Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Я. Файнберг, Связь между уравнениями Фоккера–Планка–Колмогорова и нелинейными уравнениями Ланжевена, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 3, 483–501

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5539>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 10:11:39

© 2006 г.

В. Я. Файнберг*

СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ФОККЕРА–ПЛАНКА–КОЛМОГОРОВА И НЕЛИНЕЙНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ЛАНЖЕВЕНА

Напоминается доказательство утверждения о том, что поведение любой голономной нерелятивистской системы может быть описано в терминах уравнения Ланжевена в евклидовом (мнимом) времени, так что для определенных начальных условий различные стохастические корреляторы совпадут (после их усреднения по стохастической силе) с квантово-механическими корреляторами. Уравнение Фоккера–Планка–Колмогорова, которое следует из этого уравнения Ланжевена, эквивалентно уравнению Шредингера в евклидовом времени, если гамильтониан является эрмитовым, динамика описывается потенциальными силами, вакуумное состояние нормируемо и имеется энергетическая щель между вакуумным и первым возбужденным состояниями. Эти условия необходимы для доказательства предельной и эргодической теорем. Для трех точно решаемых моделей с нелинейными уравнениями Ланжевена показано, что соответствующие уравнения Шредингера удовлетворяют всем перечисленным выше условиям и приводят к локальным линейным уравнениям Фоккера–Планка–Колмогорова с производными не выше второго порядка. Кроме того, кратко обсуждается ряд нетривиальных математических вопросов стохастического анализа.

Ключевые слова: уравнения Ланжевена, евклидово пространство.

1. ВВЕДЕНИЕ

Главной задачей этой работы является поиск условий, при которых нелинейные уравнения Ланжевена непротиворечиво приводят к локальным уравнениям Фоккера–Планка–Колмогорова (ФПК). Проблема неэквивалентности между нелинейными уравнениями Ланжевена и уравнениями ФПК обсуждается с 1954 г. [1]. Сегодня стохастические методы особенно интересны в свете их применений в финансовой математике [2] и в финансовом инжиниринге. Кроме того, в течение двух последних десятилетий проблема неэквивалентности обсуждалась в связи с открытием нового стохастического подхода Паризи и Ву [3] к квантовой теории поля.

Мы не будем здесь обсуждать работы Ван Кампена и других авторов [4], посвященные детальному анализу определенных процессов, для которых нелинейные

*Физический институт им. П. Н. Лебедева РАН, Москва, Россия. E-mail: fainberg@lpi.ru

уравнения Ланжевена не приводят к локальным уравнениям ФПК второго порядка. В данной работе рассматриваются только нелинейные уравнения Ланжевена, соответствующие локальным уравнениям ФПК с производными не выше второго порядка.

В разделе 2 мы напоминаем общее доказательство эквивалентности уравнений ФПК и уравнений Шредингера в евклидовом (мнимом) времени, согласно которому при определенных условиях стохастические средние совпадают с квантовомеханическими. В разделе 3 исследуется связь между нелинейными уравнениями Ланжевена, уравнениями Шредингера и соответствующими уравнениями ФПК для трех точно решаемых моделей. В разделе 4 приведено обсуждение полученных результатов. В приложении А демонстрируется ограничение на параметр γ в случае задачи Морзе. В приложении Б приводится обзор некоторых общих математических концепций стохастического анализа, использующихся в этой статье, главной из которых является связь между квантованием методом континуального интеграла и методом стохастического квантования.

Ниже будет показано, что предпринимавшиеся ранее попытки доказательств путем разложения равновесного распределения в ряд внутренне противоречивы, так как при этом игнорируется существенная особенность в нуле для некоторого важного параметра (см. конец раздела 3). В локальные уравнения ФПК входят пространственные производные не выше второго порядка.

2. СТОХАСТИЧЕСКОЕ КВАНТОВАНИЕ В МНИМОМ ВРЕМЕНИ

Рассмотрим классическую n -частичную гамильтонову систему с пространственными степенями свободы $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n$, в мнимом времени t , гамильтониан которой имеет вид [5]

$$\overline{H}_0 = -\frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i^2} + V(\mathbf{x}_i^2). \quad (1)$$

После замены координат $x_i = \sqrt{m/2} q_i$ (для простоты символы векторов в дальнейшем опускаются, $\mathbf{q}_i \equiv q_i$) гамильтониан принимает вид

$$\overline{H} = -\sum_i \frac{\partial^2}{\partial q_i^2} + \tilde{V}(q). \quad (2)$$

Покажем, что существует такой голономный стохастический процесс, что после усреднения по стохастической силе возникают соответствующие квантовые корреляторы в мнимом (евклидовом) времени.

Рассмотрим уравнение Ланжевена

$$\frac{\partial}{\partial t} q_i \equiv \dot{q}_i = -\gamma \frac{\partial S}{\partial q_i} + \eta_i(t), \quad (3)$$

где S – еще не известный потенциал динамических сил, зависящий только от q_i , а η_i – стохастический белый шум:

$$\langle \eta(t) \rangle_\eta = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_j(t') \rangle_\eta = 2\gamma \delta_{ij} \delta(t - t'). \quad (4)$$

Для простоты выберем следующие начальные условия для уравнения (3):

$$q_i(t_0) = 0, \quad t_0 \text{ произвольно.} \quad (5)$$

Тогда представление произвольной корреляционной функции в виде интеграла по путям примет вид

$$\langle q_{i_1}(t_1) \dots q_{i_N}(t_N) \rangle_\eta = M \int \mathcal{D}\eta(t) q_{i_1}(t_1) \dots q_{i_N}(t_N) \exp \left\{ -\frac{1}{4\gamma} \int_{t_0}^{\infty} \eta_i^2(\tau) d\tau \right\}, \quad (6)$$

где

$$M^{-1} = \int \mathcal{D}\eta(t) \exp \left\{ -\frac{1}{4\gamma} \int_{t_0}^{\infty} \eta_i^2(\tau) d\tau \right\}.$$

В этих и в следующих формулах подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

При $t_1 = t_2 = \dots = t_N = t$ имеем

$$\langle q_{i_1}(t) \dots q_{i_N}(t) \rangle_\eta = \int \prod_i dq_i dq_{i_1}(t) \dots dq_{i_N}(t) \mathcal{P}(q, t), \quad (7)$$

где

$$\mathcal{P}(q, t) = M \int \mathcal{D}\eta(t) \prod_{i=1}^N \delta(q_i - q_i^\eta(t)) \exp \left\{ -\frac{1}{4\gamma} \int_{t_0}^{\infty} \eta_i^2(\tau) d\tau \right\} \quad (8)$$

– производящий функционал ФПК, удовлетворяющий уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{P}(q, t)}{\partial t} = \gamma \partial_i e^{-S} (\partial e^S \mathcal{P}(q, t)), \quad \partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial q_i}. \quad (9)$$

Вводя обозначение (для $\gamma = 1$)

$$\Psi(q, t) = e^{S/2} \mathcal{P}(q, t), \quad (10)$$

получим

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\bar{H} \Psi, \quad (11)$$

где

$$\bar{H} = -e^{S/2} \partial_i e^{-S} \partial_i e^{S/2} = -\partial_i^2 + \frac{1}{4} (\partial_i S)^2 - \frac{1}{2} \partial_i^2 S \quad (12)$$

– эрмитов оператор. Из (11) и (12) следует, что низшее (вакуумное) состояние системы с энергией E_0 есть

$$\Psi_0(q) = C_0 e^{-S/2}, \quad (13)$$

где C_0 – нормировочный коэффициент.

Сравнивая (12) с (1), мы видим, что (с точностью до константы, равной вакуумной энергии H_0 в (1)) оба гамильтониана приводят к идентичным уравнениям Шредингера, если

$$\bar{H} = \bar{H}_0 - \epsilon_0, \quad (14)$$

где ϵ_0 – вакуумное собственное значение H_0 .

Из (14) следует уравнение

$$\frac{1}{4}(\partial_i S)^2 - \frac{1}{2}\partial_i^2 S = V(q_i) - \epsilon_0, \quad (15)$$

которое можно использовать либо для вычисления S и вакуумной волновой функции Ψ_0 в (13), если задан потенциал V , либо для вычисления потенциала V , если известно S . Естественно, функция S должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{aligned} S &\geq 0 \quad (\text{неотрицательность}), \\ \int e^{-S/2} \prod_i dq_i &< \infty \quad (\text{нормируемость}), \\ V - \epsilon_0 &\geq 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Если эти условия выполнены, легко показать, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(q, t) = C_0 e^{-S}, \quad (17)$$

т.е. квадрат вакуумной волновой функции является равновесным распределением для уравнения ФПК. Далее, для стохастических средних на конечном временном интервале справедлива следующая эргодическая теорема:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T \langle q_{i_1}(t) \dots q_{i_N}(t) \rangle_\eta dt = C_0 \int \prod_i dq_i e^{-S} q_{i_1}(t) \dots q_{i_N}(t). \quad (18)$$

Докажем это утверждение. Разложим $\mathcal{P}(q, t) = e^{-S/2} \Psi(q, t)$ в ряд по собственным функциям $\Psi_k(q)$ оператора H , соответствующим собственным значениям E_k ($E_k > E_{k-1}$):

$$\mathcal{P}(q, t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-S/2} \Psi_k(q) e^{-E_k(t-t_0)}. \quad (19)$$

Переписывая левую часть уравнения (18) в виде (см. (7))

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T dt \mathcal{P}(q, t) q_{i_1}(t) \dots q_{i_N}(t) \prod_i dq_i \quad (20)$$

и подставляя (20) в (19), получим

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^T dt \sum_{k=0}^{\infty} C_k e^{-S/2} \Psi_k(q) e^{-E_k(t-t_0)} q_{i_1} \dots q_{i_N} \prod_i dq_i = \\ = C_0 \int e^{-S} q_{i_1} \dots q_{i_N} \prod_i dq_i + \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{k \neq 0} \left(\frac{1 - e^{-E_k(t-t_0)}}{T} \right) C_k q_{i_1} \dots q_{i_N} \prod_i dq_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Последний член исчезает, что завершает доказательство теоремы.

В силу эргодической гипотезы для стохастического квантования в нефизическом добавочном времени (см. ниже) можно заменять это время на “компьютерное” время

в численных расчетах для стохастической квантовой механики. Из (21) легко получить континуальное представление для корреляционных функций. Это делается путем замены переменных $\eta_i \rightarrow q_i$. В результате получим (для $\gamma = 1$)

$$\langle q_{i_1} \dots q_{i_N} \rangle_\eta = \int_{t_0}^T \prod_i \mathcal{D}q_i(t) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{t_0}^T d\tau \left(\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 \right\} \det \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right|_{q_{i_1} \dots q_{i_N}}. \quad (22)$$

Несложно показать, что для любой системы с конечным числом степеней свободы с точностью до нормировочной постоянной справедливо следующее равенство:

$$\det \left| \frac{\partial \eta_i}{\partial q_j} \right| = \exp \left[\frac{1}{2} \int_{t_0}^\infty d\tau \frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} \right]. \quad (23)$$

Подставляя (23) в (22) и опуская поверхностный член в экспоненте

$$\int_{t_0}^\infty d\tau \dot{q}_i \frac{\partial S}{\partial q_i} = \int_{t_0}^\infty d\tau \frac{\partial S}{\partial \tau}, \quad (24)$$

получим

$$\langle q_{i_1} \dots q_{i_N} \rangle_\eta = \tilde{N} \int \prod_i \mathcal{D}q_i q_{i_1} \dots q_{i_N} \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{t_0}^\infty d\tau \left[\dot{q}_i^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} \right] \right\}. \quad (25)$$

Выражения (25) формально совпадают с соответствующими выражениями для корреляционных функций в евклидовой фейнмановской формулировке нерелятивистской квантовой механики. При $t_0 \rightarrow -\infty$ уравнение (25) дает вакуумную корреляционную функцию теории¹⁾:

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \langle q_{i_1}(t_1) \dots q_{i_N}(t_N) \rangle_\eta = \langle 0 | \hat{q}_{i_1}(t_1) \dots \hat{q}_{i_N}(t_N) | 0 \rangle, \quad (26)$$

где $|0\rangle \equiv \Psi_0 = C_0 e^{-S/2}$ – нормируемое вакуумное состояние системы.

Отметим, что функции Грина трансляционно-инвариантны во времени только в этом пределе.

Производящий функционал для функций Грина (26) в стохастической квантовой механике можно записать в виде

$$\begin{aligned} Z[J] &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} \left\langle \exp \left[\int_{t_0}^\infty I_i(t) q_i(t) dt \right] \right\rangle_\eta = \\ &= N \exp \left\{ -\frac{1}{4} \int_{-\infty}^\infty d\tau \left[\left(\dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial q_i} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial q_i^2} - 4 I_i(t) q_i(t) \right] \right\} \prod_i \mathcal{D}q_i(t). \end{aligned} \quad (27)$$

Этим завершается доказательство эквивалентности континуального (или канонического) и стохастического квантования в нерелятивистской квантовой механике. Таким образом, можно утверждать, что существует процесс в евклидовом времени,

¹⁾В случае $t_0 = 0$ стохастические средние совпадают с квантово-механическими матричными элементами вида $\langle \Psi_0 | q_{i_1} \dots q_{i_N} | \prod_i \delta(q_i) \rangle$, где Ψ_0 – вакуумное состояние, а $\prod_i \delta(q_i) \equiv \Psi$.

приводящий к квантовым вакуумным амплитудам (т.е. к корреляционным функциям (26) после стохастического усреднения). Однако, как и в случае стохастической механики Нельсона, данный подход не приводит (за исключением случая одновременных вакуумных ожиданий) к непротиворечивой и самосогласованной стохастической формулировке в терминах вероятностей, которая дала бы возможность вычисления корреляторов, соответствующих произвольным состояниям из полного набора *наблюдаемых* квантовой механики. И несмотря на то что метод стохастического квантования позволил глубже понять связь между уравнением Шредингера в евклидовом времени и уравнением ФПК, он не привел к созданию “новой динамической” интерпретации квантовой механики, отличной от канонической интерпретации. Это есть следствие общей теоремы [5], доказывающей невозможность задания причинного уравнения, которое описывало бы эволюцию всех наблюдаемых. Например, в континуальном представлении вероятностей для заданного процесса всегда будут присутствовать вклады траекторий назад во времени [6].

3. СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ШРЕДИНГЕРА В МНИМОМ ВРЕМЕНИ И УРАВНЕНИЯМИ ФПК ДЛЯ РЯДА ТОЧНО РЕШАЕМЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЛАНЖЕВЕНА

Общеизвестно, что единственной моделью, приводящей к линейному уравнению Ланжевена и гауссовому решению уравнения ФПК с производными второго порядка, является модель осцилляторов. Главный вопрос данной работы состоит в следующем: можно ли описать случай нелинейной потенциальной силы линейным уравнением ФПК с производными второго порядка? Мы дадим положительный ответ на этот вопрос. Ниже показано, что из уравнения ФПК, соответствующего нелинейным уравнениям Ланжевена в каноническом виде (3), можно построить уравнение Шредингера (см. уравнения (10)–(12)). *Мы рассматриваем только точно решаемые нелинейные уравнения Ланжевена, для которых уравнения Шредингера имеют нормируемые вакуумные состояния $\Psi(q)$ с энергетической щелью между вакуумным и первым возбужденным состояниями.*

Если все указанные условия выполнены, то

$$|\Psi_0(q)|^2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(q, t) \equiv \mathcal{P}(q) = C e^{-S(q)}. \quad (28)$$

Мы ограничимся обсуждением трех точно решаемых моделей с потенциалом $S(q)$, который зависит только от q .

Сначала рассмотрим известную модель [1], которую мы назовем моделью Макдональда. Уравнения Ланжевена для этой модели имеют вид (см. уравнение (3)):

$$\dot{q}(t) = -\theta(1 - e^{\alpha q}) + \eta(t), \quad (29a)$$

$$\dot{q}(t) = -\gamma\theta(1 - e^{\alpha q}) + \eta(t), \quad \dot{q}(t) \equiv \frac{\partial q}{\partial t}, \quad (29b)$$

где $\theta, \alpha > 0$, $\gamma > 0$ – коэффициенты диффузии, $\eta(t)$ – гауссов белый шум:

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\delta(t - t'), \quad (30a)$$

$$\langle \eta(t)\eta(t') \rangle = 2\gamma\delta(t - t'). \quad (30б)$$

Уравнение этого типа впервые выведено и обсуждалось в [1]. Отметим, что условие (30б) существенным образом отличается от (30a) ввиду наличия коэффициента диффузии γ в уравнении (29б). При этом в силу формулы Ито (Б.12) для уравнения ФПК мы получим (см. (9))

$$\dot{\mathcal{P}}(q, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\partial S}{\partial q} \mathcal{P}(q, t) + \frac{\partial \mathcal{P}(q, t)}{\partial q} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial q^2} \mathcal{P}(q, t). \quad (31)$$

Согласно общему анализу раздела 2

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(q, t) = \mathcal{P}(q) \neq 0 \quad \text{или} \quad \infty, \quad (32)$$

тогда, если выполнены условия (16), имеем

$$\mathcal{P}(q) = C e^{-S(q)}, \quad (33)$$

где

$$S(q) = \theta \left(q + \frac{e^{-\alpha q}}{\alpha} \right), \quad (34)$$

и уравнение (29б) переписывается в виде

$$\dot{q}(t) = -\gamma \frac{\partial S}{\partial q} + \eta(t). \quad (35)$$

Ниже будет показано (см. (53)–(55)), что равновесное распределение (32)–(34) можно получить из решения уравнения Ланжевена только для $\gamma = 1/2$. Чтобы решить уравнение (35), введем новую переменную $u(t) = e^{\alpha q(t)}$. Теперь, используя формулу Ито²⁾ (Б.12), имеем

$$\dot{u}(t) = \frac{\partial u}{\partial q} \dot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial q^2} = \alpha \bar{\theta} + \alpha \left(\eta - \bar{\theta} + \frac{1}{2} \alpha \right) u(t), \quad \bar{\theta} = \gamma \theta. \quad (36)$$

Решение уравнения (36) для $u(0) = 1$, $q(0) = 0$ есть

$$u(t) = e^{\phi(t)} \left(1 + \alpha \bar{\theta} \int_0^t d\tau e^{-\phi(\tau)} \right), \quad (37)$$

где

$$\phi(t) = \int_0^t \left(\eta - \bar{\theta} + \frac{1}{2} \alpha \right) d\tau. \quad (38)$$

²⁾Можно показать, что предел $\lim_{t \rightarrow \infty} \langle u^n(t) \rangle$ не зависит от выбора начальных условий.

Чтобы найти $\mathcal{P}(q)$, необходимо вычислить математическое ожидание значений $u^n(t)$ (см. (6)), где n – натуральное число:

$$\begin{aligned}\langle u^n(t) \rangle &= M^{-1} \int D\eta(t') \exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \int_0^\infty \eta^2(\tau) d\tau\right) u^n(t), \\ M &= \int D\eta(t') \exp\left(-\frac{1}{4\gamma} \int_0^\infty \eta^2(\tau) d\tau\right).\end{aligned}\quad (39)$$

Вычисления дают

$$\langle u(t) \rangle = e^{-\alpha(\bar{\theta} - (1/2 + \gamma)\alpha)t} + \frac{\alpha\bar{\theta}(1 - e^{-\alpha(\bar{\theta} - (1/2 + \gamma)\alpha)t})}{\alpha(\bar{\theta} - (1/2 + \gamma)\alpha)}.\quad (40)$$

Видно, что для $\theta > (1/2 + \gamma)\alpha$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle u(t) \rangle = \frac{\bar{\theta}/\alpha}{\bar{\theta}/\alpha - 1/2 - \gamma},\quad (41)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle u^n(t) \rangle = \frac{(\bar{\theta}/\alpha)^n}{(\bar{\theta}/\alpha - 1/2 - \gamma)(\bar{\theta}/\alpha - 1/2 - 3\gamma) \dots (\bar{\theta}/\alpha - 1/2 - (2n-1)\gamma)},\quad (42)$$

где $\bar{\theta}/\alpha > 1/2 + (2n-1)\gamma$. Вычисление $\mathcal{P}(q)$ для произвольного γ является сложной задачей. Можно, однако, утверждать, что

$$\mathcal{P}(q) \neq C e^{-\theta(q + e^{-\alpha q})/\alpha}\quad (43)$$

для произвольного γ , как это следует из соотношения (34).

Нам удалось найти окончательное равновесное распределение $\mathcal{P}(q)$ только для $\gamma = 1/2$ (см. (31), (55)). Есть два способа получить его. В первом случае мы знаем, что

$$\langle u^n(\infty) \rangle = \int \mathcal{P}(q) u^n du,\quad (44)$$

если параметры θ, α выбраны так, что интеграл (44) сходится. После этого можно также найти $\mathcal{P}(u)$ и $\mathcal{P}(q)$.

Полагая $\gamma = 1/2$ в выражении (42), получим следующую формулу:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle u^n(\infty) \rangle = \frac{(\bar{\theta}/\alpha)^n \Gamma(\bar{\theta}/\alpha - n)}{\Gamma(\bar{\theta}/\alpha)},\quad (45)$$

где $\Gamma(z)$ – гамма-функция. Используя представление для $\Gamma(z)$, имеем

$$\langle u^n(\infty) \rangle = \frac{\lambda^n}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} e^{-\nu} \nu^{\lambda-n},\quad (46)$$

где

$$\lambda > n, \quad \lambda = \frac{\bar{\theta}}{\alpha} = \frac{\theta}{2\alpha}.\quad (47)$$

После замены переменной интегрирования $\lambda/\nu = u$ получим

$$\langle u^n(\infty) \rangle = \frac{(\lambda)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \int_0^\infty \frac{du}{u} e^{-\lambda/u} u^{n-\lambda} = \int_0^\infty \mathcal{P}(u) u^n du,\quad (48)$$

где равновесное распределение по u имеет вид

$$\mathcal{P}(u) = \frac{(\lambda)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} u^{-(\lambda+1)} e^{-\lambda/u}. \quad (49)$$

По определению³⁾

$$\mathcal{P}(q) = \mathcal{P}(u) \frac{du}{dq} = \frac{\alpha(\lambda)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\bar{\theta}(q+e^{-\alpha q}/\alpha)}. \quad (50)$$

Легко проверить условие нормировки

$$\int_0^\infty \mathcal{P}(u) du = \int_{-\infty}^\infty \mathcal{P}(q) dq = 1. \quad (51)$$

Второй способ заключается в построении распределения $\mathcal{P}(q)$ непосредственно из определения:

$$\mathcal{P}(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}(q, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle \delta(q - q(t)) \rangle, \quad (52)$$

где $q(t)$ есть решение уравнения (35). Можно записать

$$\mathcal{P}(q) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ipq} \langle u(t)^{ip/\alpha} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ipq} \langle u^n(t) \rangle, \quad n = \frac{ip}{\alpha}. \quad (53)$$

Используя (45), имеем из (53)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(q) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ipq} \frac{\lambda^{ip/\alpha}}{\Gamma(\lambda)} \Gamma\left(\lambda - \frac{ip}{\alpha}\right) = \\ &= \frac{1}{2\pi\Gamma(\lambda)} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ipq} e^{(ip/\alpha) \ln \lambda} \int_0^\infty \frac{d\nu}{\nu} e^{-\nu} \nu^{\lambda-ip/\alpha} = \\ &= \frac{1}{2\pi\Gamma(\lambda)} \langle u(t)^{ip/\alpha} \rangle = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty dp e^{-ipq} \langle u^n(t) \rangle, \quad n = \frac{ip}{\alpha}. \end{aligned} \quad (54)$$

После замены переменных $z = (1/\alpha) \ln(\lambda/\nu)$, $\lambda/\nu = e^{\alpha z}$, получим

$$\mathcal{P}(q) = \frac{\alpha(\lambda)^\lambda}{\Gamma(\lambda)} e^{-\bar{\theta}(q+e^{-\alpha q}/\alpha)}. \quad (55)$$

Это выражение совпадает с (50).

Легко видеть, что в данном случае

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{\mathcal{P}}(t, q) = 0, \quad \mathcal{P}(t, q) \rightarrow \mathcal{P}(q) \quad (56)$$

любое решение вида (33) удовлетворяет уравнению ФПК вне зависимости от вида функции $S(q)$ в экспоненте (см. (43), (50)).

Можно сделать следующие существенные критические замечания к работе [4], где предпринималась попытка продемонстрировать противоречие между уравнениями Ланжевена и уравнениями ФПК для нелинейных моделей.

³⁾Если $q \rightarrow \infty$, то $\mathcal{P}(q) \rightarrow C e^{-\bar{\theta}q}$. Если $(\alpha q) \rightarrow 0$, то $\mathcal{P}(q) \rightarrow C e^{-\bar{\theta}q^2/2}$, т.е. получается то же гауссово распределение. Невозможно разложить функцию $\mathcal{P}(q)$ в ряд по q при $\alpha \rightarrow 0$; $\alpha = 0$ является существенно особой сингулярной точкой (см. (47), (50)).

Из выражения (55) следует, что для нормируемого равновесного распределения $\mathcal{P}$ справедливы следующие утверждения.

1. Распределение $\mathcal{P}$ во всех рассматриваемых нами нелинейных моделях имеет существенную особенность при $\alpha = 0$. Таким образом, функция $\mathcal{P}$ и уравнение Ланжевена (см. (49), (50)) не могут быть разложены в ряд в точке $\alpha = 0$. Как правило, это справедливо для всех точно решаемых нелинейных моделей.

2. Точное нормируемое решение (55) неизвестно, если диапазон q ограничен (например, $0 \leq q < \infty$), так как в этом случае вакуумное состояние соответствующего уравнения Шредингера нельзя найти точно.

Теперь мы кратко продемонстрируем, что уравнение Шредингера для модели Макдональда, вытекающее из (50), дает важную дополнительную информацию о свойствах вакуумного состояния этой модели.

Из общих уравнений (см. (10)–(12)) получим следующее стационарное уравнение Шредингера для модели Макдональда (γ произвольно):

$$\hat{H}\Psi(q) = \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{\theta^2}{4}(1 + e^{-2\alpha q}) - \frac{\theta}{2}(\theta + \alpha)e^{-\alpha q} \right) \Psi(q) = \gamma E \Psi(q). \quad (57)$$

Вводя новую переменную $\xi = (\theta/\alpha) e^{-\alpha q}$, можно переписать выражение для связанного состояния в виде

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{n + s + 1/2}{\xi} - \frac{s^2}{\xi^2} \right) \Psi = 0, \quad (58)$$

где

$$n + s + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{\alpha} + 1 \right), \quad s^2 = \frac{\theta^2}{4\alpha} - \gamma \frac{E}{\alpha^2}. \quad (59)$$

После подстановки

$$\Psi(\xi) = e^{-\xi/2} \xi^s \omega(\xi) \quad (60)$$

мы приходим к уравнению

$$\xi \omega'' + (2s + 1 - \xi) \omega' + n \omega = 0. \quad (61)$$

Решение уравнения (61) есть вырожденная гипергеометрическая функция $\omega(\xi) = F(-n, 2s + 1, \xi)$. Для вакуумного состояния она сводится к

$$\omega_0(\xi) = F(0, 2s + 1, \xi) = \frac{1}{2s}, \quad (62)$$

так что

$$\Psi_0(\xi) = \sqrt{C} e^{-\xi/2} \xi^s, \quad (63)$$

где $\sqrt{C}$ – нормировочная константа.

Из (59) получим для $n = 0$:

$$s = \frac{\theta}{2\alpha}, \quad E = E_0 = 0. \quad (64)$$

С учетом (59), (60), (63), (64) имеем

$$\mathcal{P}(q) = |\Psi(q)|^2 C \exp \left\{ -\theta \left(\frac{e^{-\alpha q}}{\alpha} + q \right) \right\}. \quad (65)$$

Видно, что выражение (65) является формальным решением уравнения (57), если $\mathcal{P}(t, q)$ удовлетворяет уравнению (9) для любого γ . При нормировке $|\Psi_0(q)|^2$ получается такое же выражение для C , как и в (50) для $\lambda = \theta/\alpha$.

Если с самого начала положить $\gamma = 1/2$, необходимо подставить $\theta/2$ вместо θ в уравнения (57)–(65).

Перейдем ко второй точно решаемой модели, а именно к модели Морзе. Решение уравнения Шредингера для этой модели можно найти в [7]. Данная модель очень похожа на модель Макдональда. То есть исходя из потенциала в уравнении Шредингера мы построим уравнение Ланжевена и найдем точное решение для равновесного распределения $\mathcal{P}(q)$. С самого начала положим $\gamma = 1/2$, так что уравнение Шредингера для связанных состояний имеет вид

$$\left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} + V(q) \right) \Psi = \left(-\frac{\partial^2}{\partial q^2} + \frac{1}{4}(\partial_q S)^2 - \frac{1}{2}\partial_q^2 S \right) \Psi = -\frac{E}{2} \Psi. \quad (66)$$

Можно показать, что решение для $\mathcal{P}$ в модели Морзе существует только для $\gamma = 1/2$. После того как уравнение Ланжевена переписано в виде

$$\dot{\bar{q}} = -\theta(1 - e^{\bar{\alpha}\bar{q}}) + \bar{\eta}(t), \quad (67)$$

где $\bar{q} = q/\sqrt{2\gamma}$, $\bar{\alpha} = \sqrt{2\gamma}\alpha$, $\bar{\theta} = \sqrt{\gamma/2}\theta$, соотношение (4) заменяется на⁴⁾

$$\langle \bar{\eta}(t)\bar{\eta}(t') \rangle = \delta(t - t'). \quad (68)$$

Повторяя все приведенные выше шаги (см. (45)–(51)), получим ($\bar{\lambda} = \theta/\bar{\alpha} = \theta/2\alpha$)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{P}(q) dq &= \frac{\bar{\alpha}(\bar{\lambda})^{\bar{\lambda}}}{\Gamma(\bar{\lambda})} \int \exp \left[-\bar{\theta} \left(\bar{q} + \frac{1}{\bar{\alpha}} e^{-\bar{\alpha}\bar{q}} \right) \right] d\bar{q} = \\ &= \frac{\alpha(\theta/(2\alpha))^{\theta/(2\alpha)}}{\Gamma(\theta/(2\alpha))} \int \exp \left[-\frac{\theta}{2} \left(q + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha q} \right) \right] dq = 1. \end{aligned} \quad (69)$$

Последнее равенство не зависит от γ и дает

$$\mathcal{P}(q) = C \exp \left[-\frac{\theta}{2} \left(q + \frac{1}{\alpha} e^{-\alpha q} \right) \right], \quad (70)$$

что соответствует выбору $\gamma = 1/2$ (см. (50), (55)).

Ясно, что уравнение Шредингера (57) приводит к решению (65) только в случае $\gamma = 1/2$:

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{2} \frac{\partial S}{\partial q} + \eta(t) = -\frac{1}{2} \theta (1 - e^{-\alpha q}) + \eta(t). \quad (71)$$

⁴⁾Можно дать строгий математический вывод уравнения (68) путем замены всех функциональных интегралов по $d\eta(t)$ дискретными суммами и перехода к континуальному пределу после замены переменных $\eta \rightarrow \bar{\eta} = \sqrt{2\gamma}\eta$.

Решение (70) удовлетворяет уравнению

$$\dot{q}(t) = -\frac{\partial S}{\partial q} + \eta(q) = -\bar{\theta}(1 - e^{-\alpha q}) + \eta(t), \quad (72)$$

где $\bar{\theta} = \theta/2$, так что мы приходим к уравнению Ланжевена, которое совпадает с (71).

Далее, для потенциала

$$V(q) = A(e^{-2\alpha q} - 2e^{-\alpha q}) \quad (73)$$

уравнение Шредингера после подстановки

$$\xi = \frac{2\sqrt{A}}{\alpha} e^{-\alpha q} \quad (74)$$

принимает вид (58), но теперь

$$S = \frac{\sqrt{-\gamma E_n}}{\alpha}, \quad E_n \leq 0, \quad n = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - \left(s + \frac{1}{2}\right), \quad s = \frac{\sqrt{A}}{\alpha} - \frac{1}{2} \text{ при } n = 0. \quad (75)$$

Делая подстановку (60), мы приходим к уравнению (61), а для вакуумного решения ($n = 0$) получим выражение (63). Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Psi_0^2|(\xi) &= C \exp \left\{ - \left[\frac{2\sqrt{A}}{\alpha} e^{-\alpha q} + \left(\frac{2\sqrt{A}}{\alpha} - 1 \right) \alpha q \right] \right\} = C e^{-S(q)}, \\ S(q) &= 2\sqrt{A} \left(\frac{e^{-\alpha q}}{\alpha} + 1 \right) - \alpha q. \end{aligned} \quad (76)$$

Поскольку

$$\frac{\partial S}{\partial q} = 2\sqrt{A}(1 - e^{-\alpha q}) - \alpha, \quad (77)$$

уравнение Ланжевена для модели Морзе имеет вид ($\gamma = 1/2$)⁵⁾

$$\dot{q} = -\sqrt{A}(1 - e^{-\alpha q}) + \frac{\alpha}{2} + \eta(t). \quad (78)$$

Сравнивая решения уравнений Шредингера для этих двух моделей, мы приходим к общему выводу: решения (57)–(65) и (73)–(78) зависят от γ только через энергетические уровни $E_n \rightarrow \gamma E_n$ и удовлетворяют уравнениям Ланжевена (3), (28) для любого γ . Ограничение на γ возникает только при совместном решении уравнений (3), (28) и (8), (52).

Наконец, рассмотрим третью модель, которую мы назовем моделью Ландау–Лифшица. Для нее потенциал в уравнении Шредингера выбирается в виде [7]

$$V(q) = -\frac{u_0}{\text{ch}^2 \alpha q}. \quad (79)$$

⁵⁾Относительно решения этого уравнения Ланжевена и доказательства того, что самосогласованное решение существует только для $\gamma = 1/2$, см. приложение А.

Решение уравнения Шредингера есть

$$\Psi(\xi) = (1 - \xi^2)^{\epsilon/2} \omega(\xi), \quad (80)$$

где $\omega(\xi) = F(\epsilon - s, \epsilon + s + 1, \epsilon + 1, z)$ – гипергеометрическая функция, а

$$\xi = \text{th}(\alpha q), \quad s = n + \epsilon, \quad \gamma E_n = -\frac{\alpha^2}{4} \left(-(1 + 2n) + \sqrt{1 + \frac{4u_0}{\alpha^2}} \right)^2, \quad (81)$$

$\epsilon = \sqrt{-\gamma E}/\alpha$ для связанных состояний $E_n \leq 0$. Вакуумное состояние имеет вид

$$\begin{aligned} |\Psi_0(q)|^2 = \mathcal{P}(q) &= C(1 - \xi^2)^\epsilon = C \left(\frac{1}{\text{ch}^2(\alpha q)} \right)^\epsilon = C e^{-2\epsilon \ln(\text{ch}(\alpha q))} = C e^{-S(q)}, \\ S(q) &= 2\epsilon \ln(\text{ch}(\alpha q)), \\ s = \epsilon &= \frac{1}{2} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{4u_0}{\alpha^2}} \right) = \sqrt{-\frac{\gamma E_0}{\alpha^2}}. \end{aligned} \quad (82)$$

Уравнение Ланжевена, которое следует из (82), записывается в виде

$$\begin{aligned} \dot{q} &= -\gamma \frac{\partial S}{\partial q} + \eta(t), \\ \frac{\partial S}{\partial q} &= 2\epsilon \alpha \text{th}(\alpha q). \end{aligned} \quad (83)$$

Мы надеемся опубликовать решение этого уравнения в отдельной статье.

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В разделе 2 мы сформулировали необходимые и достаточные условия существования локального уравнения ФПК второго порядка в случае нелинейных уравнений Ланжевена. Доказательство предельной теоремы возможно только для тех же условий, при которых справедлива эргодическая теорема. Эти условия следующие: уравнение Шредингера в мнимом времени имеет эрмитов гамильтониан со стабильным нормируемым вакуумным состоянием, и между вакуумным и первым возбужденным состояниями имеется энергетическая щель.

В разделе 3 мы доказали, что все три рассмотренные модели удовлетворяют этим условиям, и показали, что

$$|\Psi_0(q)|^2 = \mathcal{P} = C e^{-S(q)}. \quad (84)$$

Из этого нелинейного решения мы вывели уравнение Ланжевена (35) для произвольного коэффициента диффузии γ . Для моделей Макдональда и Морзе мы также доказали, что совместное решение уравнения Ланжевена и уравнения

$$\mathcal{P}(q, t) = \langle \delta(q - q(t)) \rangle \quad (85)$$

содержит добавочную константу и что это совместное решение возможно лишь в случае $\gamma = 1/2$.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Некоторые точно решаемые модели

Докажем, что совместное решение уравнения Ланжевена и уравнения (6) для задачи Морзе возможно только для $\gamma = 1/2$. Для произвольного γ уравнения (78) имеют вид

$$\dot{q}(t) = -\gamma(2\sqrt{A}(1 - e^{-\alpha q}) - \alpha) + \eta(t). \quad (\text{A.1})$$

Введем следующие новые переменные в уравнение (A.1):

$$\tilde{\eta}(t) = \frac{\eta}{\sqrt{2\gamma}}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{\sqrt{2\gamma}}, \quad \tilde{\alpha} = \sqrt{2\gamma}\alpha, \quad \tilde{\theta} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\sqrt{A} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}}\theta. \quad (\text{A.2})$$

Имеем

$$\dot{\tilde{q}}(t) = -\theta(1 - e^{-\tilde{\alpha}\tilde{q}}) + \frac{\tilde{\alpha}}{2} + \tilde{\eta}(t). \quad (\text{A.3})$$

Повторяя вычисления (45)–(48), получим

$$\langle u^n(\infty) \rangle = \frac{\lambda^n \Gamma(\bar{\theta}/2 - n)}{\Gamma(\bar{\theta}/2)} = \int_0^\infty \frac{dv}{v} e^{-v} v^{-\bar{\lambda}-n}, \quad (\text{A.4})$$

где

$$\bar{\theta} = \theta - \frac{1}{2}, \quad \bar{\lambda} = \frac{\bar{\theta}}{2} = \frac{\theta - 1/2}{\alpha}, \quad \lambda = \frac{\theta}{2}, \quad \theta = \sqrt{A}.$$

Для $\mathcal{P}$ мы приходим к равенству

$$\mathcal{P}(\tilde{q}) = \mathcal{P}(q) \frac{dq}{d\tilde{q}} = \frac{\alpha(\bar{\lambda})^{\bar{\lambda}}}{\Gamma(\bar{\lambda})} \exp\left[-\theta\left(\frac{e^{-\alpha q}}{\alpha} + q\right) + \frac{\alpha q}{2}\right]. \quad (\text{A.5})$$

Эта формула совпадает с уравнением (62) для $\gamma = 1/2$. Доказательство завершено.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Основы стохастического дифференциального анализа

Напомним некоторые основные идеи стохастического анализа, которые используются в данной статье. Для краткости мы опускаем все доказательства; подробное обсуждение можно найти в литературе, на которую приведены ссылки в работе [8].

Рассмотрим стохастический процесс $q(t)$ более общего вида (чем (3)) для механической системы, описываемой динамическими переменными q_i , $i = 1, 2, \dots, n$. Уравнение Ланжевена имеет вид

$$\dot{q}_i = v_i(q) + e_i^j(q)\eta_j, \quad (\text{B.1})$$

где v_i , e_i^j – функции q_i , а η_j – белый шум с гауссовыми корреляторами. Наша задача состоит в том, чтобы дать корректное определение (B.1) безотносительно к его реальному физическому содержанию. Мы обсудим неоднозначность формулировки (B.1) и изучим следствия этой неоднозначности, как и ее связь с гамильтоновым и континуальным подходами. А именно, мы покажем, что неоднозначность в (B.1) приводит к хорошо известным сложностям традиционных формулировок: к

неоднозначностям операторного упорядочивания в каноническом подходе и к неоднозначностям при переходе к непрерывному пределу в подходе с использованием функционального интеграла. Главным результатом данного раздела является количественная взаимосвязь между неоднозначностями, возникающими в методе интеграла по путям и в методе стохастического квантования.

Начнем с анализа правой части уравнения (Б.1). В последний член входит гауссов белый шум, не существующий в реальном мире. Однако величины $\eta_j(t)$ известны в математической литературе под названием *обобщенных* стохастических процессов (поскольку их корреляторами являются обобщенные функции). Тем самым правая часть (Б.1) содержит произведения обобщенных стохастических процессов, и именно эти произведения являются величинами, которые необходимо правильно определить. Мы увидим, что данная задача действительно может быть достаточно успешно решена в контексте стохастического анализа.

Прежде всего, вместо того чтобы пытаться работать в терминах обобщенных функций, можно избавиться от них с самого начала. Некоторые из наиболее сложных проблем формулировки (Б.1) останутся и в ее упрощенной версии

$$\dot{w}_i = \eta_i, \quad w_i(0) = 0. \quad (\text{Б.2})$$

Формальное решение данного уравнения носит название *винеровского процесса*. Этот процесс существует на строгом математическом уровне, хотя его производная не существует (при стандартном определении этого термина): он может рассматриваться в качестве определения обобщенного стохастического процесса η_i в терминах хорошо определенного процесса. Такой трюк приводит к уравнениям, с которых начал бы любой математик: гораздо удобнее сначала доказать существование процесса w_i , обладающего свойствами

$$\begin{aligned} \langle w_i(t) \rangle &= 0, \\ \langle w_i(t) w_j(t') \rangle &= \min(t, t') \delta_{ij}, \end{aligned} \quad (\text{Б.3})$$

а затем использовать его в дальнейших конструкциях (как правило, математики с неохотой обсуждают уравнения вида (Б.1)).

Следующий шаг состоит в том, что формальное уравнение (Б.1) переписывается в терминах этих менее сингулярных объектов. Стандартным приемом здесь является запись уравнения (Б.1) в интегральной форме:

$$q_i(t) - q_i(0) = \int_0^t dq_i(\tau) = \int_0^t v_i(q(\tau)) d\tau + \int_0^t e_i^j(q(\tau)) dw^j(\tau). \quad (\text{Б.4})$$

В литературе знаки интеграла обычно опускаются:

$$dq_i = v_i dt + e_i^j dw^j(t). \quad (\text{Б.5})$$

Подчеркнем, что уравнение (Б.5) должно пониматься как *интегральное*, а не дифференциальное уравнение: последняя запись является лишь условным обозначением и не более того. В действительности стохастические *дифференциальные* уравнения *всегда* определяются в качестве *интегральных*.

Здесь мы подходим к ключевому моменту. Так как мы собираемся решать интегральное уравнение, мы, безусловно, должны знать, что такое интеграл. Если $B(t)$ – дифференцируемая функция, интеграл $\int A dB = \int AB' dt$ есть обычный интеграл Римана. Можно пойти дальше и определить интеграл Стилтеса:

$$\int A dB = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_i A(\xi_i)(B(t_i) - B(t_{i-1})). \quad (\text{Б.6})$$

Известно, что интеграл (Б.6) существует и не зависит ни от выбора разбиения, ни от выбора точек $\xi_i \in [t_i, t_{i-1}]$ для широкого класса функций B с ограниченной вариацией, т.е. таких, что

$$\exists M \quad \forall t_i: \quad \sum_i |B(t_i) - B(t_{i-1})| < M.$$

В частности, подойдет любая дифференцируемая функция, и для нее в результате мы получим обычный интеграл Римана. Но что делать в случае, когда $B = w$ является винеровским стохастическим процессом? Ситуация выглядит довольно безнадежной, так как w^a (почти наверняка) не является ни дифференцируемой функцией, ни даже функцией с ограниченной вариацией. Наиболее нетривиальным фактом, относящимся к этому интегралу, является то, что он, вообще говоря, *существует* и не зависит от разбиения интервала $[0, \tau]$.

Конечно, необходимо также прокомментировать процедуру предельного перехода в (Б.6). В свете аналогий с квантовой теорией поля неудивительно, что из всех возможных “стохастических” пределов (например, почти наверняка, с вероятностью 1 и т.д.) наиболее полезным оказывается предел в среднеквадратичном смысле:

$$c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c \quad \text{означает, что} \quad \langle (c_n - c)^2 \rangle \rightarrow 0.$$

Однако сингулярное поведение w^a приводит к весьма специфическим свойствам стохастических интегралов, в частности к их зависимости от положения точек ξ_i на $[t_i, t_{i-1}]$. Так, различные значения α в выражении

$$\xi_i = \alpha t_i + (1 - \alpha)t_{i-1}, \quad (\text{Б.7})$$

вообще говоря, приведут к различным значениям среднеквадратичных пределов суммы. Более того, не существует формул, связывающих эти пределы для произвольных A и B .

Мы назовем предел (Б.6), соответствующий выбору (Б.7), *стохастическим α -интегралом*⁶⁾

$$(I_\alpha) \int A dB. \quad (\text{Б.8})$$

⁶⁾ Стохастические дифференциальные уравнения также классифицируются посредством параметров α (вспомним опущенные символы интегралов), так что случай $\alpha = 0$ соответствует стохастическому уравнению Ито.

Интеграл (Б.8) в случае $\alpha = 0$ называется *интегралом Ито* и является наиболее популярным в математической литературе⁷⁾. Причина такой популярности в том, что выбор $\alpha = 0$ обычно оказывается лучше определенным, чем другие, и общие доказательства существования интеграла (Б.8) можно, как правило, дать только для $\alpha = 0$. Кроме того, у интеграла Ито есть ряд важных свойств, которые отсутствуют у других интегралов.

Первое важное свойство состоит в том, что для любой функции $A(t)$, статистически независимой от $B(s) - B(t)$ для $s > t$, т.е. такой, что

$$\langle A(t)[B(s) - B(t)] \rangle = \langle A(t) \rangle \langle [B(s) - B(t)] \rangle,$$

справедливо тождество

$$\left\langle \left(I_0 \int A dB \right) \right\rangle \equiv 0. \quad (\text{Б.9})$$

Это свойство очень важно, и оно очень часто используется. Ниже мы будем рассматривать только такие функции $A(t)$ (называемые предсказуемыми функциями) – данный класс функций достаточно широк и включает почти все наиболее интересные случаи.

Стохастический интеграл – весьма необычная конструкция. Среднеквадратичный предел сумм

$$I(N) = \sum_i A(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))^N$$

ненулевой даже для $N > 1$, а именно

$$I(N) = \begin{cases} \int A dB, & N = 1, \\ \int A d\langle B, B \rangle, & N = 2, \\ 0, & N = 3, \end{cases}$$

т.е. существуют интегралы Ито второго порядка. Последние суть не что иное, как обычные интегралы Стильеса, так как $\langle B, B \rangle$ – так называемая *ковариация* процесса B – есть “хорошая” функция с ограниченной вариацией. Более того, существует

$$\lim \sum_i A(t_{i-1})(B(t_i) - B(t_{i-1}))(C(t_i) - C(t_{i-1})) = \int A d\langle B, C \rangle \quad (\text{Б.10})$$

(также типа Стильеса), а аналогичные суммы с более высокими степенями вариаций всегда равны нулю.

Рассмотрим наиболее важные свойства ковариации:

- 1) если либо B , либо C является “хорошей” функцией, то $\langle B, C \rangle = 0$;
- 2) $\langle B, C \rangle$ всегда “хорошая” функция;

⁷⁾ Физик, скорее всего, предпочел бы случай $\alpha = 1/2$ ввиду формальной аналогии со знаменитым правилом Фейнмана для определения интегралов по путям. Интеграл для этого выбора α носит название *интеграла Стратоновича*.

3) $\langle w^a(t), w^b(t) \rangle = \delta^{ab}t$ для винеровского процесса;

4) $\langle \int_0^t F dB(\tau) \int_0^t G dC(\sigma) \rangle = \langle \int_0^{\min(s,t)} FG d\langle B, C \rangle \rangle$.

Второе важное свойство интеграла Ито носит название *формулы Ито*. Она отражает весьма нетривиальное поведение интеграла при заменах переменной $q \rightarrow F(q)$. Введем следующее обозначение:

$$dB \cdot dC \stackrel{\text{def}}{=} d\langle B, C \rangle.$$

Тогда утверждение теоремы Ито принимает вид формулы (еще раз напомним о неявно присутствующих символах интегрирования)

$$dF(q) = \partial_\alpha F dq^\alpha + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta F dq^\alpha dq^\beta. \quad (\text{Б.11})$$

Опуская математические детали доказательства, можно легко проиллюстрировать, откуда возникает второй член в уравнении (Б.11). Действительно,

$$\begin{aligned} \int dF = \lim \sum_i & (\partial_\alpha F(t_{i-1})(q^\alpha(t_i) - q^\alpha(t_{i-1})) + \\ & + \frac{1}{2} \partial_\alpha \partial_\beta F(t_{i-1}) \Delta q^\alpha(t_{i-1}) \Delta q^\beta(t_{i-1}) + \dots), \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

где многоточием обозначены члены третьего и старших порядков в разложении в ряд Тейлора. Вспоминая приведенные выше результаты, касающиеся таких членов, можно видеть, что второй член действительно дает квадратичную поправку к “грубому” закону преобразования, в то время как старшие члены не дают вкладов. Возьмем в качестве примера

$$(I_0) \int_0^t w dw = (I_0) \int_0^t \frac{1}{2} d(w^2) - \int_0^t \frac{1}{2} dt \equiv \frac{1}{2} w^2(t) - \frac{1}{2} t,$$

откуда, кстати, видно, что уравнение (Б.11) действительно выполняется.

Другой простой пример – переход к формализму ФПК. Выбирая уравнение Ланжевена в виде

$$dq^a = V^a(q) dt + dw^a \quad (\text{Б.13})$$

и используя формулу Ито, имеем

$$dV(q) = (\partial_a V) Q^a d\tau + \partial_a V dw^a + \frac{1}{2} (\partial_a \partial_b V) \delta^{ab} d\tau, \quad (\text{Б.14})$$

что после усреднения немедленно дает

$$\langle dV(q) \rangle = \left\langle (\partial_a V) Q^a + \frac{1}{2} \partial_a \partial_a V \right\rangle d\tau. \quad (\text{Б.15})$$

Доказательства сформулированных выше утверждений можно найти в многочисленных статьях и монографиях по теории стохастических уравнений. Среди них отметим прекрасную книгу [8] и очень хороший вводный обзор [9].

Благодарности. Автор благодарен А. В. Субботину за важный вклад в подготовку приложения Б. Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-02-17454, 05-01-01049) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-441.2006.2).

Список литературы

- [1] D. K. C. MacDonald, *Philos. Mag.*, **45** (1954), 63; 345; H. A. Kramers, *Physica*, **7** (1940), 284; L. Brillouin, *Phys. Rev.*, **78** (1950), 627; C. T. J. Alkemade, *Physica*, **24** (1958), 1029; A. Marek, *Physica*, **25** (1959), 1358.
- [2] А. Н. Ширяев, *Основы стохастической финансовой математики*, т. 1, 2, Фазис, М., 1998.
- [3] G. Parisi, Y. S. Wu, *Sci. Sinica*, **24** (1981), 483.
- [4] N. G. Van Kampen, *Physica*, **26** (1960), 585; *Canad. J. Phys.*, **39** (1961), 551; “Fluctuations in nonlinear systems”, *Fluctuation Phenomena in Solids*, ed. R. E. Burgess, Academic Press, N. Y., 1965, 139; *Stochastic Process in Physics and Chemistry*, Elsevier Science, Amsterdam, 1990; C. T. J. Alkemade, N. G. Van Kampen, D. K. C. MacDonald, *Proc. Roy. Soc. London*, **271** (1963), 449.
- [5] А. В. Субботин, В. Я. Файнберг, *Тр. ФИАН*, **210** (1993), 4.
- [6] Г. В. Рязанов, *ЖЭТФ*, **35** (1958), 121.
- [7] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*, Физматлит, М., 2001.
- [8] К. В. Гардинер, *Стохастические методы в естественных науках*, Мир, М., 1986.
- [9] Д. Гликич, *Теория стохастических процессов*, Воронеж, 1998.

Поступила в редакцию 20.07.2006