Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. А. Свешников, П. К. Силаев, Квазиточное решение задачи о релятивистских связанных состояниях для потенциальной ямы в $(1 + 1)$ -мерном случае, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 3, 427–456

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5536>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 18:12:24

© 2006 г.

К. А. Свешников*, П. К. Силаев*

КВАЗИТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РЕЛЯТИВИСТСКИХ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЯХ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЫ В $(1 + 1)$ -МЕРНОМ СЛУЧАЕ

Исследована задача о связанных состояниях бозонов и фермионов в рамках релятивистского конфигурационного представления, когда кинетическая часть гамильтониана содержит операторы конечного чисто мнимого сдвига $e^{\pm i\hbar d/dx}$ вместо дифференциальных. Для локальных (квази)потенциалов типа прямоугольной ямы в $(1 + 1)$ -мерном случае разработаны эффективные методы аналитического решения такой задачи, позволяющие находить спектр и исследовать свойства волновых функций в широком диапазоне изменения параметров. Показано, что свойства таких релятивистских связанных состояний по целому ряду принципиальных аспектов как на уровне волновых функций, так и структуры энергетического спектра существенно отличаются от соответствующих решений уравнений Шредингера и Дирака в статическом внешнем потенциале такой же формы. В частности, возникает конкуренция между $\hbar$ и параметрами потенциала, которая приводит к тому, что для низколежащих уровней в достаточно глубокой яме эти различия сохраняются и при $\hbar \ll 1$, а энергетические спектры бозонов и фермионов становятся идентичными.

Ключевые слова: спектральная задача в релятивистском конфигурационном представлении, уравнения в конечных разностях, связанные состояния бозонов и фермионов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Квазипотенциальный подход Логунова–Тавхелидзе [1] является одним из наиболее эффективных методов описания релятивистских связанных состояний в квантовой теории поля, поскольку при этом волновая функция системы зависит только от одной временной переменной, в силу чего она имеет ясный физический смысл и допускает обычную квантово-механическую вероятностную трактовку. При реализации квазипотенциального описания связанных состояний в рамках ковариантной гамильтоновой формулировки [2], когда все импульсы лежат на массовом гиперboloиде, после разложения по унитарным неприводимым представлениям группы

*Московский государственный университет, Москва, Россия. E-mail: costa@bog.msu.ru; silaev@bog.msu.ru

Лоренца (так называемым “лоренцевым базисам”) радиальная часть свободного гамильтониана представляет собой комбинацию операторов конечного чисто мнимого сдвига $e^{\pm id/dr}$ [3]–[5]. Такая же специфическая конечно-разностная структура уравнений инвариантной динамики в эффективном конфигурационном пространстве возникает и при ковариантном описании квантованного поля в окрестности классической составляющей в виде частицеподобного энергетического кластера типа солитона, кинка или мешка [6]. В обоих случаях за счет таких чисто мнимых конечных сдвигов аргумента динамические уравнения оказываются по существу функциональными, и по целому ряду принципиальных аспектов радикально отличаются от своих дифференциальных аналогов – нерелятивистского уравнения Шредингера и уравнения Дирака. В частности, интегральная форма этих уравнений содержит специфическую нелокальность порядка комптоновской длины волны системы, последовательный учет которой требует существенно непертурбативного подхода, в то время как прямолинейная теория возмущений оказывается эффективной лишь при достаточно жестких ограничениях на параметры задачи [7]. Как следствие, свойства решений этих уравнений по целому ряду позиций значительно отличаются от их дифференциальных аналогов и приводят к качественно новым эффектам в поведении наблюдаемых физических характеристик системы.

В данной работе проявление таких эффектов будет рассмотрено в рамках задачи о релятивистских связанных состояниях частицы для локального квазипотенциала в виде прямоугольной потенциальной ямы и двух основных типов частиц – скалярного бозона и дираковского фермиона в $(1+1)$ -мерном случае. Для скалярной частицы соответствующее квазипотенциальное уравнение в релятивистском конфигурационном представлении имеет вид конечно-разностного аналога одномерного уравнения Шредингера

$$\frac{1}{\hbar^2}[\phi(\xi - i\hbar) + \phi(\xi + i\hbar) - 2\phi(\xi)] + V(\xi)\phi(\xi) = E\phi(\xi), \quad (1.1)$$

где

$$V(\xi) = V_0^2 \theta(|\xi| - \xi_0), \quad (1.2)$$

а $\hbar$ фактически совпадает с комптоновской длиной волны рассматриваемой системы, отличаясь от последней лишь коэффициентом порядка $O(1)$, зависящим от конкретного типа задачи. Для целей настоящей работы нам, однако, будет удобнее всего исходить из более формальной математической постановки задачи и рассматривать $\hbar$ просто как параметр мнимого сдвига аргумента волновой функции, считая последний безразмерным. Тем самым безразмерными будут как $\hbar$, так и все остальные величины, фигурирующие в работе.

Дифференциальным аналогом уравнения (1.1) является нерелятивистское уравнение Шредингера

$$-\phi''(x) + V(x)\phi(x) = E\phi(x), \quad (1.3)$$

которое в данном случае возникает как формальный предел уравнения (1.1) при $\hbar \rightarrow 0$. Следует, однако, сразу оговорить принципиальную разницу в статусе этих

уравнений. А именно, уравнение (1.1) соответствует спектральной задаче в релятивистском конфигурационном представлении, в котором переменная ξ в действительности является групповым параметром – (первым) оператором Казимира группы Лоренца – и имеет смысл относительной координаты частицы в системе центра масс. В рассматриваемом $(1+1)$ -мерном случае группа Лоренца состоит из одного генератора лоренцева поворота, спектр которого совпадает с множеством вещественных чисел, так что $-\infty \leq \xi \leq +\infty$. В то же время уравнение (1.3) есть фактически задача об уровнях энергии скалярной частицы в статическом внешнем поле, которая следует из соответствующего уравнения Клейна–Гордона

$$[\square + V(x)]\varphi(x, t) = 0 \quad (1.4)$$

при подстановке $\varphi(x, t) = e^{-i\omega t}\phi(x)$, где $\omega^2 = E$. Чтобы подчеркнуть эту разницу, здесь и далее мы для динамических уравнений в релятивистском конфигурационном представлении будем использовать в качестве относительной координаты переменную ξ , сохраняя за x смысл координаты относительно (неподвижной) лабораторной системы.

В фермионном случае, чтобы сделать анализ соответствующей спектральной задачи максимально близким к уравнению (1.1), мы будем использовать квадрированное уравнение Дирака (как это и делается в большинстве случаев, когда интерес представляет прежде всего энергетический спектр [8]). Чтобы найти его вид в релятивистском конфигурационном представлении, удобнее всего исходить из уравнения для дираковской частицы в статическом внешнем потенциале в лабораторной системе координат:

$$[i\hat{\partial} - W(x)]\psi(x, t) = 0, \quad (1.5)$$

где $W(x) = V_0\theta(|x| - x_0)$, $V_0 > 0$. Квадрирование в данном случае подразумевает умножение уравнения (1.5) на $[i\hat{\partial} + W(x)]$, после чего получим

$$[\square + W^2(x) + i\gamma^1 W'(x)]\psi(x, t) = 0. \quad (1.6)$$

В релятивистском конфигурационном представлении уравнению (1.6) будет соответствовать конечно-разностная спектральная задача для спинора $\chi(\xi)$ следующего вида:

$$\frac{1}{\hbar^2} [\chi(\xi - i\hbar) + \chi(\xi + i\hbar) - 2\chi(\xi)] + [V(\xi) + i\gamma^1 \rho(\xi)]\chi(\xi) = E\chi(\xi), \quad (1.7)$$

где

$$\rho(\xi) = V_0[\delta(\xi - \xi_0) - \delta(\xi + \xi_0)]. \quad (1.8)$$

К такому же (с точностью до явного вида потенциала) виду спектральной задачи для фермионов приводит и ковариантное описание фермионного поля в лоренцевых базисах в окрестности классической бозонной составляющей [9].

Отметим, что как для скалярной частицы в уравнении (1.1), так и для фермиона в уравнении (1.7) собственное значение E отсчитывается относительно дна ямы, которое тем самым принимается за начало отсчета энергии. В такой постановке задачи формальная безмассовость частиц никакой роли не играет. Наличие массы

покоя сдвигает только положение дна ямы и тем самым влияет фактически лишь на абсолютные значения энергетических уровней. Нас же будет интересовать прежде всего положение уровней относительно дна (или верхнего края) ямы, поскольку именно эта величина имеет наиболее существенный физический смысл.

Для корректной постановки спектральных задач (1.1) и (1.7) необходимо также особо оговорить, в каком смысле следует понимать конечные мнимые сдвиги на $\pm i\hbar$ в аргументах волновых функций. Как и в работе [7], здесь мы будем исходить из анализа, проведенного в работах [10] в рамках задачи о ковариантном квантовании поля в лоренцевых базисах, и рассматривать только такие $\phi(\xi)$ и $\chi(\xi)$, которые имеют аналитическое продолжение на полосу $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$. Тогда

$$\phi(\chi)(\xi \pm i\hbar) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \phi(\chi)[\xi \pm i(\hbar - \varepsilon)]. \quad (1.9)$$

Кроме того, для $\phi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ как для волновых функций связанных состояний должно выполняться условие квадратичной интегрируемости на действительной оси, а из работ [10] при этом следует также дополнительное условие, что при $|\xi| \rightarrow \infty$ в пределах полосы $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$ эти функции должны принимать нулевые значения.

Условие аналитичности решений уравнений (1.1) и (1.7) в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$ позволяет разрешить и другую принципиальную проблему, суть которой состоит в том, что формально любое решение конечно-разностных уравнений такого типа содержит произвол в виде $i\hbar$ -периодического множителя. Условие аналитичности $\phi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$ эту неоднозначность практически ликвидирует, так как целые $i\hbar$ -периодические функции в окрестности бесконечно удаленной точки имеют как минимум экспоненциально растущую асимптотику, в то время как мероморфные – полюсы в полосе периодов. В результате по крайней мере для тех потенциалов $V(\xi)$, которые будут рассматриваться в настоящей работе, умножение на такие функции будет запрещено либо асимптотикой при $|\xi| \rightarrow \infty$, либо условием аналитичности решений в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$. Таким образом, сформулированных выше условий для $\phi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ оказывается достаточно для выделения единственного решения уравнений (1.1) и (1.7) с требуемыми свойствами.

Условию аналитичности $\phi(\xi)$ и $\chi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$ можно придать достаточно прозрачный физический смысл [7], [10]. Для краткости здесь мы ограничимся только бозонным случаем; обобщение на фермионную задачу (1.7) тривиально. Введем в рассмотрение следующий функционал:

$$\begin{aligned} K[\phi] &= -\frac{1}{\hbar^2} \int d\xi [\bar{\phi}(\xi - i\hbar) - \bar{\phi}(\xi)] [\phi(\xi - i\hbar) - \phi(\xi)] = \\ &= -\frac{1}{\hbar^2} \int d\xi [\bar{\phi}(\xi + i\hbar) - \bar{\phi}(\xi)] [\phi(\xi + i\hbar) - \phi(\xi)], \end{aligned} \quad (1.10)$$

где $\bar{\phi}(\xi) = \phi^*(\xi^*)$ – также аналитическая функция в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$, если аналитична $\phi(\xi)$, и обладает при этом такими же асимптотическими свойствами. Потребуем далее, чтобы при переходе в импульсное представление функционал $K[\phi]$ имел вид

$$K[\tilde{\phi}] = \frac{2}{\hbar^2} \int dk (\operatorname{ch} \hbar k - 1) |\tilde{\phi}(k)|^2, \quad (1.11)$$

где $\tilde{\phi}(k)$ – фурье-образ функции $\phi(\xi)$, и был при этом конечен на допустимых $\phi(\xi)$. Тогда $K[\phi]$ по построению действителен, неотрицателен и по существу представляет собой однозначно определенный конечно-разностный аналог шредингеровского функционала кинетической энергии, соответствующий уравнению (1.1). Подчеркнем, что просто условия конечности этого функционала недостаточно, так как из него следует только условие убывания $|\tilde{\phi}(k)|$ при $|k| \rightarrow \infty$ быстрее, чем $e^{-\hbar|k|/2}$, и тем самым аналитичность $\phi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar/2$, что запрещает умножение на мероморфные $i\hbar$ -периодические функции, но не обеспечивает аналитичности во всей полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$, без чего $\phi(\xi \pm i\hbar)$ становятся неопределенными символами. Переход же от выражения (1.10) к (1.11) эквивалентен утверждению, что фурье-образ $\phi(\xi \pm i\hbar)$ есть $e^{\pm \hbar k} \tilde{\phi}(k)$, для чего $|\tilde{\phi}(k)|$ при $|k| \rightarrow \infty$ должно убывать быстрее, чем $e^{-\hbar|k|}$, что фактически и является условием аналитичности $\phi(\xi)$ в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$.

Необходимо также отметить, что совокупность перечисленных условий для $\phi(\xi)$ сохраняет для уравнения (1.1) ряд наиболее общих свойств его дифференциально-аналога (1.3). В частности, в уравнении (1.1) сохраняется ограничение снизу на значения возможных уровней E , совпадающее с аналогичным ограничением для уравнения (1.3). Для этого умножим (1.1) на $\bar{\phi}(\xi)$ и проинтегрируем по $d\xi$, в результате чего получим (удобнее всего эту операцию осуществить через переход в промежуточное фурье-представление)

$$K[\phi] + \int d\xi V(\xi) |\phi(\xi)|^2 = E \int d\xi |\phi(\xi)|^2. \quad (1.12)$$

Поскольку кинетическая энергия $K[\phi]$ для допустимых $\phi(\xi)$ является неотрицательной, то из выражения (1.12) следует, что $E > V_{\min}$. Заметим, что для нормированных $\phi(\xi)$ выражение (1.12) является конечно-разностным аналогом энергетического функционала, из которого, как и в нерелятивистской квантовой механике, уравнение (1.1) может быть получено с помощью соответствующего вариационного принципа. Аналогичным образом также можно показать эрмитовость разностного оператора в уравнении (1.1), откуда, в частности, следует взаимная ортогональность собственных функций этого уравнения, соответствующих различным собственным значениям. Подчеркнем еще раз, что для вывода этих свойств уравнения (1.1) существенны все сформулированные выше условия для $\phi(\xi)$.

В заключение этого раздела сформулируем два основных результата настоящей работы. Первый состоит в том, что прямолинейное разложение разностного оператора в уравнениях (1.1), (1.7) по степеням $\hbar^2$, которое приводит к представлению этих уравнений в виде соответствующих рядов, начинающихся с уравнений Шредингера (1.3) или Дирака (1.6), может не иметь смысла и для $\hbar \ll 1$. Более того, как уже было показано в работе [7], в действительности такая теория возмущений оказывается непригодной даже для построения приближенных решений таких конечно-разностных уравнений. Причина в том, что обрывание такого ряда по степеням $\hbar^2$ на конечном члене эквивалентно замене экспоненты (оператора конечного сдвига) на полином. Однако полином не дает равномерной аппроксимации экспоненты на всей числовой прямой, в результате чего вполне возможна ситуация, когда решения обрезанного таким образом уравнения не будут иметь ничего общего с истинными.

Поэтому за исключением случая $\hbar \rightarrow 0$ для решения уравнений (1.1), (1.7) в рамках разложения по степеням $\hbar^2$ необходимо суммирование всего ряда, что практически невыполнимо. Таким образом, в общем случае построение даже приближенных решений этих уравнений требует использования методов, выходящих за рамки теории возмущений, которые и будут рассмотрены в настоящей работе.

Второй результат есть прямое следствие применения таких непертурбативных методов анализа уравнений (1.1), (1.7) и состоит в том, что для достаточно глубокой ямы энергетический спектр низколежащих уровней в уравнениях (1.1) и (1.7) выглядит существенно иначе по сравнению со спектрами их дифференциальных аналогов (1.3) и (1.6). Помимо общего свойства эффективного сужения ямы и сдвига уровней вверх по сравнению с решениями (1.3) и (1.6), будет наблюдаться и другой общий эффект, который наиболее удобно описать, если ввести параметризацию собственного значения E операторов (1.1), (1.7) следующего вида:

$$E = \frac{2}{\hbar^2} (\text{ch}(\hbar\omega) - 1) = \frac{4}{\hbar^2} \text{sh}^2 \frac{\hbar\omega}{2}. \quad (1.13)$$

Заметим, что в отличие от E , фигурирующего в уравнениях (1.1), (1.7) как собственное значение исключительно для удобства формулировки соответствующих спектральных задач, параметр ω непосредственно определяет энергию (собственную частоту) соответствующего уровня. Это следует как из общей схемы квантования полей в лоренцевых базисах [9], так и из уравнений (1.4) и (1.5), поскольку при $\hbar \rightarrow 0$ соотношение (1.13) переходит в $E = \omega^2$, что, в свою очередь, означает, что временная зависимость в $\varphi(x, t)$ и $\psi(x, t)$ будет определяться множителем $e^{-i\omega t}$.

Собственно эффект состоит в том, что если для уравнений (1.3) и (1.6) уровни энергии запертых в глубокой яме бозонов и фермионов существенно различны, а именно

$$\omega_n = \frac{\pi + \pi n}{a} \quad (1.14a)$$

для бозонов и, если ограничиться состояниями с положительной энергией,

$$\omega_n = \frac{\pi/2 + \pi n}{a} \quad (1.14b)$$

для фермионов, где $a = 2x_0$ – размер ямы, а $n = 0, 1, 2, \dots$, то для уравнений (1.1), (1.7), как будет показано в настоящей работе, наблюдается обратная ситуация: с ростом глубины ямы энергетические спектры бозонов и фермионов становятся почти идентичными с точностью до поправок, убывающих с ростом V_0 как $(\ln V_0/V_0)^2$.

2. КВАЗИТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ СКАЛЯРНОЙ ЧАСТИЦЫ

Наиболее эффективный подход к решению уравнения (1.1) с потенциалом (1.2), равно как и с любым другим кусочно-постоянным потенциалом, аналогичен решению соответствующего уравнения Шредингера: сначала уравнение (1.1) решается в областях постоянства $V(\xi)$, после чего полученные решения “сшиваются” между собой так, чтобы обеспечить аналитичность решения во всей полосе $|\text{Im } \xi| < \hbar$. При

этом, как и в случае уравнения (1.3), необходимым условием такой сшивки через аналитическое продолжение оказывается уравнение, определяющее уровни энергии.

Прежде чем приступить к реализации этой процедуры, удобно предварительно провести редукцию задачи по симметрии, так как в силу четности потенциала (1.2) все собственные функции уравнения (1.1) делятся на четные и нечетные. Кроме того, из действительности $V(\xi)$ и структуры разностного оператора в (1.1) следует, что $\phi(\xi)$ могут быть выбраны действительными. Поэтому далее без потери общности мы можем ограничиться рассмотрением четных действительных решений уравнения (1.1)

$$\phi(\xi) = \phi(-\xi) = \phi^*(\xi). \quad (2.1)$$

Перенос всех полученных результатов на нечетный случай будет вполне очевиден.

Далее, используем то обстоятельство, что для потенциала (1.2) уровни энергии связанных состояний уравнения (1.1), как и для уравнения (1.3), будут лежать в интервале $0 < E < V_0^2$, и введем удобную для дальнейших выкладок параметризацию. А именно, перейдем от E к собственной частоте уровня ω , введенной в выражении (1.13). Помимо ω нам потребуется ввести еще один параметр $\varkappa$, определяемый соотношением

$$\operatorname{sh}^2 \frac{\hbar\omega}{2} + \sin^2 \frac{\hbar\varkappa}{2} = \left(\frac{\hbar V_0}{2} \right)^2, \quad (2.2)$$

который задает положение $\bar{E}$ уровня относительно верхнего края ямы, а именно

$$V_0^2 - E = |\bar{E}| = \frac{2}{\hbar^2} (1 - \cos(\hbar\varkappa)) = \frac{4}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\hbar\varkappa}{2}. \quad (2.3)$$

По определению $\bar{E}$ всегда отрицательно и лежит в интервале $-V_0^2 < \bar{E} < 0$. При этом, если $|\bar{E}| < 4/\hbar^2$, то $\varkappa$ действительно и $0 < \hbar\varkappa \leq \pi$, а при $|\bar{E}| > 4/\hbar^2$, что соответствует низколежащим уровням в глубокой яме, $\varkappa$ становится комплексным по правилу

$$\varkappa \rightarrow \frac{\pi}{\hbar} + i\alpha, \quad \alpha > 0, \quad (2.4)$$

так что

$$|\bar{E}| = \frac{2}{\hbar^2} (1 + \operatorname{ch}(\hbar\alpha)) = \frac{4}{\hbar^2} \operatorname{ch}^2 \frac{\hbar\alpha}{2}. \quad (2.5)$$

Процедура построения аналитической функции $\phi(\xi)$ из решений уравнения (1.1) в областях постоянства потенциала состоит из двух частей. Сначала, пользуясь известными теоремами исчисления конечных разностей [11], находим для этих областей общие решения, которые являются рядами Дирихле следующей структуры: внутри ямы

$$\phi_{\text{in}}(\xi) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n \xi), \quad |\xi| < \xi_0, \quad (2.6)$$

где

$$i\omega_n = i\omega + \frac{2\pi n}{\hbar}, \quad (2.7)$$

при этом в силу действительности $\phi(\xi)$

$$A_n^* = A_{-n}; \quad (2.8)$$

вне ямы

$$\phi_{\text{out}}(\xi) = \sum_{s=0}^{+\infty} (B_s e^{-\kappa_s |\xi|} + \bar{B}_s e^{-\bar{\kappa}_s |\xi|}), \quad |\xi| > \xi_0, \quad (2.9)$$

где

$$\kappa_s = \kappa + \frac{2\pi s}{\hbar}, \quad \bar{\kappa}_s = \bar{\kappa} + \frac{2\pi s}{\hbar}, \quad (2.10)$$

при этом, если $|\bar{E}| < 4/\hbar^2$, то κ действительно, и тогда

$$\bar{\kappa} = \frac{2\pi}{\hbar} - \kappa, \quad (2.11)$$

а коэффициенты $B_s, \bar{B}_s$ действительны и независимы, а если $|\bar{E}| > 4/\hbar^2$, то κ – комплексное и имеет вид (2.4); тогда

$$\bar{\kappa} = \frac{2\pi}{\hbar} - \kappa = \kappa^* = \frac{\pi}{\hbar} - i\alpha, \quad (2.12)$$

при этом коэффициенты $B_s, \bar{B}_s$ также комплексные, но в силу действительности $\phi(\xi)$ связаны друг с другом соотношением

$$B_s^* = \bar{B}_s. \quad (2.13)$$

На следующем этапе коэффициенты A_n и $B_s, \bar{B}_s$ должны быть связаны таким образом, чтобы функции $\phi_{\text{in}}(\xi)$ и $\phi_{\text{out}}(\xi)$ аналитически продолжались друг в друга через отрезки $(\pm\xi_0 - i\hbar, \pm\xi_0 + i\hbar)$. Заметим, что вопрос о сходимости рядов (2.6) и (2.9) в соответствующих областях рассматривать специально не требуется, так как в силу известных свойств рядов Дирихле она автоматически следует из сходимости этих рядов в точках $\pm\xi_0$, что с необходимостью будет проверяться для найденного таким образом решения.

Для уравнения (1.1) вполне возможен и реализуем прямолинейный способ аналитического продолжения, который состоит в сшивке рядов (2.6) и (2.9) по непрерывности на отрезках $(\pm\xi_0 - i\hbar, \pm\xi_0 + i\hbar)$. Существует, однако, более эффективный способ получения требуемого результата, преимущество которого состоит в том, что при соответствующей модификации он применим и для фермионного случая и практически сразу приводит к уравнениям, которые представляют собой необходимые и достаточные условия аналитического продолжения и содержат либо только коэффициенты A_n , либо $B_s, \bar{B}_s$. Для этого запишем уравнение (1.1) в виде

$$\frac{1}{\hbar^2} [\phi(\xi - i\hbar) + \phi(\xi + i\hbar) - 2\phi(\xi)] + |\bar{E}|\phi(\xi) = V_0^2 \theta(\xi_0 - |\xi|) \phi(\xi) \quad (2.14)$$

и с помощью функции Грина для оператора Λ

$$(\Lambda\phi)(\xi) = \frac{1}{\hbar^2} [\phi(\xi - i\hbar) + \phi(\xi + i\hbar) - 2\phi(\xi)] + |\bar{E}|\phi(\xi) \quad (2.15)$$

перейдем к интегральному уравнению

$$\phi(\xi) = V_0^2 \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} d\xi' G(\xi - \xi') \phi(\xi'), \quad (2.16)$$

где

$$G(\xi) = \frac{\hbar}{2 \operatorname{sh}(\hbar \kappa)} \frac{\operatorname{sh}[(\pi/\hbar - \kappa)\xi]}{\operatorname{sh}[(\pi/\hbar)\xi]}. \quad (2.17)$$

Очевидно, что при подстановке ряда (2.6) в уравнение (2.16) оно должно быть тождеством при $|\xi| < \xi_0$. Более того, поскольку $G(z)$ аналитически продолжается на полосу $|\operatorname{Im} z| < \hbar$, это тождество должно иметь место в прямоугольнике $|\operatorname{Re} \xi| < \xi_0$, $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$. Из этих условий после некоторых преобразований находим искомые уравнения для коэффициентов A_n

$$\sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s + i\omega_n} \right) = 0, \quad (2.18a)$$

$$\sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} \right) = 0, \quad (2.18б)$$

которые должны выполняться для всех $0 \leq s \leq +\infty$. Заметим, что если κ действительное, то уравнения (2.18) представляют собой две различные системы действительных уравнений, которые должны решаться совместно. Если же κ комплексное, то уравнения систем также становятся комплексными, но при этом (2.18a) и (2.18б) комплексно сопряжены друг другу, и в этом случае достаточно рассматривать только одну из них.

Если же рассмотреть уравнение (2.16) при $|\xi| > \xi_0$, то при подстановке в правую часть ряда (2.6) получим выражения для B_s , $\bar{B}_s$ через A_n , которые обеспечивают требуемое аналитическое продолжение функции (2.6) в функцию (2.9):

$$\begin{aligned} B_s e^{-\kappa_s \xi_0} &= \frac{\hbar V_0^2}{2 \sin(\hbar \kappa)} \sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s + i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} \right), \\ \bar{B}_s e^{-\bar{\kappa}_s \xi_0} &= \frac{\hbar V_0^2}{2 \sin(\hbar \bar{\kappa})} \sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} \right). \end{aligned} \quad (2.19)$$

Эту же операцию целесообразно проделать еще раз, переписав исходное уравнение (1.1) в виде

$$E\phi(\xi) - \frac{1}{\hbar^2} [\phi(\xi - i\hbar) + \phi(\xi + i\hbar) - 2\phi(\xi)] = V_0^2 \theta(|\xi| - \xi_0) \phi(\xi) \quad (2.20)$$

и снова перейдя к интегральной форме

$$\phi(\xi) = V_0^2 \left[\int_{-\infty}^{-\xi_0} + \int_{+\xi_0}^{\infty} \right] d\xi' \bar{G}(\xi - \xi') \phi(\xi'), \quad (2.21)$$

где $\bar{G}(\xi)$ имеет вид

$$\bar{G}(\xi) = \frac{\hbar}{2 \operatorname{sh}(\hbar \omega)} \frac{\sin(\omega \xi)}{\operatorname{th}(\pi \xi / \hbar)}. \quad (2.22)$$

Повторяя рассуждения, использованные при переходе от уравнения (2.16) к (2.18), (2.19), из (2.21) при $|\xi| > \xi_0$ получим уравнения для коэффициентов B_s , $\bar{B}_s$:

$$\sum_{s=0}^{\infty} \left[B_s e^{-\kappa_s \xi_0} \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s + i\omega_n} \right) + \bar{B}_s e^{-\bar{\kappa}_s \xi_0} \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} \right) \right] = 0, \quad (2.23)$$

которые должны выполняться для всех $-\infty \leq n \leq +\infty$, а при $|\xi| < \xi_0$ – выражения для A_n через B_s , $\bar{B}_s$, обратные к (2.19):

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{\hbar V_0^2}{2i \operatorname{sh}(\hbar\omega)} e^{i\omega_n \xi_0} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{B_s e^{-\varkappa_s \xi_0}}{\varkappa_s - i\omega_n} + \frac{\bar{B}_s e^{-\bar{\varkappa}_s \xi_0}}{\bar{\varkappa}_s - i\omega_n} \right) = \\ &= -\frac{\hbar V_0^2}{2i \operatorname{sh}(\hbar\omega)} e^{-i\omega_n \xi_0} \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{B_s e^{-\varkappa_s \xi_0}}{\varkappa_s + i\omega_n} + \frac{\bar{B}_s e^{-\bar{\varkappa}_s \xi_0}}{\bar{\varkappa}_s + i\omega_n} \right). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Заметим, что два различных выражения для A_n в выражении (2.24) следуют из того, что A_n удовлетворяют условию (2.8), а уравнение (2.23) при этом может быть получено непосредственно приравнованием этих двух выражений для A_n .

Таким образом, решение исходного уравнения (1.1) с потенциалом (1.2) оказывается эквивалентным одной из бесконечных однородных систем (2.18) или (2.23) для коэффициентов A_n или B_s , $\bar{B}_s$; формальное условие их разрешимости – равенство нулю соответствующего детерминанта, из которого в конечном счете и определяют уровни энергии в этой задаче. Принципиальная сложность проблемы состоит в том, что из-за наличия экспоненциальных множителей $e^{\pm 2\pi n \xi_0 / \hbar}$ в коэффициентах общих методов решения подобных систем в настоящее время не существует. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, для которых получены хотя бы теоремы существования решений, удовлетворяют достаточно жестким условиям убывания коэффициентов [12]. Однако конкретно для систем (2.18), (2.23) оказывается возможным “квазиточное” аналитическое решение, которое позволяет получить практически полную информацию о спектре собственных значений и свойствах волновых функций в весьма широком диапазоне изменения параметров задачи. Основным условием применимости этого метода является достаточная ширина ямы ξ_0 , при которой выполняется условие

$$\lambda = e^{-2\pi \xi_0 / \hbar} \ll 1. \quad (2.25)$$

Заметим, что условие (2.25) является физически вполне допустимым, так как для его выполнения достаточно считать $\xi_0 \geq \hbar$, поскольку уже при $\xi_0 = \hbar$ имеем $\lambda = e^{-2\pi \xi_0 / \hbar} = e^{-2\pi} \simeq 10^{-3}$. Никаких других условий, кроме (2.25), первоначальная формулировка метода не требует, хотя в дальнейшем при проверке соответствия полученных результатов истинному решению появится и ряд других ограничений на параметры задачи, которые, однако, будут существенно более слабыми.

С помощью рассматриваемого метода можно с одинаковой эффективностью решать как “внутреннюю задачу” (2.18) для коэффициентов A_n , так и “внешнюю” систему (2.23). По чисто техническим соображениям, связанным прежде всего с последующим анализом уравнения (1.7) для фермионов, мы разберем здесь оба случая, уделив основное внимание “внешней” задаче (2.23).

Начнем с того, что определим следующую функцию комплексного переменного z :

$$f(z) = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{C_s}{z - \varkappa_s} + \frac{\bar{C}_s}{z - \bar{\varkappa}_s} \right), \quad (2.26)$$

где в целях компактности дальнейших выкладок введены обозначения

$$C_s = B_s e^{-\varkappa_s \xi_0}, \quad \overline{C}_s = \overline{B}_s e^{-\overline{\varkappa}_s \xi_0}. \quad (2.27)$$

В терминах функции $f(z)$ система (2.23) запишется в виде

$$e^{i\omega_n \xi_0} f(i\omega_n) + e^{-i\omega_n \xi_0} f(-i\omega_n) = 0. \quad (2.28)$$

Заметим теперь, что в силу соотношений (2.10)–(2.13) функция $f(z)$ удовлетворяет симметрии отражения Римана–Шварца (условию действительности на вещественной оси)

$$f(z^*) = f^*(z), \quad (2.29)$$

а из определения (2.7) следует, что $(i\omega_n)^* = -i\omega_{-n}$. С помощью этих соотношений легко видеть, что в системе (2.28), равно как и в (2.23), уравнения с номерами $(\pm n)$ являются комплексно-сопряженными друг другу, поэтому для решения этих систем достаточно уравнений с $n \geq 0$.

Для дальнейших действий наиболее существенным обстоятельством является условие (2.25), которое означает, что для $n > 0$ второе слагаемое в системе (2.28) будет иметь малый множитель $e^{-2\pi n \xi_0 / \hbar} = \lambda^n$. Естественнo предположить, что при $n > 0$ второе слагаемое в (2.28) будет мало по сравнению с первым и может быть учтено как поправка в рамках разложения по степеням λ . Нулевой порядок такого разложения – приближение “широкой ямы” – имеет для системы (2.28) при $n > 0$ вид

$$f(i\omega_n) = 0, \quad n > 0. \quad (2.30)$$

Из (2.29) при этом следует, что функция $f(z)$ одновременно должна обращаться в нуль при $z = (i\omega_n)^* = -i\omega_{-n}$, т.е. в этом приближении функция $f(z)$ будет иметь в правой полуплоскости нули, которые располагаются парами в точках

$$z_n = \pm i\omega_{\pm n} = \pm i\omega + \frac{2\pi n}{\hbar}, \quad n > 0. \quad (2.31)$$

Следует отметить, что появление $(\pm\omega)$ в нулях функции $f(z)$ имеет весьма простое объяснение: в рамках уравнения (1.1) параметр ω вводится соотношением (1.13), в котором его знак не фиксируется и далее при решении нигде не используется. Поэтому оба знака ω абсолютно равноправны, и именно это обстоятельство находит свое отражение в нулях $f(z)$.

Покажем теперь, что, помимо уравнений (2.29)–(2.31) функция $f(z)$ обладает рядом дополнительных свойств, позволяющих восстановить ее вид с точностью до постоянного множителя. Сначала учтем, что из условия конечности функции $\phi_{\text{out}}(\xi)$ при $\xi = \xi_0$ следует, что ряд

$$\sum_s (C_s + \overline{C}_s) = \phi_{\text{out}}(\xi_0) \quad (2.32)$$

сходится; тогда по признаку Абеля–Дирихле сходится и ряд $\sum_{s>0} (C_s + \overline{C}_s)/s$. С другой стороны, $(C_s + \overline{C}_s)/s$ есть старший член асимптотики ряда в правой части

(2.26) для $s \rightarrow \infty$, поэтому ряд (2.26) будет сходиться для всех $z \neq \varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$. (Ниже мы подтвердим эти свойства сходимости явным вычислением асимптотик коэффициентов C_s и $\bar{C}_s$.) Тем самым функция $f(z)$ является мероморфной с простыми полюсами в точках $\varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$, причем

$$f(z) \rightarrow \frac{\phi(\xi_0)}{z}, \quad |z| \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

где $\phi(\xi_0) = \phi_{\text{in}}(\xi_0) = \phi_{\text{out}}(\xi_0)$ есть значение волновой функции $\phi(\xi)$ при $\xi = \xi_0$. При этом асимптотика (2.33) справедлива для всех лучей, кроме проходящих параллельно и на конечном расстоянии от вещественной положительной полуоси. В последнем случае, если $z \rightarrow \infty$ вдоль такого луча, в ряду (2.26) всегда найдется слагаемое с таким номером $s \rightarrow \infty$, для которого знаменатели $z - \varkappa_s, z - \bar{\varkappa}_s$ будут конечны, а в окрестности полюсов вообще сколь угодно малы, поэтому на таких лучах ряд (2.26) будет иметь существенно более сложную асимптотику осциллирующего типа.

Предположим теперь, что $f(z)$ не имеет других нулей, кроме как в точках (2.31), и все эти нули простые. Тогда после приведения к общему знаменателю правой части уравнения (2.26) функция $f(z)$ будет представлять собой отношение двух целых функций, знаменателем в котором будет бесконечное произведение вида $\prod_s (z - \varkappa_s)(z - \bar{\varkappa}_s)$. Легко видеть, что числитель этого отношения должен быть тогда бесконечным произведением, условное “число” сомножителей в котором на единицу меньше, чем у знаменателя. При этом числитель должен обнуляться в точках (2.31) и только в них, поэтому такое произведение должно иметь вид $\prod_{n>0} (z - i\omega_n)(z + i\omega_{-n})$. В результате находим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \frac{A}{z - \varkappa} \prod_{k \geq 0} \frac{(z - i\omega_{k+1})(z + i\omega_{-(k+1)})}{(z - \varkappa_{k+1})(z - \bar{\varkappa}_k)}, \quad (2.34)$$

где внешний множитель $(z - \varkappa)^{-1}$ учитывает разницу “степеней” числителя и знаменателя.

Легко проверить, что $\prod_k$ в выражении (2.34) сходится. Более того, используя известное соотношение для Γ -функций

$$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \gamma)\Gamma(\beta - \gamma)} = \prod_0^\infty \frac{k + \alpha + \gamma}{k + \alpha} \frac{k + \beta - \gamma}{k + \beta}, \quad (2.35)$$

можно получить для $f(z)$ следующее представление:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{A}{z - \varkappa} \frac{\Gamma[1 - \hbar(z - \varkappa)/(2\pi)]\Gamma[1 - \hbar(z + \varkappa)/(2\pi)]}{\Gamma[1 - \hbar(z - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[1 - \hbar(z + i\omega)/(2\pi)]} = \\ &= A' \frac{\Gamma[-\hbar(z - \varkappa)/(2\pi)]\Gamma[-\hbar(z - \bar{\varkappa})/(2\pi)]}{\Gamma[1 - \hbar(z - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[1 - \hbar(z + i\omega)/(2\pi)]}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $A' = -\hbar A/(2\pi)$. Из условия (2.29) и соотношений (2.11), (2.12) при этом следует, что A, A' — действительные множители:

$$A = A^*, \quad A' = A'^*, \quad (2.37)$$

причем и представление (2.36), и соотношения (2.37) имеют место как для действительных, так и для комплексных значений $\varkappa$.

Далее, из представления (2.36) для всех лучей, кроме параллельных положительной полуоси, находим

$$f(z) \rightarrow \frac{A}{z}, \quad |z| \rightarrow \infty. \quad (2.38)$$

Тогда из совпадения асимптотик (2.33) и (2.38) следует, что никаких других нулей, кроме как в точках (2.31), функция $f(z)$ иметь не может, причем все имеющиеся нули должны быть обязательно простыми. Действительно, любой дополнительный нуль в некоторой точке ζ (или нуль кратности больше 1 в одной из точек z_n) добавляет к выражению (2.36) множитель $(z - \zeta)(z - \zeta^*)$, что, в свою очередь, добавляет к асимптотике $f(z)$ дополнительный множитель z^2 , а это противоречит (2.33). В результате, как и было анонсировано выше, функция $f(z)$ оказывается однозначно определенной с точностью до действительного множителя A .

Заметим теперь, что для определения $f(z)$ мы использовали только уравнение (2.28) при $n > 0$, тогда как полный набор независимых уравнений системы (2.28) включает еще и уравнение при $n = 0$. В последнем множители типа $e^{\pm 2\pi n \xi_0 / \hbar}$ отсутствуют, поэтому одинаково значимыми являются оба слагаемых $e^{\pm i\omega \xi_0} f(\pm i\omega)$. В результате после подстановки вместо $f(\pm i\omega)$ выражений (2.36) это уравнение сводится к

$$e^{2i\omega \xi_0} = \frac{\Gamma(-i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma(i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]}, \quad (2.39)$$

представляющему собой уравнение для уровней энергии в рассматриваемом приближении “широкой ямы”, когда в системе (2.28) для $n > 0$ можно пренебречь слагаемым с убывающей экспонентой $e^{-2\pi n \xi_0 / \hbar}$.

Рассмотрим теперь основные свойства коэффициентов A_n и C_s , $\bar{C}_s$ и волновой функции $\phi(\xi)$, соответствующих такому приближенному решению уравнения (1.1). Для этого заметим, что при известной функции $f(z)$ коэффициенты A_n и C_s , $\bar{C}_s$ находятся весьма просто. В частности, C_s , $\bar{C}_s$ являются вычетами $f(z)$ в полюсах:

$$C_s = \text{Res}[f(z), z = \varkappa_s], \quad \bar{C}_s = \text{Res}[f(z), z = \bar{\varkappa}_s],$$

и имеют следующий явный вид:

$$\begin{aligned} C_s &= A \frac{\sin[\hbar(\varkappa + i\omega)/2] \sin[\hbar(\varkappa - i\omega)/2]}{\pi \sin(\hbar\varkappa)} \frac{\Gamma[s + \hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[s + \hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[s + 1]\Gamma[s + \hbar\varkappa/\pi]} = \\ &= -A' \frac{\hbar V_0^2}{2 \sin(\hbar\varkappa)} \frac{\Gamma[s + \hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[s + \hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[s + 1]\Gamma[s + \hbar\varkappa/\pi]}, \\ \bar{C}_s &= A \frac{\sin[\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/2] \sin[\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/2]}{\pi \sin(\hbar\bar{\varkappa})} \frac{\Gamma[s + \hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[s + \hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[s + 1]\Gamma[s + \hbar\bar{\varkappa}/\pi]} = \\ &= -A' \frac{\hbar V_0^2}{2 \sin(\hbar\bar{\varkappa})} \frac{\Gamma[s + \hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[s + \hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[s + 1]\Gamma[s + \hbar\bar{\varkappa}/\pi]}, \end{aligned} \quad (2.40)$$

где использовано соотношение

$$\sin \frac{\hbar(\varkappa + i\omega)}{2} \sin \frac{\hbar(\varkappa - i\omega)}{2} = \sin \frac{\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)}{2} \sin \frac{\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)}{2} = \left(\frac{\hbar V_0}{2} \right)^2. \quad (2.41)$$

Для асимптотики этих коэффициентов при больших s из (2.40) тут же следует, что они убывают как $O(1/s)$, отличаясь при этом только знаком:

$$\begin{aligned} C_s &\rightarrow -A' \frac{\hbar V_0^2}{2s \sin(\hbar \varkappa)}, & s \rightarrow \infty, \\ \overline{C}_s &\rightarrow -A' \frac{\hbar V_0^2}{2s \sin(\hbar \varkappa)} = A' \frac{\hbar V_0^2}{2s \sin(\hbar \varkappa)}, & s \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Тем самым сумма $C_s + \overline{C}_s$ убывает как $O(1/s^2)$, что гарантирует как сходимость ряда (2.32) для $\phi_{\text{out}}(\xi_0)$, так и мероморфность $f(z)$ на всей комплексной плоскости. Из (2.42) также следует сходимость ряда для $\phi_{\text{out}}(\xi_0 + iy)$

$$\phi_{\text{out}}(\xi_0 + iy) = \sum_s (C_s e^{-i\varkappa s y} + \overline{C}_s e^{-i\varkappa s y}) \quad (2.43)$$

при $y \in (-\hbar, +\hbar)$. Однако если в ряде (2.32) для $\phi_{\text{out}}(\xi_0)$ логарифмические расходимости от $\sum_s C_s$ и $\sum_s \overline{C}_s$ сокращаются за счет противоположных знаков в асимптотиках (2.42), то в $\phi_{\text{out}}(\xi_0 \pm i\hbar)$ эти слагаемые входят с неравными при $\varkappa \neq 0, \pi/\hbar$ постоянными множителями $e^{\pm i\hbar \varkappa}$:

$$\phi_{\text{out}}(\xi_0 \pm i\hbar) = e^{\mp i\hbar \varkappa} \sum_s C_s + e^{\pm i\hbar \varkappa} \sum_s \overline{C}_s. \quad (2.44)$$

Тем самым $\phi(\xi)$ имеет логарифмические особые точки при $z = \pm \xi_0 + in\hbar$, $n \neq 0$, и соответствующие вертикальные разрезy. Отметим, что для уравнения (1.1) данный результат имеет строгое обоснование вне рамок какого-либо приближения [7].

Коэффициенты внутреннего решения A_n находятся с помощью соотношений (2.24) непосредственно по значениям функции $f(z)$ в точках $z = \pm i\omega_n$, следует только выбирать то из выражений (2.24), которое обеспечивает убывание A_n с ростом $|n|$. Учитывая последнее обстоятельство, для $n \geq 0$ получим

$$\begin{aligned} A_n &= -\frac{\hbar V_0^2}{2i \operatorname{sh}(\hbar \omega)} e^{-i\omega_n \xi_0} f(-i\omega_n) = \\ &= -A' \frac{\hbar V_0^2}{2i \operatorname{sh}(\hbar \omega)} e^{-i\omega_n \xi_0} \frac{\Gamma[n + \hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)] \Gamma[n + 1 - \hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[n + 1] \Gamma[n + 1 + i\hbar \omega/\pi]}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (2.45)$$

при этом коэффициенты A_n , $n < 0$, определяются из (2.45) как A_{-n}^* . Заметим, что выражения (2.45) для коэффициентов A_n можно также получить, решая непосредственно систему уравнений (2.18) внутренней задачи в том же приближении, когда опускаются все слагаемые, содержащие убывающие экспоненты $e^{-2\pi n \xi_0/\hbar}$, $n > 0$. Спектральное уравнение (2.39) при этом есть не что иное, как условие действительности коэффициента A_0 .

Область применимости приближения (2.30) определяется малостью невязки, возникающей при переходе от уравнения (2.28) к (2.30) для $n > 0$. Сама по себе эта невязка есть $e^{-i\omega_n \xi_0} f(-i\omega_n)$, причем множитель A в представлении (2.36) теперь никакой роли не играет и его можно опустить, так что

$$f(-i\omega_n) = \frac{\Gamma[n + \hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)] \Gamma[n + 1 - \hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[n + 1] \Gamma[n + 1 + i\hbar \omega/\pi]}. \quad (2.46)$$

Отсюда следует, что если

$$\frac{\hbar\kappa}{\pi} < 1, \quad \frac{\hbar\omega}{\pi} < 1, \quad (2.47a)$$

то поведение $|f(-i\omega_n)|$ при $n \geq 1$ является вполне монотонным с фактическим выходом на асимптотику $|f(-i\omega_n)| \rightarrow 1/n$ уже при конечных $n \gg 1$. В этих условиях убывающая экспонента $e^{-2\pi n\xi_0/\hbar}$ гарантирует малость невязки для всех $n \geq 1$, и тем самым приближение “широкой ямы” заведомо применимо до тех пор, пока глубина ямы удовлетворяет условию

$$V_0 < \frac{2}{\hbar}. \quad (2.47b)$$

Более того, легко видеть, что если

$$\hbar\omega \ll 1, \quad \hbar\kappa \ll 1 \quad (2.48a)$$

и тем самым

$$\hbar V_0 \ll 1, \quad (2.48b)$$

то уравнение (2.39) превращается в уравнение для четных уровней соответствующей шредингеровской задачи (1.3):

$$\operatorname{tg}(\omega\xi_0) = \frac{\sqrt{V_0^2 - \omega^2}}{\omega}. \quad (2.49)$$

Если при этом глубина ямы V_0 растет от нуля до критического значения $2/\hbar$, то найденное в приближении (2.30) решение $\phi(\xi)$ уравнения (1.1) в целом повторяет поведение шредингеровской волновой функции, качественно отличаясь от последней только наличием переходных областей размером $O(\hbar/\pi)$ между внутренним (почти) косинусом и убывающей (почти) экспонентой вне ямы, а также и более сложной зависимостью от V_0 базовых волновых чисел внутреннего и внешнего решений $\omega(V_0)$ и $\kappa(V_0)$ (и тем самым $E(V_0)$), которые вне рамок условия (2.48) определяются из значительно более сложных по сравнению со шредингеровским случаем уравнений (2.2) и (2.39). Численный анализ этих уравнений тем не менее показывает, что при глубине ямы меньше критической для каждого уровня энергии соответствующее базовое волновое число $\kappa(V_0)$ внешнего решения растет с увеличением V_0 , поэтому растет и скорость убывания $\phi(\xi)$ вне ямы, как и в шредингеровском случае.

Если же глубина ямы V_0 превышает критическое значение $2/\hbar$, то для низколежащих уровней, положение которых относительно верхнего края ямы (2.3) удовлетворяет условию

$$|\overline{E}| > \frac{4}{\hbar^2}, \quad (2.50)$$

поведение $\phi(\xi)$ существенно меняется за счет того, что теперь $\kappa = \pi/\hbar + i\alpha$, где α определяется из выражения (2.5). Для таких глубоких уровней поведение $\phi(\xi)$ во внешней области становится осциллирующим с периодом $2\pi/\alpha$ и амплитудой, которая убывает как $e^{-\pi|\xi|/\hbar}$ вне зависимости от положения уровня и глубины ямы, а при дальнейшем росте V_0 увеличивается только частота осцилляций. Сами же уровни энергии при условии (2.50) находятся из уравнения

$$e^{2i\omega\xi_0} = \frac{\Gamma(-i\hbar\omega/\pi) \Gamma[1/2 + i\hbar(\omega + \alpha)/(2\pi)] \Gamma[1/2 + i\hbar(\omega - \alpha)/(2\pi)]}{\Gamma(i\hbar\omega/\pi) \Gamma[1/2 - i\hbar(\omega + \alpha)/(2\pi)] \Gamma[1/2 - i\hbar(\omega - \alpha)/(2\pi)]}. \quad (2.51)$$

Пока глубина ямы V_0 незначительно превышает критическое значение $2/\hbar$, так что $|\hbar(\omega \pm \alpha)/(2\pi)|$ ограничены сверху порядком $O(1)$, приближение (2.30) по-прежнему вполне оправданно, поскольку в этих условиях поведение $|f(-i\omega_n)|$ при $n \geq 1$ незначительно отличается от случая (2.47). Убывающие экспоненты $e^{-2\pi n \xi_0/\hbar}$ снова гарантируют малость невязки для всех $n \geq 1$, а поправки, обусловленные вторым слагаемым $e^{-i\omega_n \xi_0} f(-i\omega_n)$ в уравнении (2.28), эффективно учитываются с помощью теории возмущений по степеням λ . Положения уровней при этом с высокой точностью находятся из системы (2.2), (2.51). Сильная нелинейность последней допускает только численный анализ, результаты которого можно наглядно описать при условии $4/\hbar^2 \gg 1$. Заметим, что в рамках исходной задачи последнее условие является вполне реалистическим. Если оно выполняется, то нижние уровни в соответствующем уравнении Шредингера (1.3) практически совпадают с уровнями в бесконечно глубокой яме шириной $a = 2x_0$, которые для четного случая находятся из уравнения

$$e^{i\omega a} = -1. \quad (2.52)$$

В то же время из (2.2) и (2.51) следует, что при этих условиях нижние уровни в уравнении (1.1) оказываются сдвинутыми вверх по отношению к шредингеровским, т.е. для этих уровней в уравнении (1.1) эффективная ширина ямы становится меньше геометрической.

С дальнейшим ростом глубины ямы этот эффект становится все более выраженным и может быть получен в аналитической форме непосредственно из уравнения (2.51) для V_0^2 , значительно превышающих критическое значение:

$$V_0^2 \gg \frac{4}{\hbar^2}, \quad (2.53)$$

когда для нижних уровней будут выполняться условия

$$\omega \ll \alpha, \quad \frac{\hbar\alpha}{2\pi} \gg 1. \quad (2.54)$$

Для этого случая в нулевом приближении по ω/α уравнение (2.51) может быть представлено в виде, аналогичном (2.52), а именно

$$e^{i\omega a_{\text{eff}}} = -1, \quad (2.55)$$

причем эффективная ширина ямы $a_{\text{eff}} = 2(\xi_0 - \Delta\xi_0)$ оказывается меньше геометрической на

$$2\Delta\xi_0 = \frac{2\hbar}{\pi} \ln \frac{\hbar\alpha}{2\pi}. \quad (2.56)$$

Из уравнений (2.55), (2.56) при этом следует, что в области (2.53), (2.54) с ростом V_0 нижние уровни постоянно сдвигаются вверх относительно их шредингеровских аналогов (2.52), хотя и весьма медленно – “дважды логарифмически”, поскольку для таких V_0 при $\omega \ll \alpha$ будем иметь

$$|\bar{E}| \simeq V_0^2, \quad \hbar\alpha \simeq \ln(\hbar^2 V_0^2). \quad (2.57)$$

Заметим также, что такие “нижние уровни” теперь заполняют достаточно большой интервал по энергии, так как условия (2.54), (2.57) могут быть совместны с $\hbar\omega \gg 1$.

Подробный анализ пределов применимости приближения “широкой ямы” (2.30) для низколежащих уровней в такой глубокой яме, когда выполняются соотношения (2.53), (2.54), приведен в работе [7]. Здесь же мы ограничимся лишь формулировкой основного результата, который состоит в том, что для самых нижних уровней, для которых $\hbar\omega$ порядка $O(1)$, соотношения (2.55), (2.56) будут иметь место при выполнении условия

$$\frac{\hbar}{\pi} \ln \frac{\hbar\alpha}{2\pi} \ll \xi_0. \quad (2.58)$$

Таким образом, предписываемое уравнениями (2.55), (2.56) сужение ямы и рост нижних уровней могут быть строго обоснованы только пока эти эффекты достаточно малы. Тем не менее эти эффекты вполне наблюдаемы, так как в силу дважды логарифмического характера они имеют место в весьма широком диапазоне изменения глубины ямы V_0 , а именно

$$1 \ll \left(\frac{\hbar V_0}{2} \right)^2 \ll \exp(2\pi e^{\pi\xi_0/\hbar}), \quad (2.59)$$

который очень быстро (дважды экспоненциально) увеличивается с ростом ширины ямы ξ_0 . Так, при $\xi_0 \simeq 2\hbar$ в неравенстве (2.59) ограничение на $\hbar^2 V_0^2$ сверху задается числом порядка 1000^{1000} .

3. КВАЗИТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ДЛЯ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ФЕРМИОНОВ

Общий метод исследования спектральной задачи (1.7) для релятивистских связанных состояний фермионов во многом аналогичен случаю скалярной частицы, рассмотренному в разделе 2. Более того, ряд соотношений, выведенных в разделе 2 для скалярного случая, автоматически переносится и на задачу для фермионов. В то же время решение уравнения (1.7) имеет свои специфические особенности, которым и будет уделено основное внимание.

Как и в бозонном случае, наиболее эффективный подход к уравнению (1.7) состоит в нахождении решений для каждой из областей постоянства потенциалов с последующим их сшиванием между собой таким образом, чтобы обеспечить аналитичность решения во всей полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$. Однако в случае уравнения (1.7) еще в большей степени, чем для уравнения (1.1), до начала реализации этой процедуры необходимо провести редукцию задачи по симметрии, которая позволит существенно упростить дальнейшие выкладки.

В данном случае из структуры разностного оператора в (1.7), действительности и четности $V(\xi)$, действительности и нечетности $\rho(\xi)$ следует, что решения уравнения (1.7) всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли при вещественном ξ соотношениям

$$\chi(-\xi) = \eta_1 \gamma^0 \chi(\xi), \quad \chi^*(\xi) = \eta_2 \gamma^0 \chi(\xi), \quad (3.1a)$$

где $\eta_1 = \pm 1$, $\eta_2 = \pm 1$ – независимые знаковые множители. Заметим, что такой же симметрией обладает и дифференциальное уравнение (1.6). Чтобы обобщить симметрию (3.1a) на всю полосу $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$, будем рассматривать в уравнении (1.7) не непосредственно разрывные потенциалы (1.2) и (1.8), а (несобственный) предельный переход к ним через сглаженный аналитический в полосе $|\operatorname{Im} z| < \hbar$ четный потенциал $\sigma(z) = \sigma(-z)$, обладающий дополнительно свойством действительности на вещественной оси $\sigma^*(z) = \sigma(z^*)$, и его нечетную производную $\nu(z) = -\nu(-z)$, которая также будет удовлетворять условию действительности $\nu^*(z) = \nu(z^*)$. В рамках такого предельного перехода легко показать, что симметрии (3.1a) решений уравнения (1.7) на вещественной оси будут соответствовать следующие соотношения в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$:

$$\chi(-\xi) = \eta_1 \gamma^0 \chi(\xi), \quad \chi^*(\xi) = \eta_2 \gamma^0 \chi(\xi^*), \quad (3.16)$$

где $\eta_{1,2}$ – такие же независимые знаковые множители, что и в (3.1a).

Далее заметим, что из соотношений (3.1) следует

$$\chi(0) = \eta_1 \eta_2 \chi^*(0).$$

В то же время, поскольку любое решение уравнения (1.7) содержит произвол в виде фазового множителя, всегда можно считать одну из компонент в $\chi(0)$ действительной, откуда $\eta_1 \eta_2 = 1$. Иными словами, без потери общности в соотношениях (3.1) можно положить

$$\eta_1 = \eta_2 = \eta = \pm 1. \quad (3.2)$$

Следует отметить, что, как и в исходном дифференциальном уравнении (1.6), соотношения (3.1) – не единственный тип симметрии решений уравнения (1.7). А именно, на совершенно равноправной основе можно было бы рассматривать решения уравнения (1.7), которые удовлетворяют соотношениям, аналогичным (3.1), но с заменой $\gamma^0 \rightarrow \gamma_5$, причем эти два типа симметрии решений друг с другом не коммутируют, т.е. для редукции можно использовать либо γ^0 -, либо γ_5 -тип соотношений (3.1). В данном случае, однако, в отличие от γ_5 -типа симметрии, соотношения (3.1), содержащие γ^0 -матрицу, будут иметь место не только для квадрированного уравнения (1.7), но и непосредственно для исходного уравнения Дирака (1.5) и его конечно-разностной формы, которая возникает после перехода к лоренцевым базисам [9]. По этой причине мы далее будем исходить именно из вышеприведенных соотношений (3.1) с матрицей γ^0 как из наиболее фундаментального типа симметрии, наследуемого от исходных уравнений.

Дальнейшие выкладки требуют использования конкретного представления γ -матриц, которое в данном случае выбирается в “киральном” виде:

$$\gamma^0 = \sigma_1, \quad \gamma^1 = i\sigma_2, \quad \gamma_5 = \sigma_3. \quad (3.3)$$

Отчасти такое представление мотивировано тем, что уравнение (1.7) имеет непосредственное отношение к моделям киральных кварковых мешков в $(1+1)$ -мерном случае [13]. В представлении (3.3) для верхней и нижней компонент u , v спинора

$$\chi = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

из уравнения (1.7) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar^2}[u(\xi - i\hbar) + u(\xi + i\hbar) - 2u(\xi)] + V(\xi)u(\xi) + i\rho(\xi)v(\xi) &= Eu(\xi), \\ \frac{1}{\hbar^2}[v(\xi - i\hbar) + v(\xi + i\hbar) - 2v(\xi)] + V(\xi)v(\xi) - i\rho(\xi)u(\xi) &= Ev(\xi). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Соотношения (3.1) при этом имеют следующий вид:

$$u(-\xi) = \eta v(\xi), \quad u^*(\xi) = \eta v(\xi^*), \quad (3.6)$$

так что при любом знаке η для u, v выполняются

$$u(-\xi) = u^*(\xi^*), \quad v(-\xi) = v^*(\xi^*). \quad (3.7)$$

Из соотношений (3.6) и (3.7) следует, что если перейти от u, v к их линейным комбинациям a, b ,

$$\begin{aligned} a(\xi) &= u(\xi) + v(\xi) = u(\xi) + \eta u(-\xi) = u(\xi) + \eta u^*(\xi^*), \\ b(\xi) &= u(\xi) - v(\xi) = u(\xi) - \eta u(-\xi) = u(\xi) - \eta u^*(\xi^*), \end{aligned} \quad (3.8)$$

то последние будут обладать определенной четностью, причем при вещественных ξ четная функция будет действительной, а нечетная – мнимой:

$$a(\xi) = \eta a(-\xi) = \eta a^*(\xi^*), \quad b(\xi) = -\eta b(-\xi) = -\eta b^*(\xi^*). \quad (3.9)$$

В терминах $a(\xi)$ и $b(\xi)$ уравнения (3.5) переписутся в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\hbar^2}[a(\xi - i\hbar) + a(\xi + i\hbar) - 2a(\xi)] + V(\xi)a(\xi) - i\rho(\xi)b(\xi) &= Ea(\xi), \\ \frac{1}{\hbar^2}[b(\xi - i\hbar) + b(\xi + i\hbar) - 2b(\xi)] + V(\xi)b(\xi) + i\rho(\xi)a(\xi) &= Eb(\xi). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Удобство перехода от u, v к a, b состоит прежде всего в том, что решения уравнения (3.10), соответствующие различным знакам η , т.е. различной четности, будут связаны друг с другом максимально простым образом. Действительно, пусть $\eta = +1$, тогда $a(\xi)$ – четно и действительно при вещественном ξ , а $b(\xi)$ – нечетно и мнимо. При $\eta = -1$ эти свойства $a(\xi)$ и $b(\xi)$ меняются на противоположные, поэтому решения уравнений (3.10) для этого случая будут соответствовать решениям этих уравнений для $\eta = +1$ при другом знаке функции $\rho(\xi)$, что, в свою очередь, достигается сменой знака параметра V_0 , задающего глубину ямы в исходном уравнении Дирака (1.5). Таким образом, достаточно рассмотреть решения уравнений (3.10) для случая $\eta = +1$, когда $a(\xi)$ – четно и действительно, а $b(\xi)$ – нечетно и мнимо. Переход к случаю $\eta = -1$ будет при этом эквивалентен простой замене знака $V_0 \rightarrow -V_0$ в решениях уравнений (3.10), полученных для $\eta = +1$.

Следующий этап решения уравнения (1.7) практически полностью повторяет соответствующие действия при решении уравнения (1.1). Сначала находим общие

решения уравнений (3.10) для областей постоянства потенциалов. Для $\eta = +1$ эти решения будут иметь следующий вид: внутри ямы

$$a_{\text{in}}(\xi) = 2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} A_n \cos(\omega_n \xi), \quad |\xi| < \xi_0, \quad (3.11a)$$

$$b_{\text{in}}(\xi) = 2i \sum_{n=-\infty}^{+\infty} B_n \sin(\omega_n \xi), \quad |\xi| < \xi_0, \quad (3.11b)$$

где ω_n определено так же, как и в (2.7), при этом в силу действительности $a(\xi)$ и мнимости $b(\xi)$ коэффициенты рядов Дирихле (3.11) удовлетворяют одинаковому условию, аналогичному (2.8):

$$A_n^* = A_{-n}, \quad B_n^* = B_{-n}; \quad (3.12)$$

вне ямы

$$a_{\text{out}}(\xi) = \sum_{s=0}^{+\infty} (C_s e^{-\varkappa_s |\xi|} + \overline{C}_s e^{-\bar{\varkappa}_s |\xi|}), \quad |\xi| > \xi_0, \quad (3.13)$$

$$b_{\text{out}}(\xi) = -b_{\text{out}}(-\xi) = \sum_{s=0}^{+\infty} (D_s e^{-\varkappa_s \xi} + \overline{D}_s e^{-\bar{\varkappa}_s \xi}), \quad |\xi| > \xi_0,$$

где $\varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$ определены теми же соотношениями (2.10)–(2.12), что и для скалярного случая. При этом для действительных $\varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$ коэффициенты $C_s, \overline{C}_s$ – действительные и независимые, $D_s, \overline{D}_s$ – чисто мнимые и независимые, а при комплексных $\varkappa_s = \bar{\varkappa}_s^*$ будут иметь место соотношения $C_s^* = \overline{C}_s, D_s^* = -\overline{D}_s$.

Особенностью фермионной задачи является невозможность прямолинейной сшивки по непрерывности рядов (3.11) и (3.13) на отрезках $(\pm\xi_0 - i\hbar, \pm\xi_0 + i\hbar)$. В отличие от скалярного случая эти ряды будут теперь сходиться при $\xi = \pm\xi_0$ (и тем самым при $|\operatorname{Re} \xi| < \xi_0$ и $|\operatorname{Re} \xi| > \xi_0$, определяя в этих областях соответствующие аналитические функции), но при $\xi = \pm\xi_0 + iy$ они будут расходиться для всех $y \neq 0$. Это никоим образом не противоречит условию аналитичности $\chi(\xi)$ во всей полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$, так как аналитическая функция может и не быть представима в виде ряда Дирихле в каждой точке из области аналитичности, но требует другого способа аналитического продолжения через отрезки $(\pm\xi_0 - i\hbar, \pm\xi_0 + i\hbar)$. В данном случае таким способом оказывается метод интегральных уравнений, рассмотренный в разделе 2. Как и для скалярного случая, этот метод достаточно рассмотреть либо для “внутренней” задачи, либо для “внешней”, так как каждая из них обеспечивает аналитическое продолжение функций $a(\xi)$ и $b(\xi)$, заданных на вещественной оси либо внутри ямы на отрезке $[-\xi_0, +\xi_0]$ (“внутренняя” задача), либо вне ямы при $|\xi| \geq \xi_0$ (“внешняя” задача), на всю полосу $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$.

Из-за некоторой громоздкости выкладок, имеющих место в фермионном случае по той причине, что здесь мы с самого начала имеем дело с системой двух уравнений вместо одного, далее мы будем рассматривать только “внутреннюю” задачу. Более подробное исследование уравнений (3.10), включающее как “внутреннюю”, так и “внешнюю” задачи, а также ряд тонких моментов в решении, которые здесь в

целях компактности изложения будут лишь кратко упоминаться, будет проведено в отдельной работе.

Интегральная форма “внутренней” задачи для уравнений (3.10) в развернутом виде представляется системой

$$a(\xi) = V_0^2 \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} d\xi' G(\xi - \xi') a(\xi') + iV_0 [G(\xi - \xi_0) b(\xi_0) - G(\xi + \xi_0) b(-\xi_0)], \quad (3.14a)$$

$$b(\xi) = V_0^2 \int_{-\xi_0}^{+\xi_0} d\xi' G(\xi - \xi') b(\xi') - iV_0 [G(\xi - \xi_0) a(\xi_0) - G(\xi + \xi_0) a(-\xi_0)], \quad (3.14b)$$

где $G(\xi)$, как и в разделе 2, является функцией Грина разностного оператора (2.15) и имеет вид (2.17). Далее, пользуясь теми же аргументами, что и в разделе 2 при переходе от уравнения (2.16) к (2.18), из (3.14) получим следующую систему алгебраических уравнений для коэффициентов A_n , B_n рядов (3.11):

$$\sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} \right) - i \frac{b(\xi_0)}{V_0} = 0, \quad (3.15a)$$

$$\sum_n A_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} + \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} \right) - i \frac{b(\xi_0)}{V_0} = 0,$$

$$\sum_n B_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} - \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s + i\omega_n} \right) + i \frac{a(\xi_0)}{V_0} = 0, \quad (3.15b)$$

$$\sum_n B_n \left(\frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} - \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} \right) + i \frac{a(\xi_0)}{V_0} = 0,$$

которые должны выполняться для всех $0 \leq s \leq +\infty$.

Как и в скалярном случае, для системы (3.15) оказывается возможным явное аналитическое решение в приближении “широкой ямы” (2.25), когда опускаются все слагаемые, содержащие экспоненциально малые множители $\lambda^n = e^{-2\pi n \xi_0 / \hbar}$, $n > 0$. Тогда уравнения (3.15a) будут иметь вид

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} A_n \frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s - i\omega_n} + \sum_{n \leq 0} A_n \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\kappa_s + i\omega_n} - B &= 0, \\ \sum_{n \geq 0} A_n \frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s - i\omega_n} + \sum_{n \leq 0} A_n \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{\bar{\kappa}_s + i\omega_n} - B &= 0, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где мы для краткости положили

$$B = \frac{ib(\xi_0)}{V_0}. \quad (3.17)$$

Повторяя далее схему рассуждений, использованную в разделе 2 при построении аналитического решения в таком приближении, предположим сходимость ряда (3.11a) в точках $\pm \xi_0$, которая ниже будет специально проверена для найденного таким образом решения. Тогда функция

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} A_n \frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{z - i\omega_n} + \sum_{n \leq 0} A_n \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{z + i\omega_n} - B \quad (3.18)$$

мероморфна на всей комплексной плоскости переменной z с простыми полюсами при $z_n = \pm i\omega + 2\pi n/\hbar$, $n \geq 0$, обладает при этом симметрией отражения Римана–Шварца типа (2.29)

$$F^*(z) = F(z^*)$$

и асимптотикой вида

$$F(z) \rightarrow -B + \frac{a(\xi_0)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right) \quad (3.19)$$

при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда в терминах $F(z)$ уравнения (3.16) будут соответствовать нулям функции $F(z)$ в точках $\varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$:

$$F(\varkappa_s) = F(\bar{\varkappa}_s) = 0, \quad 0 \leq s \leq \infty. \quad (3.20)$$

Отметим, что, как и для ряда (2.26), асимптотика (3.19) неравномерна. Если $z \rightarrow \infty$ вдоль лучей, параллельных вещественной положительной полуоси, то в ряду (3.18) всегда найдутся слагаемые с такими n , что знаменатели $z \pm i\omega_n$ будут конечны, если не малы. В результате на таких лучах ряд (3.18) вместо равномерного убывания будет осциллировать, благодаря чему и возникает нетривиальное решение уравнений (3.16).

Специфика задачи для фермионов состоит в том, что прямое применение метода, с помощью которого в разделе 2 по нулям и полюсам восстанавливалась функция $f(z)$, определенная соотношениями (2.26) и (2.29)–(2.31), для $F(z)$ оказывается невозможным, так как бесконечное произведение, построенное для $F(z)$ с помощью уравнений (3.18), (3.20) по аналогии с $f(z)$, будет расходиться. Тем не менее оказывается возможной модификация этого метода, позволяющая восстановить $F(z)$, как и $f(z)$ в разделе 2, с точностью до постоянного множителя. Опуская технические детали этой процедуры, которые будут рассмотрены в отдельной работе, приведем здесь лишь окончательный результат:

$$F(z) = C(z - \gamma) \frac{\Gamma[-\hbar(z - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[-\hbar(z + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[-\hbar(z - \varkappa)/(2\pi)]\Gamma[-\hbar(z - \bar{\varkappa})/(2\pi)]}, \quad (3.21)$$

где $C = C^*$, $\gamma = \gamma^*$, а явные значения действительных параметров C и γ будут определены ниже с помощью ряда дополнительных построений. Прежде чем перейти к их изложению, убедимся в том, что выражение (3.21) для $F(z)$ совместно с условием сходимости ряда (3.11a) для функции $a_{\text{in}}(\xi)$ в точках $\xi = \pm\xi_0$. Для этого, как и в разделе 2, определим коэффициенты A_n этого ряда через вычеты функции $F(z)$ в полюсах. Прямое вычисление с использованием соотношений (2.41) дает

$$\begin{aligned} A_n e^{i\omega_n \xi_0} &= \text{Res}[F(z), z = i\omega_n] = \\ &= C \frac{\hbar V_0^2}{2i \text{sh}(\hbar\omega)} (i\omega_n - \gamma) \frac{\Gamma[n + \hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[n + \hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[n + 1]\Gamma[n + 1 + i\hbar\omega/\pi]}, \quad n \geq 0, \end{aligned} \quad (3.22)$$

при этом коэффициенты A_n , $n < 0$, определяются из (3.22) как A_{-n}^* .

Из выражения (3.22) для асимптотики A_n при $n \rightarrow \infty$ находим

$$A_n e^{i\omega_n \xi_0} = C \frac{\pi V_0^2}{i \operatorname{sh}(\hbar \omega)} \left[1 + \frac{\hbar(K - \gamma)}{2\pi n} \right] + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3.23)$$

где

$$K = \hbar \frac{[2\omega^2 + \varkappa^2 + \bar{\varkappa}^2 - (2\pi/\hbar)^2]}{4\pi} = \frac{\hbar(\omega^2 - \varkappa \bar{\varkappa})}{2\pi}, \quad (3.24)$$

причем отсюда следует, что K – всегда действительная величина.

Таким образом, первые два члена в асимптотике $A_n e^{i\omega_n \xi_0}$ при $n \rightarrow \infty$ оказываются имеющими порядок $O(1)$ и $O(1/n)$, но при этом являются чисто мнимыми. В то же время по построению ряд (3.11a) на вещественной оси является суммой действительных слагаемых вида

$$A_n e^{i\omega_n \xi} + (A_n e^{i\omega_n \xi})^* = 2 \operatorname{Re}[A_n e^{i\omega_n \xi}], \quad (3.25)$$

поэтому при $\xi = \pm \xi_0$ асимптотика общего члена (3.25) ряда (3.11a) будет иметь вид $O(1/n^2)$. Это обеспечивает его сходимость при $\xi = \pm \xi_0$ и, как следствие, непрерывность функции $a_{\text{in}}(\xi)$ на всем отрезке $[-\xi_0, +\xi_0]$, включая граничные точки, что, в свою очередь, гарантирует возможность построения аналитической в полосе $|\operatorname{Im} \xi| < \hbar$ функции $a(\xi)$ через интегральное представление (3.14a).

Однако если $\xi = \pm \xi_0 + iy$, $y \neq 0$, то такой компенсации расходимостей в ряду (3.11a) уже не происходит, так как его общий член теперь будет иметь вид

$$[e^{-\omega y} A_n e^{\pm i\omega_n \xi_0} + e^{\omega y} (A_n e^{\pm i\omega_n \xi_0})^*] e^{i2\pi n y / \hbar}. \quad (3.26)$$

В результате при $\xi = \pm \xi_0 + iy$ ряд (3.11a) сначала на интервале $0 < |y| < \hbar$ становится “ограниченно колеблющимся” [14], затем при $y = \pm \hbar$ он расходится таким образом, что функция $a(\xi)$ при $\xi = \pm \xi_0 \pm i\hbar$ будет иметь полюсную и логарифмическую особенности, от которых начинаются вертикальные разрезы, а особенности далее будут повторяться для всех $\xi = \pm \xi_0 + in\hbar$, $n \neq 0$. Отметим, что появление полюсов у функции $a(\xi)$ при $\xi = \pm \xi_0 \pm i\hbar$ есть прямое следствие наличия членов с $\delta(\xi \pm \xi_0)$ в исходных уравнениях (1.7) и (3.10), поскольку их компенсация происходит именно за счет этих полюсных особенностей в $a(\xi)$ и $b(\xi)$ (подробнее об этом см. в работе [7]).

Общий вывод, таким образом, состоит в том, что функция $a(\xi)$ в комплексной плоскости по переменной ξ будет аналитична в областях $|\operatorname{Re} \xi| < \xi_0$ и $|\operatorname{Re} \xi| > \xi_0$, между которыми проходят вертикальные разрезы, идущие от точек $\pm \xi_0 + i\hbar$ и $\pm \xi_0 - i\hbar$ соответственно вверх и вниз, а в точках $\xi = \pm \xi_0 + in\hbar$, $n \neq 0$, функция $a(\xi)$ имеет дополнительно простые полюсы и логарифмическую особенность. Отметим, что, как и для скалярного случая, на основе проведенного в работе [7] анализа можно показать, что такая структура функции $a(\xi)$ будет иметь место не только в рассматриваемом приближении “широкой ямы”, но и вообще вне рамок какого-либо приближения, т.е. является общим свойством решений исходного уравнения (1.7) с разрывными потенциалами (1.2) и (1.8).

Перейдем теперь к определению значений параметров C и γ , фигурирующих в выражении (3.21) для $F(z)$. Для этого из (3.21) с точностью $O(1/z^2)$ находим асимптотику $F(z)$ при $|z| \rightarrow \infty$ (с теми же оговорками о статусе этой асимптотики, что и

для (3.19)):

$$F(z) \rightarrow -\frac{2\pi C}{\hbar} \left[1 + \frac{K - \gamma}{z} \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (3.27)$$

где K определено выражением (3.24), и сравним (3.27) с асимптотикой $F(z)$ в форме (3.19), которая следует непосредственно из исходного определения $F(z)$ через ряд (3.18) с учетом теперь уже гарантированного свойства сходимости ряда (3.11a) в точках $\pm\xi_0$. В результате из выражений (3.19) и (3.27) получим соотношения, связывающие C и γ с $a(\xi_0)$ и $b(\xi_0)$, а именно

$$C = \frac{\hbar B}{2\pi}, \quad (3.28)$$

где B определяется выражением (3.17), и

$$C(K - \gamma) = -\frac{\hbar a(\xi_0)}{2\pi}. \quad (3.29)$$

Аналогичным образом в приближении “широкой ямы” находится явное аналитическое решение для уравнения (3.156), а именно, в этом приближении функция

$$H(z) = \sum_{n \geq 0} B_n \frac{e^{i\omega_n \xi_0}}{z - i\omega_n} - \sum_{n \leq 0} B_n \frac{e^{-i\omega_n \xi_0}}{z + i\omega_n} + A, \quad (3.30)$$

$$A = \frac{ia(\xi_0)}{V_0}, \quad (3.31)$$

равна нулю в точках $z = \varkappa_s, \bar{\varkappa}_s$:

$$H(\varkappa_s) = H(\bar{\varkappa}_s) = 0, \quad 0 \leq s \leq \infty, \quad (3.32)$$

и обладает симметрией отражения Римана–Шварца вида $H(z^*) = -H^*(z)$, являясь тем самым чисто мнимой на вещественной оси. Предполагая далее сходимость ряда (3.116) при $\xi = \pm\xi_0$, которая проверяется совершенно таким же образом, как и сходимость ряда (3.11a), для функции $H(z)$ будем иметь мероморфность на всей комплексной плоскости переменной z с простыми полюсами при $z_n = \pm i\omega + 2\pi n/\hbar$, $n \geq 0$, и асимптотику при $|z| \rightarrow \infty$ вида

$$H(z) \rightarrow A + \frac{b(\xi_0)}{z} + O\left(\frac{1}{z^2}\right). \quad (3.33)$$

(Как и во всех других асимптотиках такого типа, здесь исключается вещественная положительная полуось и параллельные ей лучи.)

Восстановление явного вида функции $H(z)$ по совокупности этих условий дает

$$H(z) = D(z - \delta) \frac{\Gamma[-\hbar(z - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[-\hbar(z + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma[-\hbar(z - \varkappa)/(2\pi)]\Gamma[-\hbar(z - \bar{\varkappa})/(2\pi)]}, \quad (3.34)$$

где $D = -D^*$, $\delta = \delta^*$. Коэффициенты B_n ряда (3.116) определяются далее через вычеты функции (3.34). Опуская ряд промежуточных выкладок, вполне аналогичных

проведенным выше для вычисления коэффициентов A_n и их асимптотик, сформулируем конечный результат. Асимптотика коэффициентов B_n при $n \rightarrow \infty$ снова оказывается такой, что ряд (3.116) сходится при $\xi = \pm \xi_0$ и тем самым определяет непрерывную функцию $b_{\text{in}}(\xi)$ на всем отрезке $[-\xi_0, +\xi_0]$. При этом на всей комплексной плоскости по переменной ξ функция $b(\xi)$, определенная первоначально в полосе $|\text{Im } \xi| < \hbar$ через интегральное представление (3.146), имеет такую же структуру областей аналитичности, разрывов и особых точек, что и функция $a(\xi)$. Разница между $a(\xi)$ и $b(\xi)$ здесь состоит лишь в том, что $a(\xi)$ – четная и действительная на вещественной оси, а $b(\xi)$ – нечетная и на вещественной оси имеет чисто мнимые значения.

Далее, из сравнения выражения (3.33) с аналогичной по статусу асимптотикой $H(z)$, следующей из (3.34):

$$H(z) \rightarrow -\frac{2\pi D}{\hbar} \left[1 + \frac{K - \delta}{z} \right] + O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad (3.35)$$

где K задается тем же выражением (3.24), что и в (3.27), находим связь параметров D и δ с $a(\xi_0)$ и $b(\xi_0)$:

$$D = \frac{\hbar A}{2\pi}, \quad (3.36)$$

где A определено формулой (3.31), и

$$D(K - \delta) = -\frac{\hbar b(\xi_0)}{2\pi}. \quad (3.37)$$

Тогда из совокупности уравнений (3.17), (3.28), (3.29), (3.31), (3.36), (3.37) получим следующее соотношение для параметров γ , δ :

$$(K - \gamma)(K - \delta) = V_0^2. \quad (3.38)$$

Завершающий этап решения уравнений (3.15) в рассматриваемом приближении (3.20), (3.32) состоит в следующем. Из условия $A_0 = A_0^*$ и явного вида (3.22) для коэффициентов A_n находим уравнение для фермионных уровней энергии:

$$e^{2i\omega\xi_0} = \frac{i\omega - \gamma}{i\omega + \gamma} \frac{\Gamma(1 - i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma(1 + i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]}. \quad (3.39)$$

Далее, из условия $B_0 = B_0^*$ и выражений для коэффициентов B_n , следующих из (3.34), также получаем спектральное уравнение, которое в данном случае будет иметь вид

$$e^{2i\omega\xi_0} = -\frac{i\omega - \delta}{i\omega + \delta} \frac{\Gamma(1 - i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma(1 + i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]}. \quad (3.40)$$

Однако уравнения (3.39), (3.40) должны совпадать, что дает еще одно соотношение для параметров γ и δ :

$$\frac{i\omega - \gamma}{i\omega + \gamma} = -\frac{i\omega - \delta}{i\omega + \delta}, \quad (3.41)$$

откуда $\gamma\delta = -\omega^2$. В результате из соотношений (3.38) и (3.41) для окончательного определения параметров γ , δ через входные данные задачи получаем квадратное уравнение

$$x^2 + \frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{K}x - \omega^2 = 0, \quad (3.42)$$

причем γ и δ должны быть его различными корнями. Таким образом,

$$\begin{aligned} \gamma &= -\frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{2K} \pm \sqrt{\left(\frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{2K}\right)^2 + \omega^2}, \\ \delta &= -\frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{2K} \mp \sqrt{\left(\frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{2K}\right)^2 + \omega^2} \end{aligned} \quad (3.43)$$

и всегда действительны, что обеспечивает требуемую симметрию функций $F(z)$ и $H(z)$ при комплексном сопряжении для всего диапазона возможного изменения параметров задачи.

В результате спектральное уравнение для определения уровней энергии связанных состояний фермионов в приближении “широкой ямы” имеет вид

$$e^{2i\omega\xi_0} = \frac{\gamma - i\omega}{\gamma + i\omega} \frac{\Gamma(-i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa + i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} + i\omega)/(2\pi)]}{\Gamma(+i\hbar\omega/\pi)\Gamma[\hbar(\varkappa - i\omega)/(2\pi)]\Gamma[\hbar(\bar{\varkappa} - i\omega)/(2\pi)]} \quad (3.44)$$

и отличается от соответствующего уравнения для уровней скалярной частицы (2.39) фазовым множителем

$$S = \frac{\gamma - i\omega}{\gamma + i\omega}, \quad (3.45)$$

где γ определяется из соотношений (3.43). Заметим также, что входящий в γ параметр K , как и $\varkappa$, зависит только от V_0^2 , поэтому уравнение (3.44) определяет фермионные уровни для обоих типов решений уравнения (1.7), соответствующих двум возможным знакам $\eta = \pm 1$ в соотношениях (3.1).

Подробное исследование полученного таким образом решения уравнения (1.7), включающее условия для параметров задачи, при которых для $\hbar \ll 1$ возможен корректный гладкий переход к его дифференциальному аналогу (1.6), а также статус приближения (3.20), (3.32) для фермионов, будет проведено в отдельной работе. Здесь же мы остановимся на свойствах фермионного спектра, следующих из уравнения (3.44) для низколежащих уровней в глубокой яме, когда выполняются те же условия (2.53), (2.54), что и в рассмотренном в разделе 2 случае скалярной частицы в глубокой яме. При этих условиях для параметра K из формулы (3.24) получаем

$$K = \frac{\hbar[\omega^2 - \alpha^2 - (\pi/\hbar)^2]}{2\pi} \simeq -\frac{\ln^2(\hbar^2 V_0^2)}{2\pi\hbar}, \quad (3.46)$$

поэтому в рассматриваемом случае $K^2 \ll V_0^2$. Тогда два возможных значения $\gamma_{\pm}$ параметра γ , соответствующие знакам $\pm$ в соотношениях (3.43), будут вести себя

следующим образом:

$$\gamma_+ = \frac{V_0^2 - K^2 + \omega^2}{|K|} + O\left(\frac{|K|}{V_0^2}\right), \quad (3.47)$$

$$\gamma_- = -\frac{\omega^2}{\gamma_+} = O\left(-\frac{|K|}{V_0^2}\right). \quad (3.48)$$

Тем самым γ_+ растет как $(V_0/\ln V_0)^2$, γ_- убывает как $(-1/\gamma_+)$, фазовый множитель (3.45) имеет вид

$$S(\gamma_{\pm}) = \pm 1 + O\left(\left(\frac{\ln V_0}{V_0}\right)^2\right), \quad (3.49)$$

а уравнение (3.44) с точностью до поправок порядка $O((\ln V_0/V_0)^2)$ будет совпадать со спектральным уравнением (2.51) для четных (в случае $\gamma = \gamma_+$) или нечетных (для $\gamma = \gamma_-$) уровней скалярной частицы в глубокой яме.

Заметим, что такое совпадение уровней бозонов и фермионов в глубокой яме имеет вполне простое и наглядное объяснение непосредственно в терминах уравнений (3.15). Действительно, если выполняется условие (2.50), то модули $|a(\xi)|$ и $|b(\xi)|$ убывают вне ямы примерно как $e^{-\pi|\xi|/\hbar}$ вне зависимости от V_0 . Поэтому увеличение степени локализации волновой функции фермиона внутри ямы, которое является необходимым условием для достижения локального минимума энергетического функционала, обеспечивается теперь практически только за счет убывания значений $a(\xi_0)$ и $b(\xi_0)$ на краях ямы. Таким образом, $a(\xi_0)$ и $b(\xi_0)$ не только всегда конечны, но и обязательно убывают с ростом V_0 . Как следствие, для больших V_0 в уравнениях (3.15) слагаемые $a(\xi_0)/V_0$ и $b(\xi_0)/V_0$ становятся малыми. В нулевом порядке малости по этим слагаемым уравнения (3.15) будут тождественны соответствующим уравнениям “внутренней” задачи для скалярной частицы. В частности, для четных уровней в пренебрежении членом $b(\xi_0)/V_0$ уравнение (3.15a) переходит в уравнение (2.18), а для нечетного случая уравнение (3.15b) без слагаемого $a(\xi_0)/V_0$ в точности воспроизводит соответствующее уравнение для нечетных состояний скалярной частицы. Более того, из уравнений (3.17), (3.29), (3.31) и (3.37) следует, что

$$\frac{a(\xi_0)}{b(\xi_0)} = \frac{A}{B} = \frac{K - \gamma}{iV_0} = -\frac{iV_0}{K - \delta}, \quad (3.50)$$

поэтому для глубокой ямы и четных уровней, когда $\gamma = \gamma_+$, отношение $|a(\xi_0)/b(\xi_0)|$ оценивается как

$$\left|\frac{a(\xi_0)}{b(\xi_0)}\right| \simeq \frac{V_0}{|K|} \quad (3.51)$$

и тем самым растет как $O(V_0/\ln^2 V_0)$. Поэтому для четных уровней в глубокой яме в спиноре $\chi(\xi)$ доминирует четная компонента $a(\xi)$, а нечетная подавлена как $O(\ln^2 V_0/V_0)$. При этом $a(\xi)$ будет вести себя подобно четной скалярной волновой функции $\phi(\xi)$. В случае нечетных уровней, когда $\gamma = \gamma_-$, реализуется обратная ситуация. А именно, в оценке (3.51) $a(\xi_0)$ и $b(\xi_0)$ меняются местами, поэтому в спиноре $\chi(\xi)$ теперь доминирует нечетная компонента $b(\xi)$, которая будет (почти) совпадать с нечетной волновой функцией скаляра.

Таким образом, в такой глубокой яме, когда выполняются условия (2.53), (2.54), низколежащие уровни энергии релятивистских связанных состояний бозонов и фермионов, равно как и их волновые функции, становятся почти идентичными. При этом, так же как и для скалярной частицы, для фермионов эффективная ширина ямы будет меньше геометрической на величину $2\Delta\xi_0$, определенную соотношением (2.56). Следует, однако, подчеркнуть, что эти эффекты имеют место только при выполнении условий (2.25), (2.59), когда можно надежно гарантировать соответствие теории возмущений по λ с уравнениями (3.20), (3.32) в качестве нулевого приближения точному решению уравнений (3.10). Такая ситуация является наглядной демонстрацией уже упоминавшейся в разделе 1 конкуренции между $\hbar$ и параметрами ямы, что является общей характерной особенностью конечно-разностных задач типа (1.1), (1.7). В частности, если фиксировано ненулевое $\hbar$, то всегда можно указать такой интервал значений глубины и ширины ямы, когда условия (2.25), (2.59) выполняются и поведение нижних уровней будет соответствовать описанной выше картине. С другой стороны, если фиксировано конечное V_0 , то при предельно малых $\hbar$ условие (2.59) заведомо будет нарушено, и реализуется ситуация, когда свойства решений уравнений (1.1), (1.7) будут близки к своим дифференциальным аналогам.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведенный в данной работе анализ релятивистских связанных состояний бозонов и фермионов в $(1+1)$ -мерном случае показывает, что динамические уравнения типа уравнений (1.1), (1.7) с конечными чисто мнимыми сдвигами (радиального) аргумента на $\pm i\hbar$, естественным образом возникающие в ряде актуальных проблем квантовой теории поля [5], [6], по целому ряду аспектов радикально отличаются от своих дифференциальных аналогов. Это проявляется прежде всего в том, что структура спектра и свойства волновых функций начинают существенно зависеть от соотношения между $\hbar$ и параметрами потенциала $V(\xi)$, причем вполне возможна ситуация, когда при $\hbar \ll 1$ решения уравнений (1.1), (1.7) не будут иметь ничего общего с решениями дифференциальных аналогов – нерелятивистского уравнения Шредингера (1.3) и (квадрированного) уравнения Дирака (1.6).

Следует также отметить, что на качественном уровне эффективное сужение размеров ямы и совпадение спектров связанных состояний бозонов и фермионов для низколежащих уровней в глубокой яме обусловлены прежде всего конечно-разностной структурой функционала кинетической энергии (1.10) в релятивистском конфигурационном представлении. Действительно, с увеличением глубины для достижения локального минимума энергии волновая функция связанного состояния стремится сконцентрироваться внутри ямы. Однако в отличие от дифференциальных уравнений (1.3) и (1.6), где это достигается за счет двух факторов – во-первых, за счет все меньшего коэффициента при убывающей экспоненте и, во-вторых, за счет все более быстрого убывания этой экспоненты, – здесь второй фактор ограничен из-за специфического поведения кинетического функционала (1.10). А именно, скалярная волновая функция $\phi(\xi)$ (равно как и фермионные $a(\xi)$ и $b(\xi)$), убывающая

вне ямы быстрее, чем $e^{-\pi|\xi|/\hbar}$, будет иметь высокочастотную часть спектра как у сглаженного (почти) прямоугольника, фурье-образ $\tilde{\phi}(k)$, убывающий медленнее, чем $e^{-\hbar|k|/2}$, при $|k| \rightarrow \infty$, и в силу (1.11) бесконечную кинетическую энергию. Следовательно, с ростом V_0 мы сначала, в докритической области (2.47), будем получать повторение нормальной картины (уменьшение как коэффициента, так и глубины проникновения за пределы ямы). Затем, когда V_0^2 достигнет критического значения $4/\hbar^2$, глубина проникновения в запрещенную область станет порядка $O(\hbar/\pi)$ и более уменьшаться не будет, а при дальнейшем росте V_0 убывать будет только коэффициент при экспоненте. В результате для таких релятивистских состояний положительный вклад в энергию уровня за счет кинетической энергии убывает с ростом глубины ямы в закритической области (2.53) значительно медленнее, чем для уравнений (1.3), (1.6), что и приводит к наблюдаемому эффекту сдвига нижних уровней вверх по отношению к соответствующим решениям этих уравнений.

По сути та же причина лежит в основе совпадения уровней энергии релятивистских связанных состояний бозонов и фермионов в глубокой яме. Действительно, существенное различие между уровнями (1.14) для бозонов и фермионов, запертых внешним статическим потенциалом (1.2), есть прямое следствие разницы в граничных условиях, с которыми решаются дифференциальные уравнения (1.3), (1.6) в такой задаче на удержание частиц. А именно, вытекающее из постановки задачи граничное условие для скалярной частицы есть

$$\varphi(\pm x_0, t) = 0, \quad (4.1a)$$

тогда как для фермионов оно заменяется на

$$(i\gamma^1 \pm 1)\psi(\pm x_0, t) = 0, \quad (4.1b)$$

при этом вне ямы их волновые функции (почти) тождественно равны нулю. В то же время для уравнений (1.1), (1.7), описывающих релятивистскую систему, в которой потенциальная яма возникает как результат взаимодействия и по существу является эффективным самосогласованным полем для составляющих данную систему частиц, образуя тем самым с ними единый комплекс, граничные условия (4.1) более не действительны, так как теперь волновые функции частиц всегда проникают в запрещенную область. При этом с ростом глубины ямы этот эффект приобретает все более универсальный характер, одинаковый для бозонов и фермионов: вне ямы их волновые функции осциллируют с периодом $2\pi/\alpha$ и амплитудой, которая убывает как $e^{-(\pi/\hbar)|\xi|}$ и от значения V_0 вообще не зависит; с ростом V_0 увеличивается только частота осцилляций. Тем самым вместо различных граничных условий (4.1) для релятивистских связанных состояний бозонов и фермионов в глубокой яме мы имеем практически идентичное поведение волновых функций с одинаковой глубиной проникновения в запрещенную область порядка $O(\hbar/\pi)$ и соответственно (почти) совпадающие уровни энергии.

Отметим также, что приближения (2.30) и (3.20), (3.32) с учетом нескольких первых поправок по малому параметру λ (2.25) позволяют получить практически точное решение уравнений (1.1), (1.7) в весьма широком диапазоне значений параметров задачи, актуальных с точки зрения физических приложений. Фактически

единственный принципиальный нерешенный вопрос, который заведомо оказывается вне рамок этого метода, – поведение энергетических уровней и волновых функций при $V_0 \rightarrow \infty$ для фиксированных $\hbar$ и ξ_0 . Однако физическая актуальность этого вопроса проблематична, так как уже при $\xi_0 \simeq 2\hbar$ приближение “широкой ямы” применимо вплоть до $\hbar^2 V_0^2 \simeq 1000^{1000}$, что во многих аспектах может рассматриваться как бесконечно большое число.

Благодарности. Данная работа выполнена при поддержке Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-4476.2006.2).

Список литературы

- [1] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29** (1963), 380.
- [2] В. Г. Кадышевский, *ЖЭТФ*, **46** (1964), 654; 872; *ДАН СССР*, **160** (1965), 573.
- [3] V. G. Kadyshevsky, *Nucl. Phys. B*, **6** (1968), 125; V. G. Kadyshevsky, M. D. Mateev, *Nuovo Cimento A*, **55** (1968), 275.
- [4] V. G. Kadyshevsky, R. M. Mir-Kasimov, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento A*, **55** (1968), 233; В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, М. Фриман, *ЯФ*, **9** (1969), 646; M. Freeman, M. D. Mateev, R. M. Mir-Kasimov, *Nucl. Phys. B*, **12** (1969), 197; В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, Р. М. Мир-Касимов, *ЯФ*, **11** (1970), 692; В. Г. Кадышевский, Р. М. Мир-Касимов, Н. Б. Скачков, *ЭЧАЯ*, **2** (1971), 635; Н. Б. Скачков, И. Л. Соловцов, *ЭЧАЯ*, **9** (1978), 5; А. Д. Донков, В. Г. Кадышевский, М. Д. Матеев, *ТМФ*, **50** (1982), 360.
- [5] V. I. Savrin, N. B. Skachkov, *Nuovo Cimento Lett.*, **29** (1980), 363; V. I. Savrin, A. V. Sidorov, N. B. Skachkov, *Hadronic J.*, **4** (1981), 1642; В. А. Матвеев, В. И. Саврин, А. Н. Сисакян, А. Н. Тавхелидзе, *ТМФ*, **132** (2002), 267.
- [6] K. Sveshnikov, *Phys. Lett. A*, **136** (1989), 1; К. А. Свешников, *ТМФ*, **82:1** (1990), 55.
- [7] К. А. Свешников, П. К. Силаев, *ТМФ*, **132** (2002), 408.
- [8] К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер, *Квантовая теория поля*, т. 1, Мир, М., 1978.
- [9] К. А. Свешников, *ТМФ*, **74** (1988), 373; **75** (1988), 218.
- [10] К. А. Свешников, П. К. Силаев, *ТМФ*, **108** (1996), 212; K. Sveshnikov, P. Silaev, I. Cherednikov, *Mod. Phys. Lett. A*, **12** (1997), 465.
- [11] А. О. Гельфонд, *Исчисление конечных разностей*, Физматгиз, М., 1967.
- [12] Л. В. Канторович, В. И. Крылов, *Приближенные методы высшего анализа*, ГИТТЛ, М., 1949; В. В. Воеводин, *Численные методы алгебры. Теория и алгоритмы*, Наука, М., 1966; В. В. Воеводин, Е. Е. Тыртышников, *Вычислительные процессы с теплицевыми матрицами*, Наука, М., 1987.
- [13] К. А. Свешников, П. К. Силаев, *ТМФ*, **117** (1998), 263; И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, С. М. Федоров, М. Ф. Халили, *ТМФ*, **132** (2002), 238; И. Ю. Малахов, К. А. Свешников, *ТМФ*, **132** (2002), 363.
- [14] Г. Харди, *Расходящиеся ряды*, ИЛ, М., 1951.

Поступила в редакцию 17.05.2006