Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Ганжа, Об одном аналоге преобразования Мутара для уравнения Гурса
 $\theta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x, y)\theta_x\theta_y}$, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 1, 50–57

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf554>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:20:10

© 2000 г.

Е. И. Ганжа*

ОБ ОДНОМ АНАЛОГЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ МУТАРА
ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГУРСА $\theta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x, y)}\theta_x\theta_y$

Строится преобразование типа Беклунда для нелинейного уравнения $\theta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x, y)}\theta_x\theta_y$, впервые изучавшегося Гурса. Для этого уравнения им было найдено линеаризующее преобразование. Многие свойства данного уравнения аналогичны известным свойствам уравнения Мутара $u_{xy} = M(x, y)u$. К сожалению, преобразование Гурса не обладает необходимыми свойствами суперпозиции. В статье построены соответствующие расширенные формулы суперпозиции для модифицированного преобразования Гурса–Беклунда.

Уравнение Мутара [1]

$$u_{xy} = M(x, y)u \quad (1)$$

обладает, как известно, многими замечательными свойствами. Наряду со своим физическим аналогом – двумерным стационарным уравнением Шредингера

$$u_{xx} + u_{yy} = M(x, y)u$$

– уравнение (1) активно изучалось в конце XIX – начале XX века в связи с центральными проблемами классической дифференциальной геометрии той эпохи – теории изгибающих поверхностей, теории конгруэнций и сопряженных сетей. В современной теории солитонов уравнение (1) использовалось для построения точных решений уравнений Кадомацева–Петвиашвили, Новикова–Веселова и др. [2–4].

В данной статье изучается другое замечательное уравнение, важность которого впервые была отмечена Гурса [5, 6]

$$\vartheta_{xy} = 2\sqrt{\lambda(x, y)}\vartheta_x\vartheta_y. \quad (2)$$

Это уравнение может быть линеаризовано с помощью дифференциальной подстановки $z = \sqrt{\vartheta_x}$, $w = \sqrt{\vartheta_y}$:

$$\begin{aligned} z_y &= \sqrt{\lambda} w, \\ w_x &= \sqrt{\lambda} z; \end{aligned} \quad (3)$$

* Красноярский государственный педагогический университет, Красноярск, Россия. E-mail: ganzha@edk.krasnoyarsk.su

исключая w , мы получим

$$z_{xy} = \frac{1}{2}(\log \lambda)_x z_y + \lambda z. \quad (4)$$

Данное уравнение имеет свойство, которое делает его схожим с уравнением Мутара: последовательность инвариантов Лапласа в цепочке преобразований Лапласа уравнения (4) *симметрична*. Именно инварианты Лапласа (4) равны [7]

$$h_0 = \lambda, \quad k_0 = h_{-1} = -\frac{1}{2}(\log \lambda)_{xy} + \lambda;$$

инварианты же преобразованного уравнения имеют вид $h_1 = 2h_0 - h_{-1} - (\log h_0)_{xy} = h_{-1}$, $k_1 = h_0$. В силу симметрии рекуррентных формул для инвариантов Лапласа $h_{i+1} = 2h_i - h_{i-1} - (\log h_i)_{xy}$ мы получаем, что $h_i = h_{-i}$ для всех i . Для уравнения Мутара (1) последовательность инвариантов Лапласа также симметрична по отношению к точке $(-1/2)$ “на оси i ”: $h_i = h_{-i-1}$. Очевидно (как отмечает Гурса [5]), что этими двумя типами симметрии исчерпываются все возможные симметрии отражения последовательности Лапласа. По другой терминологии [5] уравнение Мутара (1) самосопряжено; для уравнения Гурса (4) его сопряженное уравнение эквивалентно преобразованному по Лапласу исходному уравнению (эквивалентность означает, что два уравнения имеют одинаковую пару инвариантов).

Недавно свойства преобразования Бек лунда для системы (3) изучались в работе [8], где было описано приложение этого преобразования к построению точных решений $(2+1)$ -мерных интегрируемых систем. В другом контексте эллиптический аналог уравнений (3)

$$\begin{aligned} \psi_z &= p\phi, \\ \phi_{\bar{z}} &= -\bar{p}\psi \end{aligned}$$

рассматривался в работе [9], где на его основе была дана конструкция представления поверхностей в 3-мерном и 4-мерном пространствах; по-видимому, первое подобное использование уравнений (3) для представления поверхностей можно найти в работе [10, с. 87].

Гурса также построил преобразование уравнения (2), сходное со знаменитым преобразованием Мутара, которое [1, 7] дает возможность построить новое решение $\vartheta(x, y)$ уравнения (1) с преобразованным “потенциалом”

$$M_1(x, y) = M_0 - 2(\log R)_{xy} = -M_0 + \frac{2R_x R_y}{R^2} \quad (5)$$

с помощью квадратуры, если заданы *два* различных решения $u = R(x, y)$ и $u = \varphi(x, y)$ уравнения (1) с заданным потенциалом $M = M_0(x, y)$. Напомним соответствующие формулы:

$$\begin{aligned} (R\vartheta)_x &= -R^2 \left(\frac{\varphi}{R} \right)_x, \\ (R\vartheta)_y &= R^2 \left(\frac{\varphi}{R} \right)_y \end{aligned} \quad (6)$$

Рис. 1

Рис. 2

(ср. их аналоги для $u_{xx} + u_{yy} = M(x, y)u$ в [2, 11]). Уравнения (6) устанавливают (многозначное) соответствие между решениями уравнения Мутара (M_0) (т.е. (1) с потенциалом $M_0(x, y)$) и (M_1) (т.е. (1) с потенциалом $M_1(x, y)$). Заметим, что $R_1 = 1/R$ также является решением (M_1) и задает обратное преобразование от (M_1) к (M_0).

При **классической интерпретации** формул (1), (5), (6) уравнение (1) рассматривается как преобразуемое уравнение, а (6) – как формулы преобразования. Мы интерпретируем (6) как часть ромбической диаграммы (рис. 1), типичной для *принципа суперпозиции* преобразований Беклунда [12].

Следует отметить, что знак минус в выражении

$$\psi = -\frac{R\vartheta}{\varphi} \quad (7)$$

является существенным для того, чтобы функция ψ удовлетворяла соответствующим формулам преобразования (6) с $M = M_2$.

Эта интерпретация подсказывает, что (6) может рассматриваться **не** как преобразование типа Беклунда (что обычно подразумевается), а как *формула суперпозиции* для простого преобразования Беклунда, задаваемого формулами (5), (1) для “потенциала” $M(x, y)$, рассматриваемого как “решение” *пустого* уравнения (т.е. как произвольную функцию). Наличие квадратуры в этой формуле суперпозиции типично для преобразований Беклунда $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений. Вопреки тому, что мы имеем лишь x, y в качестве независимых переменных в уравнениях (1)–(6), этот принцип суперпозиции имеет все характерные свойства $(2+1)$ -мерных преобразований Беклунда, поскольку “пустое уравнение” имеет “пространство решений” $\{M(x, y)\}$, состоящее из функций *двух* переменных. Другой менее простой пример рассмотрен в статье [13], где был построен расширенный (исключающий квадратуры) принцип суперпозиции – “куб

Бьянки” (рис. 2). Для уравнения (1) соответствующая алгебраическая формула может быть найдена в книге [11, т. II, часть II, § 297] (см. также [4]). А именно, если R_1, R_2, ϑ — три решения уравнения (1) с заданным $M = M_0$ и решения ϑ_1, ϑ_2 (решения преобразованных уравнений с потенциалами $M_1 = M_0 - 2(\log R_1)_{xy}$, $M_2 = M_0 - 2(\log R_2)_{xy}$) получены из ϑ посредством формул (6), (7), то существует единственное решение ϑ' четвертого уравнения Мутара $u_{xy} = M_{12}u$, связанное с ϑ_1, ϑ_2 преобразованиями Мутара (6). Это решение ϑ' может быть выражено алгебраической формулой

$$\vartheta' - \vartheta = \frac{R_1 R_2}{\lambda} (\vartheta_2 - \vartheta_1), \quad \lambda = R_1 R'_1 = -R_2 R'_2,$$

где R'_1, R'_2 получены из R_2, R_1 по формулам (6), (7).

Этот алгебраический принцип суперпозиции (и его очевидные “гиперкубические” аналоги) позволяет построить (посредством лишь алгебраических операций) бесконечно много новых решений заданного нелинейного интегрируемого $(2+1)$ -мерного уравнения, если возможно найти *все* преобразования Беклунда “первого шага” для некоторого тривиального решения и выполнить квадратуры в случае ромбической диаграммы суперпозиции для этого тривиального решения. При этом возможно найти локальную плотность решений, полученных с помощью этих алгебраических формул, в пространстве всех решений соответствующего интегрируемого уравнения [14, 15].

Преобразование Гурса [6] также позволяет построить (с помощью квадратур) новое решение ϑ уравнения (2) с преобразованным потенциалом λ_1 :

$$\lambda_1(x, y) = \lambda - (\log \vartheta_1)_{xy}, \quad (8)$$

если нам даны два различных решения ϑ_1 и ϑ_2 начального уравнения (2) с заданным потенциалом $\lambda(x, y)$. Прежде всего для этого необходимо найти решение $\hat{z}(x, y)$ следующей совместной системы:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\vartheta_1 \hat{z}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}} \right) = \vartheta_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}} \right), \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\vartheta_1 \hat{z}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}} \right) = \frac{-\vartheta_1^3 \left(\frac{1}{\vartheta_1} \right)_{xy}}{(\vartheta_1)_{xy}} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\sqrt{(\vartheta_2)_x}}{\sqrt{(\vartheta_1)_x}} \right). \end{cases} \quad (9)$$

Это решение $\hat{z}$ является решением уравнения (4) с $\lambda = \lambda_1$. Новое решение $\hat{\vartheta}$ находится посредством другой квадратуры из системы

$$\begin{cases} \hat{\vartheta}_x = (\hat{z})^2, \\ \hat{\vartheta}_y = (\hat{w})^2 = \frac{(\hat{z}_y)^2}{\lambda_1}. \end{cases} \quad (10)$$

Повторим, что при **классической интерпретации** уравнение (2) есть преобразуемое уравнение, а соотношения (9), (10) — формулы преобразования. Следуя же нашему подходу, будем искать одновременно решение $\hat{\vartheta}$ (решение уравнения (λ_1) , т.е. уравнения (2)

с $\lambda = \lambda_1$) и другое решение $\hat{\vartheta}_2$ (решение уравнения (λ_2) , т.е. уравнения (2) с $\lambda = \lambda_2$), образующие ромбическую диаграмму (рис. 3).

Рис. 3

Рис. 4

Предположим, что верна формула преобразования (8). Коммутативность диаграммы рис. 3 дает $\lambda_{12} = \lambda_1 - (\log \hat{\vartheta})_{xy} = \lambda - (\log \hat{\vartheta} \vartheta_1)_{xy} = \lambda_2 - (\log \hat{\vartheta}_2)_{xy} = \lambda - (\log \hat{\vartheta}_2 \vartheta_2)_{xy}$, что позволяет нам предложить следующий анзац:

$$\vartheta_1 \hat{\vartheta} = \vartheta_2 \hat{\vartheta}_2, \quad \text{т.е.} \quad \hat{\vartheta}_2 = \frac{\vartheta_1 \hat{\vartheta}}{\vartheta_2}.$$

Подставляя это выражение для $\hat{\vartheta}_2$ в уравнение Гурса (λ_2) и используя уравнение (λ_1) для $\hat{\vartheta}$, легко доказать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 1. *Функции $\hat{\vartheta}_2 = \vartheta_1 \hat{\vartheta} / \vartheta_2$ и*

$$\hat{\vartheta} = \frac{A\hat{z}^2 + 2B\hat{z}\hat{w} + C\hat{w}^2}{D} \quad (11)$$

с $A = -\vartheta_1(\vartheta_2)_y + \vartheta_2(\vartheta_1)_y$, $B = \vartheta_1\sqrt{(\vartheta_2)_x(\vartheta_2)_y} - \vartheta_2\sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_1)_y}$, $C = -\vartheta_1(\vartheta_2)_x + \vartheta_2(\vartheta_1)_x$, $D = (\sqrt{(\vartheta_2)_x(\vartheta_1)_y} - \sqrt{(\vartheta_1)_x(\vartheta_2)_y})^2$ удовлетворяют соответственно уравнениям (λ_2) и (λ_1) , если и только если $\hat{z} = \sqrt{\hat{\vartheta}_x}$ и $\hat{w} = \sqrt{\hat{\vartheta}_y}$ удовлетворяют совместной системе

$$\begin{cases} \hat{z}_x = \frac{\hat{z}((z_2)_x \vartheta_1 w_1 - (z_1)_x \vartheta_1 w_2 - z_2 z_1^2 w_1 + z_1^3 w_2) + \hat{w} \vartheta_1 ((z_1)_x z_2 - (z_2)_x z_1)}{\vartheta_1 (z_2 w_1 - z_1 w_2)}, \\ \hat{z}_y = \sqrt{\lambda_1} \hat{w}, \\ \hat{w}_y = \frac{\hat{z} \vartheta_1 ((w_2)_y w_1 - (w_1)_y w_2) + \hat{w} ((w_1)_y \vartheta_1 z_2 - (w_2)_y \vartheta_1 z_1 - z_2 w_1^3 + z_1 w_2 w_1^2)}{\vartheta_1 (z_2 w_1 - z_1 w_2)}, \\ \hat{w}_x = \sqrt{\lambda_1} \hat{z}, \end{cases} \quad (12)$$

$$z \partial e z_k = \sqrt{(\vartheta_k)_x}, \quad w_k = \sqrt{(\vartheta_k)_y}.$$

Как легко проверить прямым вычислением, исключение $\widehat{w}$ из (12) дает линейное уравнение второго порядка для $\widehat{z}$, которое можно факторизовать:

$$\begin{aligned} & \vartheta_1^2 \left((z_2)_x z_1 - (z_1)_x z_2 \right) \frac{d^2 \widehat{z}}{dx^2} + \vartheta_1 \left(-(z_2)_{xx} \vartheta_1 z_1 + (z_2)_x z_1^3 + (z_1)_{xx} \vartheta_1 z_2 - (z_1)_x z_2 z_1^2 \right) \frac{d \widehat{z}}{dx} + \\ & + \left((z_2)_{xx} (z_1)_x \vartheta_1^2 - (z_2)_{xx} \vartheta_1 z_1^3 - (z_2)_x (z_1)_{xx} \vartheta_1^2 + 3(z_2)_x (z_1)_x \vartheta_1 z_1^2 - \right. \\ & \left. - (z_2)_x z_1^5 + (z_1)_{xx} \vartheta_1 z_2 z_1^2 - 3(z_1)_x^2 \vartheta_1 z_2 z_1 + (z_1)_x z_2 z_1^4 \right) \widehat{z} = \\ & = \left(\vartheta_1 z_1^3 \left(\frac{z_2}{z_1} \right)_x \right) \left(\frac{d}{dx} - \left(\log \left[\vartheta_1 \left(\frac{z_2}{z_1} \right)_x \right] \right)_x \right) \circ \frac{d}{dx} \left(\frac{\vartheta_1 \widehat{z}}{z_1} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Очевидно, что $f = \vartheta_1 (z_2/z_1)_x$ есть решение уравнения

$$\left(\frac{d}{dx} - \left(\log \left[\vartheta_1 \left(\frac{z_2}{z_1} \right)_x \right] \right)_x \right) f = 0,$$

это дает нам первую из формул Гурса (9). Вторая из них эквивалентна следующему соотношению между $\widehat{w}$ и $\widehat{z}$:

$$\widehat{z} w_1 - \widehat{w} z_1 = w_1 z_2 - z_1 w_2. \quad (14)$$

Это соотношение получается после исключения $\widehat{z}_x$ из первых уравнений (9) и (12). Используя соотношение (14), можно упростить формулу (11):

$$\widehat{\vartheta} = \frac{-\widehat{z}^2 \vartheta_1 + 2 \widehat{z} \vartheta_1 \sqrt{(\vartheta_2)_x} + \vartheta_2 (\vartheta_1)_x - \vartheta_1 (\vartheta_2)_x}{(\vartheta_1)_x}. \quad (15)$$

Тем самым доказывается следующее утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Решение $\widehat{\vartheta}$ уравнения (λ_1) , задаваемое формулой (15) с $\widehat{z}$, удовлетворяющим (9), и $\widehat{\vartheta}_2 = \vartheta_1 \widehat{\vartheta} / \vartheta_2$ (это решение уравнения (λ_2)), обеспечивает коммутативность диаграммы рис. 3.*

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Найденное решение $\widehat{\vartheta}_2 = \vartheta_1 \widehat{\vartheta} / \vartheta_2$ с $\widehat{z}_2 = \sqrt{\widehat{\vartheta}_2}$ не удовлетворяет системе (9); в этом случае необходимо выбрать $\widehat{z}_2 = -\sqrt{\widehat{\vartheta}_2}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Имеет место соотношение $\sqrt{\lambda_i} = \sqrt{\lambda} - \sqrt{(\vartheta_i)_x} \sqrt{(\vartheta_i)_y} / \vartheta_i$.

Как мы уже отмечали, наличие квадратуры в принципе суперпозиции типично для $(2+1)$ -мерного преобразования Беклунда и может быть устранено в “кубической” диаграмме (рис. 4 для преобразования Мутара). Для преобразований Гурса мы можем доказать сходный результат.

ТЕОРЕМА 2. Если заданы три решения $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$ начального уравнения (λ) и найдены решения $\hat{\vartheta}, \eta_1$ уравнения (λ_1) и $\hat{\vartheta}_2, \eta_2$ уравнения (λ_2) (с помощью (15), (9)), то существует единственное решение ϑ' четвертого уравнения Гурса (λ_{12}) , связанное с обоими решениями $\hat{\vartheta}, \hat{\vartheta}_2$ преобразованиями Гурса (15), (9). Это решение ϑ' задается следующей алгебраической формулой:

$$\begin{aligned} \vartheta' = & (-\vartheta_1\vartheta_2z_2^2z_3^2 + 2\vartheta_1\vartheta_2z_2^2z_3v_2 + \vartheta_1\vartheta_2z_2^2v_1^2 - 2\vartheta_1\vartheta_2z_2^2v_1v_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2z_2z_3^2\hat{z}_1 - \\ & - 2\vartheta_1\vartheta_2z_2z_3\hat{z}_1v_1 - 2\vartheta_1\vartheta_2z_2z_3\hat{z}_1v_2 + 2\vartheta_1\vartheta_2z_2\hat{z}_1v_1v_2 + \vartheta_1z_2^4\vartheta_3 - 2\vartheta_1z_2^3\vartheta_3\hat{z}_1 + \\ & + \vartheta_1z_2^2\vartheta_3\hat{z}_1^2 + \vartheta_2^2z_1^2z_3^2 - 2\vartheta_2^2z_1^2z_3v_2 + \vartheta_2^2z_1^2v_2^2 - \vartheta_2z_1^2z_2^2\vartheta_3) \times \\ & \times z_2^{-2}(\vartheta_1z_2^2 - 2\vartheta_1z_2\hat{z}_1 + \vartheta_1\hat{z}_1^2 - \vartheta_2z_1^2)^{-1}, \end{aligned}$$

где $z_i = \sqrt{(\vartheta_i)_x}$, $v_i = \sqrt{(\eta_i)_x}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя систему (9), мы получаем два набора соотношений для $z' = \sqrt{\vartheta'_x}$, поскольку решение ϑ' связано двумя ромбическими диаграммами, построенными соответственно из $\hat{\vartheta}, \eta_1$ и $\hat{\vartheta}_2, \eta_2$. Мы можем найти требуемую алгебраическую формулу для z' из этих двух наборов. Используя формулу (15), получаем алгебраическую формулу для ϑ' . Прямой (хотя и длинной) выкладкой можно проверить, что найденная функция ϑ' удовлетворяет всем необходимым уравнениям.

В заключение отметим некоторые нерешенные проблемы:

1. Пусть даны n решений ϑ_k начального уравнения (2). Требуется доказать, что, используя теорему 2, возможно получить коммутативную “гиперкубическую диаграмму” с 2^n вершинами. Для многих $(1+1)$ - и $(2+1)$ -мерных интегрируемых уравнений можно явным вычислением проверить коммутативность 4- и 5-мерных “гиперкубических остовов”. В [16] был доказан общий результат о коммутативности n -мерного гиперкубического остова для уравнения Цицейки $\vartheta_{xy} = e^\vartheta - e^{-2\vartheta}$.

2. Известны важные приложения уравнения Мутара для построения изометрических поверхностей, специальных классов линейных конгруэнций и сопряженных систем координат в классической дифференциальной геометрии (см., например, [7]), построения точных решений интегрируемых $(2+1)$ -мерных уравнений (Кадомцева–Петвиашвили, Новикова–Веселова, синус–Гордон [2, 4]). Возможно ли использовать уравнения Гурса (2)–(4) для этой цели, учитывая сходство свойств этих уравнений и уравнения Мутара?

Список литературы

- [1] T. Moutard. J. École Polytechnique. 1878. V. 45. P. 1–11.
- [2] C. Athorne, J. J. C. Nimmo. Inverse Problems. 1991. V. 7. P. 809–826.
- [3] V. B. Matveev, M. A. Salle. Darboux transformations and solitons. Berlin–N. Y.: Springer-Verlag, 1991.
- [4] J. J. C. Nimmo, W. K. Schief. Proc. Roy. Soc. London. A. 1997. V. 453. P. 255–279.
- [5] É. Goursat. Bull. Soc. Math. France. 1897. V. 25. P. 36–48.
- [6] É. Goursat. Bull. Soc. Math. France. 1900. V. 28. P. 1–6.
- [7] G. Darboux. Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du calcul infinitésimal. T. 1–4. Paris: Gautier-Villard, 1887–1896.

- [8] *C. Athorne*. Inverse Problems. 1993. V. 9. P. 217–232.
- [9] *B. G. Konopelchenko*. Weierstrass representation for surfaces in 4D space and their integrable deformations via DS hierarchy. math-dg/9807129.
- [10] *L. P. Eisenhart*. A treatise on the differential geometry of Curves and Surfaces. N.Y.: Dover, 1909.
- [11] *L. Bianchi*. Lezioni di geometria differenziale. 3-nd ed. V. 1–4. Bologna: Zanichelli, 1923–1927.
- [12] Bäcklund transformations. Ed. R. M. Miura. Lect. Notes Math. V. 515. Berlin–N. Y.: Springer-Verlag, 1976.
- [13] *Е. И. Ганжа, С. П. Царев*. УМН. 1996. Т. 51. № 6. С. 197, 198. solv-int/9606003.
- [14] *Е. И. Ganzha*. On completeness on the Moutard transformations. solv-int/9606001.
- [15] *Е. И. Ganzha*. On completeness of the Ribaucour for triply orthogonal curvilinear coordinate systems in $\mathbf{R}^3$. solv-int/9606002.
- [16] *О. V. Kaptsov, Yu. V. Shanko*. Trilinear representation and Moutard transformation for the Tzitzéica equation. solv-int/9704014.