождество (12), мы запишем рекурсивные соотношения для $Z(l; \mathbf{x})$ в виде

$$Z(l; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = \sigma(a^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l} \sigma(a\bar{x}_j x_k) Z(l-1; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j). \quad (15)$$

Сравнивая соотношения (13) с соотношениями (15) и принимая во внимание начальные значения для $Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x})$ и $Z^2(l; \mathbf{x})$, находим, что

$$Z_{\text{QT}}^{(1)}(l; \mathbf{x}) = \sigma^{-2l}(a^2) Z^2(l; \mathbf{x}). \quad (16)$$

Это равенство было также получено Окадой [8].

Функция $\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x})$ для случая $a = e^{i\pi/3}$ удовлетворяет рекурсивным соотношениям

$$\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = - \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l-1} \sigma^2(a\bar{x}_j x_k) \tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l-1; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j), \quad (17)$$

которые заметно отличаются от соотношений (13).

В нашей недавней работе [5] мы рассмотрели статистическую сумму для модели квадратного льда, соответствующей матрицам чередующихся знаков нечетного порядка, инвариантным относительно поворота на 180° (см. рис. 13). Соответству-

Рис. 13

ющая статистическая сумма $Z_{\text{HT}}(2l-1; \mathbf{x}, \mathbf{y})$ зависит от $2l$ спектральных параметров $x_1, \dots, x_l$ и $y_1, \dots, y_l$. Мы доказали, что в случае $a = e^{i\pi/3}$, $y_{m+1} = x_{m+1}$ эта статистическая сумма является симметричной функцией по всем $2l-1$ переменным. Вновь вводя симметричные обозначения

$$x_i = x_i, \quad i = 1, \dots, l, \quad x_{i+l} = y_i, \quad i = 1, \dots, l-1,$$

и используя для рассматриваемой функции то же обозначение $Z_{\text{HT}}(2l-1; \mathbf{x})$, мы видим, что эта функция удовлетворяет рекурсивным соотношениям

$$Z_{\text{HT}}(2l-1; \mathbf{x})|_{x_i = ax_j} = \sigma^2(a^2) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^{2l-1} \sigma^2(a\bar{x}_j x_k) Z_{\text{HT}}(2l-3; \mathbf{x} \setminus x_i \setminus x_j), \quad (18)$$

где $i, j = 1, \dots, 2l - 1$ и $i \neq j$. Сравнивая соотношения (17) с соотношениями (18) и принимая во внимание начальные значения для $Z_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x})$ и $Z_{\text{HT}}(2l - 1; \mathbf{x})$, получаем, что

$$\tilde{Z}_{\text{QT}}^{(2)}(l; \mathbf{x}) = (-1)^{l+1} \sigma^{2-2l} (a^2) Z_{\text{HT}}(2l - 1; \mathbf{x}). \quad (19)$$

Соотношения (16) и (19) позволяют нам записать равенства (10) и (11) в виде

$$\begin{aligned} Z_{\text{QT}}(4l + 1; \mathbf{x}) &= Z^2(l; \mathbf{x} \setminus x_{2l+1}) Z_{\text{HT}}(2l + 1; \mathbf{x}), \\ Z_{\text{QT}}(4l - 1; \mathbf{x}) &= Z^2(l; \mathbf{x}) Z_{\text{HT}}(2l - 1; \mathbf{x} \setminus x_{2l}). \end{aligned}$$

Естественно напомнить здесь похожее равенство

$$Z_{\text{QT}}(4l; \mathbf{x}) = Z^2(l; \mathbf{x}) Z_{\text{HT}}(2l; \mathbf{x}),$$

полученное Окадой [8].

Рассматривая последние равенства при $\mathbf{x} = (1, \dots, 1)$, мы получаем соотношения

$$A_{\text{QT}}(4l + 1) = A^2(l) A_{\text{HT}}(2l + 1), \quad A_{\text{QT}}(4l - 1) = A^2(l) A_{\text{HT}}(2l - 1).$$

где $A(n)$, $A_{\text{QT}}(n)$ и $A_{\text{HT}}(n)$ – полное число матриц чередующихся знаков, число матриц, симметричных относительно поворота на 90° , и число матриц, симметричных относительно поворота на 180° , соответственно. Комбинируя эти соотношения с результатами Куперберга для матриц четного порядка, имеем

$$A_{\text{QT}}(4l + \epsilon) = A^2(l) A_{\text{HT}}(2l + \epsilon), \quad \epsilon = -1, 0, 1.$$

Таким образом, гипотеза Роббинса [4] о перечислении матриц чередующихся знаков, инвариантных относительно поворота на 90° , доказана.

Благодарности. Работа авторов была частично поддержана РФФИ (грант № 04-01-00352).

Список литературы

- [1] W. H. Mills, D. P. Robbins, H. Rumsey, *Invent. Math.*, **66** (1982), 73–87; *J. Combin. Theory Ser. A*, **34** (1983), 340–359.
- [2] G. Kuperberg, *Int. Math. Res. Notes*, **1996**:3 (1996), 139–150; [math.CO/9712207](#).
- [3] G. Kuperberg, *Ann. Math.*, **156** (2002), 835–866; [math.CO/0008184](#).
- [4] D. P. Robbins, *Symmetry Classes of Alternating Sign Matrices*, [math.CO/0008045](#).
- [5] А. М. Разумов, Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **148**:3 (2006), 357–386; [math-ph/0504022](#).
- [6] D. Zeilberger, *New York J. Math.*, **2** (1996), 59–68; [math.CO/9606224](#); А. В. Разумов, Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **141** (2004), 323–347; [math-ph/0312071](#).
- [7] Ю. Г. Строганов, *ТМФ*, **146** (2006), 65–76; [math-ph/0204042](#).
- [8] S. Okada, *J. Algebraic Combin.*, **23** (2006), 43–69; [math.CO/0408234](#).

Поступила в редакцию 4.05.2006