Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Р. Халилов, Электрон в потенциале Ааронова–Бома и кулоновском поле в $2+1$ измерениях, *ТМФ*, 2006, том 149, номер 3, 502–517

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf5540>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 15:28:31

© 2006 г.

В. Р. Халилов*

ЭЛЕКТРОН В ПОТЕНЦИАЛЕ ААРОНОВА–БОМА И КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ В 2+1 ИЗМЕРЕНИЯХ

Найдены точные решения уравнения Дирака в 2+1 измерениях и спектр энергий электрона в суперпозиции потенциала Ааронова–Бома и кулоновского потенциала, с помощью которых эффект Ааронова–Бома изучается для состояний с непрерывным и дискретным спектрами энергий. Выражение для полной амплитуды рассеяния представлено в виде суммы амплитуд рассеяния на потенциале Ааронова–Бома и на кулоновском потенциале. Показано, что наблюдаемыми величинами являются калибровочно-инвариантная фаза волновой функции или энергия связанного состояния электрона. Получена формула для поперечного сечения рассеяния спин-поляризованных электронов на потенциале Ааронова–Бома. Обсуждается вопрос о возможности появления связанного состояния при учете взаимодействия спина электрона с магнитным полем, выбранным в виде двумерной дельта-функции Дирака.

Ключевые слова: эффект Ааронова–Бома, амплитуда рассеяния, поляризованный электрон, связанное состояние.

1. ВВЕДЕНИЕ

Эффект Ааронова–Бома (АБ), предсказанный в работе [1], возникает при движении электронов в поле векторного потенциала A_μ , для которого магнитный поток заключен в трубку конечного радиуса, топологически эквивалентную цилиндру. При движении электрона в потенциале АБ его волновая функция приобретает (топологическую) фазу, влияющую на интерференционную картину в области, где напряженность магнитного поля равна нулю. Относительная фаза волновой функции электрона измерима, так как, будучи калибровочно-инвариантной величиной, она зависит от магнитного потока [2].

В цилиндрически-симметричной конфигурации внешнего поля, когда естественно предположить инвариантность квантово-механической системы вдоль оси симметрии поля (ось z), изучаемая система становится существенно двумерной в плоскости xy [2]. Поэтому для описания эффекта АБ обычно используются (2+1)-мерные модели. Точные решения уравнения Дирака в 2+1 измерениях в потенциале АБ впервые были получены в работе [3], где с их помощью изучалось взаимодействие

*Московский государственный университет, Москва, Россия.
E-mail: khalilov@phys.msu.ru

космических струн с материей. Но решения уравнения Дирака в 2+1 измерениях представляют собой спинор, верхняя и нижняя компоненты которого интерпретируются соответственно как положительно- и отрицательно-частотные решения уравнения Дирака. Иными словами, электрон в 2+1 измерениях соответствует электрону в 3+1 измерениях с одной (а не с двумя) проекцией трехмерного вектора спина на ось z . Поэтому такие решения позволяют учесть только релятивистские поправки.

Целый ряд физических явлений, имеющих место в аксиально-симметричных квантовых системах заряженных фермионов в 3+1 измерениях, более полно и эффективно можно исследовать с помощью соответствующего уравнения Дирака в 2+1 измерениях. Эффективность такой редукции прежде всего связана с возможностью получения точных решений уравнения Дирака в 2+1 измерениях в виде специальных функций в более широком классе (по сравнению со случаем 3+1 измерений) аксиально-симметричных внешних полей. Найденные решения дают возможность изучить релятивистские эффекты. Точные решения уравнения Дирака и спектр энергий фермиона в 2+1 измерениях в суперпозиции потенциала АБ и кулоновских векторного и скалярного потенциалов были найдены в работе [4].

Чтобы учесть взаимодействие трехмерного спинового магнитного момента электрона с магнитным полем, мы должны обратиться к уравнению Паули в 3+1 измерениях, которое содержит соответствующий член взаимодействия. Для рассеяния на малые углы ($\varphi \ll 1$) с малой передачей импульса ($q = 2k \sin(\varphi/2)$) существенны только большие поперечные к соленоиду расстояния ($y \sim 1/q \gg R$), так что R можно устремить к нулю и считать магнитное поле сосредоточенным внутри цилиндрической трубки нулевого радиуса.

В работах [5] в нерелятивистском приближении теоретически исследован вклад в амплитуду АБ, возникающий в результате спин-орбитального взаимодействия магнитного момента электрона с внешним однородным электрическим полем, направленным вдоль оси соленоида. Этот эффект нашел подтверждение в экспериментах [6].

Целью предлагаемой статьи является изучение релятивистского эффекта АБ в присутствии кулоновского потенциала, а также исследование рассеяния спин-поляризованных электронов на потенциале АБ.

Решения уравнения Дирака в 2+1 измерениях в потенциале АБ

$$\begin{aligned} A^0 &= 0, & A_x &= -\frac{By}{r^2}, & A_y &= \frac{Bx}{r^2}; \\ A^0 &= 0, & A_r &= 0, & A_\varphi &= \frac{B}{r}; \\ B &= \frac{\Phi}{2\pi}, & r &= \sqrt{x^2 + y^2}, & \varphi &= \arctg\left(\frac{y}{x}\right), \end{aligned} \quad (1)$$

и кулоновского потенциала

$$A^0(r) = -\frac{a}{er}, \quad A_r = 0, \quad A_\varphi = 0 \quad (2)$$

(e – заряд электрона) можно представить в виде специальных функций.

Образцом для данной статьи служат работы Логунова с соавторами по построению адекватной модели, описывающей проблему двух тел в квантовой теории поля [7], в которых дано математически оптимальное (для интерпретации результатов)

решение четко поставленной физической проблемы. В этих работах система двух тел в квантовой теории поля описывается трехмерными уравнениями, близкими по структуре к уравнению Шредингера с так называемым квазипотенциалом, что позволяет сохранить вероятностную интерпретацию волновой функции. Вместе с этим теорию можно переформулировать в терминах матрицы рассеяния, что снимает трудности с перенормировками.

В статье используется система единиц, в которой $c = \hbar = 1$, однако там, где это необходимо, размерности восстанавливаются.

2. ЭЛЕКТРОН В ПОТЕНЦИАЛЕ АБ

В 2+1 измерениях для описания релятивистских фермионов достаточно ввести три γ -матрицы Дирака (см., например, работу [8]), а значит, их можно представить через двумерные матрицы Паули σ_j .

Модель с заряженными фермионами инвариантна относительно операции зарядового сопряжения, а преобразование $m \rightarrow -m$ эквивалентно преобразованию $\gamma^\mu \rightarrow -\gamma^\mu$. Следовательно, без потери общности можно фиксировать знаки e и m .

Рассмотрим движение электрона с массой $m > 0$ и зарядом $e < 0$ в плоскости xy в потенциале (1). В трехмерном пространстве такой конфигурации полей соответствует магнитное поле соленоида нулевого радиуса, создающего конечный магнитный поток Φ в направлении z (магнитное поле $B_z = \Phi\delta(\mathbf{r})$). Уравнение Дирака в 2+1 измерениях в поле A_μ имеет вид

$$(\gamma^\mu \hat{P}_\mu - m)\Psi = 0. \quad (3)$$

Здесь $\hat{P}_\mu = -i\partial_\mu - eA_\mu$ – оператор обобщенного импульса фермиона.

Решения уравнения Дирака (3) в поле (1) ищем в виде

$$\Psi(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-iEt+il\varphi} \psi(r, \varphi), \quad (4)$$

где E – энергия электрона, l – целое число и

$$\psi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} f(r) \\ g(r)e^{i\varphi} \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Подставляя выражение (5) в уравнение (4), получим

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l+eB}{r}f + (E+m)g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1+l+eB}{r}g - (E-m)f &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Волновая функция электрона в поле (1), ограниченная при $r = 0$, имеет вид

$$\Psi_p(r, \varphi) = e^{-iEt+il\varphi} \sqrt{\frac{\pi p}{2E}} \begin{pmatrix} \sqrt{E+m} J_\nu(pr) \\ -i\sqrt{E-m} e^{i\varphi} J_{\nu+1}(pr) \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Здесь $p = \sqrt{E^2 - m^2}$, а $J_\nu(pr)$ – функция Бесселя с индексом

$$\nu = |l + eB|.$$

Волновые функции нормированы условием

$$\int \psi_{p,l}^* \psi_{p',l'} d^2x = 2\pi \delta_{l,l'} \delta(p - p'). \quad (8)$$

При $B = 0$ волновая функция (7) описывает свободный электрон в 2+1 измерениях. Чтобы исключить другое независимое решение $J_{-\nu}(pr)$, индекс функции Бесселя должен быть положительным: $|l + eB| > 0$.

Заметим, что когда индекс функции Бесселя ν равен целому числу $l + s$, поток напряженности магнитного поля квантован как

$$\Phi = \frac{2\pi \hbar c s}{|e|} \equiv \Phi_0 s,$$

где Φ_0 – элементарный магнитный поток Φ_0 . В этом случае $eB = s$ и амплитуда рассеяния должна обращаться в нуль, так как при $eB = s$ индекс ν – целое число, а поскольку в разложении плоской волны по функциям Бесселя присутствуют все состояния с целыми значениями l , плоская волна распространяется без искажений.

Рассмотрим задачу рассеяния электрона в поле (1), считая, что до рассеяния электрон движется в положительном направлении оси x , а верхняя компонента волновой функции нормирована на единицу. В поле (1) волновая функция электрона при $r \rightarrow \infty$ должна иметь асимптотический вид

$$\psi_p(r, \varphi) \left(-ip/(E + m) \right) e^{ipx + ieB\varphi} + \left(ip/(E + m) \right) \frac{f(\varphi)}{\sqrt{r}} e^{ipr}. \quad (9)$$

Здесь $f(\varphi)$ – амплитуда рассеяния. Заметим, что в связи с медленным спаданием поля (1) падающая плоская волна искажается даже на больших расстояниях от точки $x = y = 0$; это показывает наличие члена $e^{ieB\varphi}$.

Далее представим верхнюю компоненту $\psi(r, \varphi)$ в виде

$$\psi(r, \varphi) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l J_{\nu}(pr) e^{il\varphi}, \quad (10)$$

где коэффициенты должны быть выбраны так, чтобы функция (10) на больших расстояниях имела асимптотический вид (9). Нетрудно показать, что для этого коэффициенты должны быть равны

$$A_l = e^{-i(\pi/2)|l + eB|}. \quad (11)$$

Для коэффициента, определяющего амплитуду рассеяния, получим выражение, совпадающее с известной формулой АБ:

$$f_{AB}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \frac{e^{-i\varphi(s-1/2)} \sin(e\Phi/2)}{\sin(\varphi/2)}. \quad (12)$$

Здесь $e\Phi = 2\pi s + 2\pi\Delta$, $-1/2 \leq \Delta \leq 1/2$. Сечение рассеяния электронов также дается известной формулой АБ:

$$d\sigma = |f_{AB}(\varphi)|^2 d\varphi = \frac{\sin^2(\pi eB) d\varphi}{2\pi p \sin^2(\varphi/2)}. \quad (13)$$

3. СОСТОЯНИЯ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Чтобы изучить связанные состояния в полях (1) и (2), решения уравнения Дирака ищем в виде (4). После стандартных преобразований приходим к системе уравнений для функций $f(r)$ и $g(r)$ из выражения (5):

$$\begin{aligned} \frac{df}{dr} - \frac{l + eB}{r}f + \left(E + m + \frac{a}{r}\right)g &= 0, \\ \frac{dg}{dr} + \frac{1 + l + eB}{r}g - \left(E - m + \frac{a}{r}\right)f &= 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Функции $f(r)$ и $g(r)$ нормированы условием

$$\int_0^\infty (|f^2| + |g^2|) dr = 1. \quad (15)$$

При малых r решения ищем в виде

$$f = Ar^{\gamma-1}, \quad g = Cr^{\gamma-1}.$$

Подстановка в уравнения дает

$$A(\gamma - 1 - l - eB) + Ca = 0, \quad Aa - C(\gamma + l + eB) = 0,$$

откуда

$$\gamma = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(l + eB + \frac{1}{2}\right)^2 - a^2}. \quad (16)$$

Если $(l + eB + 1/2)^2 > a^2$, то оба корня γ вещественны, и должно быть выбрано положительное значение. Хотя волновая функция и может обратиться при $r = 0$ в бесконечность (если $-1 < \gamma < 0$), но интеграл от $|\psi|^2$ остается сходящимся. Если $a^2 > (l + eB + 1/2)^2$, то оба корня γ оказываются мнимыми, а соответствующие волновые функции решения осциллируют при $r \rightarrow 0$. Существование волн, распространяющихся к центру поля, недопустимо в релятивистской теории, поэтому кулоновские поля (2) в 2+1 измерениях в теории Дирака можно рассматривать лишь при $(l + eB + 1/2)^2 > a^2$.

Для нахождения точных решений уравнения Дирака, характеризующих состояния дискретного спектра энергий электрона, представим функции $f(r)$ и $g(r)$ в виде

$$\begin{aligned} f(r) &= \sqrt{m + E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 + Q_2), \\ g(r) &= -\sqrt{m - E} e^{-\rho/2} \rho^{\gamma-1} (Q_1 - Q_2), \end{aligned} \quad (17)$$

где введены обозначения

$$\rho = 2\lambda r, \quad \lambda = \sqrt{m^2 - E^2}, \quad (18)$$

а γ определяется формулой (16).

Уравнения

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{d\rho}(Q_1 + Q_2) - \frac{l + eB}{\rho}(Q_1 + Q_2) - \rho Q_2 + a\sqrt{\frac{m - E}{m + E}}(Q_1 - Q_2) &= 0, \\ \rho \frac{d}{d\rho}(Q_1 - Q_2) + \frac{1 + l + eB}{\rho}(Q_1 - Q_2) + \rho Q_2 - a\sqrt{\frac{m + E}{m - E}}(Q_1 + Q_2) &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

запишем в виде суммы и разности и далее, после исключения Q_1 или Q_2 , получим

$$\begin{aligned} \rho \frac{d^2}{d\rho^2} Q_1 + (2\gamma - \rho) \frac{d}{d\rho} Q_1 - \left(\gamma - \frac{aE}{\lambda} \right) Q_1 &= 0, \\ \rho \frac{d^2}{d\rho^2} Q_2 + (2\gamma - \rho) \frac{d}{d\rho} Q_2 - \left(\gamma + 1 - \frac{aE}{\lambda} \right) Q_2 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение этих уравнений, конечное при $\rho = 0$, выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию $F(b, c; z)$:

$$\begin{aligned} Q_1 &= AF \left(\gamma - \frac{1}{2} - \frac{aE}{\lambda}, 2\gamma; \rho \right), \\ Q_2 &= CF \left(\gamma + \frac{1}{2} - \frac{aE}{\lambda}, 2\gamma; \rho \right), \end{aligned} \quad (21)$$

причем

$$C = \frac{\gamma - 1/2 - Ea/\lambda}{l + eB + 1/2 + ma/\lambda} A. \quad (22)$$

Для нормированных решений обе гипергеометрические функции должны сводиться к полиномам. Для этого параметр b функции $F(b, c; z)$ должен быть равен целому отрицательному числу или нулю, что дает уравнение для определения спектра энергий:

$$\gamma - \frac{1}{2} - \frac{Ea}{\lambda} = -n_r, \quad \frac{Ea}{\lambda} = n_r + \gamma - \frac{1}{2} \equiv n. \quad (23)$$

Если $n_r = 1, 2, 3, \dots$, то Q_1 и Q_2 сводятся к полиномам. Если же $n_r = 0$, то к полиному сводится только Q_1 . Но равенство $n_r = 0$ означает, что

$$\gamma = \frac{1}{2} + \frac{Ea}{\lambda} \quad \text{и} \quad \left| l + eB + \frac{1}{2} \right| = \frac{ma}{\lambda}.$$

Если $l + eB + 1/2 > 0$, то $C = 0$, так что $Q_2 = 0$, и требуемое условие не нарушается (Q_1 – полином). Если $l + eB + 1/2 < 0$, то, раскрывая (22) по правилу Лопиталья, получаем $C = -A$, и Q_2 остается расходящейся функцией. Следовательно, допустимы следующие значения числа n : $0, 1, 2, \dots$ при $l + eB + 1/2 > 0$ и $1, 2, 3, \dots$ при $l + eB + 1/2 < 0$.

Из соображений непрерывности к состояниям частиц (а не античастиц) следует относить все состояния, которые при бесконечно медленном выключении внешнего поля примыкают к положительной границе непрерывного спектра $E = m$ (см., например, книгу [9]). Таким образом, дискретные уровни энергии фермиона имеют вид

$$E_n = m \left[1 + \frac{a^2}{(n_r + \sqrt{(l + eB + 1/2)^2 - a^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (24)$$

Следует отметить, что в решения и формулы для спектра энергий уравнения Клейна–Гордона входит параметр

$$\gamma_s = \sqrt{(l + eB)^2 - a^2}, \quad (25)$$

а соответствующее выражение для спектра энергий имеет вид

$$E_s = m \left[1 + \frac{a^2}{(n_r - 1/2 + \sqrt{(l + eB)^2 - a^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (26)$$

Оно имеет смысл только при условии $|l + eB| > a^2$, запрещающем (во всяком случае при $B = 0$) существование уровней энергии с $l = 0$. Эта особенность спектра энергий уравнения Клейна–Гордона отсутствует в спектре энергий уравнения Дирака.

Если eB равно целому числу, то функции (21) не отличаются от решений уравнения Дирака для фермиона в чисто кулоновском поле (2); не отличаются и спектры энергий фермиона. Если eB не равно целому числу, то функции (21) существенно отличны от соответствующих функций для целых l , а спектры энергий фермиона в рассматриваемой суперпозиции и в чисто кулоновском поле различны. Стоит отметить, что величина eB в формуле (24) аналогична поправке Ридберга, которая учитывает отклонение электрического поля атома на малых расстояниях от чисто кулоновского.

Заметим, что поле тонкого соленоида должно изменить спектр излучения электрона (при нецелых eB) при его квантовых переходах с верхнего уровня энергии на нижний.

4. ЭФФЕКТ АБ В ПРИСУТСТВИИ КУЛОНОВСКОГО ПОТЕНЦИАЛА

Волновые функции непрерывного спектра ($E > m$) можно получить из функций дискретного спектра (21) заменами

$$\sqrt{m - E} \rightarrow -i\sqrt{E - m}, \quad \lambda \rightarrow -ip, \quad -n_r \equiv -n \rightarrow \gamma - \frac{1}{2} - \frac{iaE}{p}, \quad (27)$$

и, разумеется, заново должна быть произведена нормировка функций. Проведя указанные замены, представим функции f и g в виде

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{E + m} \\ \sqrt{E - m} \end{pmatrix} A' e^{ipr} (2pr)^{\gamma-1} \times \\ \times \left[e^{i\xi} F\left(\gamma - \frac{1}{2} - i\mu, 2\gamma; -2ipr\right) \mp e^{-i\xi} F\left(\gamma + \frac{1}{2} - i\mu, 2\gamma; -2ipr\right) \right], \quad (28)$$

где A' – константа нормировки и введены обозначения

$$\mu = \frac{aE}{p}, \quad e^{-2i\xi} = \frac{\gamma - 1/2 + i\mu}{l + eB + 1/2 - i\mu'}, \quad \mu' = \frac{ma}{p} \equiv \mu \frac{m}{E}.$$

Отметим, что величина ξ вещественна.

После простых преобразований, аналогичных приведенным в книге [9] для случая 3+1 измерений, найдем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = & \sqrt{\frac{E \pm m}{Ep}} \frac{(2pr)^\gamma}{r} \frac{|\Gamma(\gamma + 1/2 + i\mu)|}{\Gamma(2\gamma)} e^{\pi\mu/2} e^{-i(\pi/2 - \gamma + 1/2 + \mu \ln(2pr) - \arg \Gamma(\gamma + 1/2 + i\mu))} \times \\ & \times \begin{pmatrix} \text{Im} \\ \text{Re} \end{pmatrix} \left[e^{i(pr+\xi)} F\left(\gamma - \frac{1}{2} - i\mu, 2\gamma; -2ipr\right) \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

Здесь $\Gamma(z)$ – Γ -функция.

Асимптотическое выражение волновой функции имеет вид

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{2(E \pm m)}{Er}} \begin{pmatrix} \sin \\ \cos \end{pmatrix} \left(pr + \delta_l + \mu \ln 2pr - \frac{\pi l}{2} \right), \quad (30)$$

где

$$\delta_l = \xi - \frac{\pi\gamma}{2} - \arg \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2} + i\mu\right) + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, \quad (31)$$

а

$$e^{2i\delta_l} = \frac{l + eB + 1/2 - i\mu'}{\gamma - 1/2 + i\mu} \frac{\Gamma(\gamma + 1/2 - i\mu)}{\Gamma(\gamma + 1/2 + i\mu)} e^{i\pi(l - \gamma + 1/2)}. \quad (32)$$

Выражение для аналитического продолжения формулы (32) в область $E < m$

$$e^{2i\delta_l} = \frac{l + eB + 1/2 + am/\lambda}{\gamma - 1/2 - aE/\lambda} \frac{\Gamma(\gamma + 1/2 - aE/\lambda)}{\Gamma(\gamma + 1/2 + aE/\lambda)} e^{i\pi(l - \gamma + 1/2)} \quad (33)$$

имеет полюсы в точках, где $\gamma + 1/2 - (aE)/\lambda = 1 - n$, $n = 1, 2, \dots$, а также в точке $\gamma - 1/2 - aE/\lambda = -n = 0$. Эти точки совпадают с дискретными уровнями энергии. Вблизи какого-либо из полюсов с $n \neq 0$, учитывая вид Γ -функции вблизи ее полюса, получим

$$e^{2i\delta_l} \approx (-1)^{n+l} \frac{(l + eB + R + 1/2)\lambda^3}{\Gamma(n+1)\Gamma(2\gamma+n)m^2a(E-E_0)} e^{-i\pi(\gamma-1/2)}. \quad (34)$$

Как известно [9], вычет функции $e^{2i\delta_l}$ в ее полюсе связан с коэффициентом в асимптотическом выражении волновой функции соответствующего связанного состояния. Здесь мы приведем окончательный результат:

$$f \approx A_0 e^{-\lambda r}, \quad g = \sqrt{\frac{m-E}{m+E}} f, \quad (35)$$

где

$$A_0 = \left[\sqrt{\frac{m+E}{m-E}} \frac{(l + eB + ma/\lambda + 1/2)\lambda^3}{2m^2a\Gamma(n+1)\Gamma(2\gamma+n)} \right]^{1/2} (2\lambda r)^{\gamma+n-1/2}. \quad (36)$$

Рассмотрим теперь задачу рассеяния в присутствии кулоновского потенциала в 2+1 измерениях. Полные фазовые сдвиги волновых функций, согласно выражению (30), равны

$$\delta_l = -\frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2} + \xi - \arg \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2} + i\mu\right) \equiv \delta_{AB} + \delta_l^a, \quad (37)$$

где

$$\delta_{AB} = -\frac{\pi\gamma}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi l}{2}, \quad (38)$$

$$\delta_l^a = \xi - \arg \Gamma\left(\gamma + \frac{1}{2} + i\mu\right) \quad (39)$$

– фазовые сдвиги, обусловленные рассеянием электрона соответственно на потенциале АБ и кулоновском. Отметим, что δ_{AB} и δ_l^a слабо зависят от a и eB , соответственно.

Полная амплитуда рассеяния, очевидно, пропорциональна

$$f_{\text{tot}}(\varphi) \sim \sum_{l=0}^{\infty} (e^{2i\delta_{AB}+2i\delta_l^a} - 1). \quad (40)$$

Разность под знаком суммы представим в виде [10]

$$e^{2i\delta_{AB}+2i\delta_l^a} - 1 = [e^{2i\delta_{AB}} - 1] + [e^{2i\delta_{AB}}(e^{2i\delta_l^a} - 1)]. \quad (41)$$

Далее учтем, что фазы АБ вообще не зависят от l , а кулоновские фазы вносят одинаковый по порядку величины вклад в амплитуду рассеяния при всех (больших) l , поэтому вклад кулоновских фаз вычислим в квазиклассическом приближении. С учетом формулы (12) в результате простых вычислений получим

$$f_{\text{tot}}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i}} \frac{1}{\sin(\varphi/2)} \left[\sin(\pi eB) e^{-i\varphi(s-1/2)} + \frac{am}{p} e^{i\pi eB} \right] \equiv f_{AB}(\varphi) + f_a(\varphi). \quad (42)$$

Подчеркнем, что такое разделение условно, так как рассеяние электрона на потенциале АБ сказывается на амплитуде $f_a(\varphi)$, а присутствие кулоновского потенциала – на амплитуде $f_{AB}(\varphi)$.

В сечении рассеяния обе части интерферируют друг с другом:

$$\begin{aligned} d\sigma &= |f_{\text{tot}}(\varphi)|^2 d\varphi = \\ &= \frac{d\varphi}{2\pi p \sin^2(\varphi/2)} \left[\sin^2(\pi eB) + \left(\frac{2am}{p}\right) \sin(\pi eB) \cos\left(s\varphi + \frac{\varphi}{2} + \pi eB\right) + \left(\frac{am}{p}\right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (43)$$

Из этой формулы видно, что периодическая зависимость интерференционного члена от магнитного потока в сечении рассеяния различна для рассеяния вперед ($\varphi = 0$) и назад ($\varphi = \pi$).

5. ЭФФЕКТ АБ ДЛЯ СПИН-ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Рассмотрим уравнение Паули для спинора $\Psi(t, \mathbf{r}, z)$ в потенциале АБ в 3+1 измерениях:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, \mathbf{r}, z) = \mathcal{H} \Psi(t, \mathbf{r}, z), \quad \mathbf{r} = (x, y), \quad (44)$$

где гамильтониан $\mathcal{H}$ имеет вид

$$\mathcal{H} \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eBy}{cr^2} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eBx}{cr^2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \mu\sigma_z H. \quad (45)$$

Здесь $\mu = |e|\hbar/(2mc)$ – магнетон Бора, σ_3 – матрица Паули

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Последний член в выражении (45) описывает взаимодействие спина электрона с магнитным полем. В этом и следующем разделах полезно восстановить c и $\hbar$.

Векторный потенциал АБ в 3+1 измерениях запишем в виде

$$\begin{aligned} A^0 &= 0, & A_x &= -\frac{By}{r^2}, & A_y &= \frac{Bx}{r^2}, & A_z &= 0; \\ A^0 &= 0, & A_r &= 0, & A_\varphi &= \frac{B}{r}, & A_z &= 0, \end{aligned} \quad (46)$$

а магнитное поле –

$$\mathbf{H} = (0, 0, H) = \nabla \times \mathbf{A} = \Phi \delta(\mathbf{r}). \quad (47)$$

Ищем решения уравнения Паули в виде

$$\Psi(t, \mathbf{r}, z) = e^{-iEt/\hbar + il\varphi + ikz} f(r) \psi, \quad (48)$$

где E – собственное значение энергии электрона, l – целое число, а ψ – постоянный спинор:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}. \quad (49)$$

Подставляя выражение (48) в уравнение (44), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция $f(r)$ всюду, кроме точки $\mathbf{r} = 0$:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - k^2 - \frac{l^2}{r^2} - \frac{2eBl}{c\hbar r^2} - \frac{e^2 B^2}{c^2 \hbar^2 r^2} + \frac{2Em}{\hbar^2} \right) f(r) = 0. \quad (50)$$

Решение $f(r)$ (ограниченное при $r = 0$) имеет вид

$$f(r) = J_\nu(k_\perp r). \quad (51)$$

Здесь $k_\perp = \sqrt{2mE/\hbar^2 - k^2}$. Неограниченное при $r = 0$ решение можно исключить условием $|l + eB/(\hbar c)| > 0$.

Волновые функции (48) с $E > 0$ принадлежат непрерывному спектру и являются состояниями рассеяния. Так как дополнительный (дельта-) потенциал действует только в точке $\mathbf{r} = 0$, где функция $J_\nu(k_\perp r)$ обращается в нуль, то можно заключить, что полученные решения $J_\nu(k_\perp r)$ справедливы, если только не появляются новые (связанные) состояния. Другой аргумент против модификации решений $J_\nu(k_\perp r)$ следует из того факта, что дополнительный потенциал имеет нулевой радиус взаимодействия.

Следовательно, если рассеяние происходит в плоскости xy , причем до рассеяния электрон движется в положительном направлении оси x , то пространственная часть амплитуды рассеяния определяется формулой (12), в которой $p = \sqrt{2mE/\hbar^2}$ и $eB \rightarrow eB/(\hbar c)$. Тем не менее при учете спина электрона в амплитуде рассеяния появится множитель, зависящий от проекций спина электрона на ось квантования

и единичных векторов в направлении распространения электрона до и после рассеяния.

Действительно, пусть спин электрона ориентирован вдоль единичного вектора $\mathbf{n}$, характеризуемого полярным (ϑ) и азимутальным (ϕ) углами по отношению к фиксированным осям x, y, z . Тогда спинор ψ^s , определяемый уравнением

$$(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})\psi^s = s\psi^s \quad (52)$$

с $s = \pm 1$, имеет вид

$$\psi^1 = \begin{pmatrix} e^{-i\phi/2} \cos(\vartheta/2) \\ e^{i\phi/2} \sin(\vartheta/2) \end{pmatrix}, \quad (53)$$

$$\psi^{-1} = \begin{pmatrix} -e^{-i\phi/2} \sin(\vartheta/2) \\ e^{i\phi/2} \cos(\vartheta/2) \end{pmatrix}. \quad (54)$$

Не ограничивая общности, положим $\phi = 0$ в спиноре в начальном состоянии (ψ_i^s). Тогда следует положить $\phi = \varphi$ в конечном состоянии (ψ_f^s). Далее, нетрудно найти

$$\psi_i^1 = A\psi_f^1 + B\psi_f^{-1}, \quad \psi_i^{-1} = C\psi_f^1 + D\psi_f^{-1}, \quad (55)$$

где $A = D^* = \cos(\varphi/2) + i \cos \vartheta \sin(\varphi/2)$, $C = B^* = i \sin \vartheta \sin(\varphi/2)$. Заметим, что $\cos \vartheta$ и $\sin \vartheta$ можно записать через скалярное ($\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_z$) и векторное $[\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_z]$ произведения единичных векторов $\mathbf{n}_i$ и $\mathbf{n}_z$, соответственно.

Так как переворот спина невозможен, поперечное сечение рассеяния для спин-поляризованных в направлении вектора $\mathbf{n}_i$ электронов должно содержать множители $|A|^2$ или $|D|^2$, так что

$$d\sigma = \frac{\hbar \sin^2(\pi|eB|/(\hbar c)) d\varphi}{2\pi p} \left(\frac{1}{\sin^2(\varphi/2)} - [\mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_z]^2 \right). \quad (56)$$

Выражение (56) совпадает с формулой, полученной в работе [11]. Это неожиданно, так как там спин электрона вводился в уравнение Дирака в 2+1 измерениях искусственно в качестве нового параметра.

Поперечное сечение рассеяния неполяризованных электронов описывается формулой (13), так как дополнительный множитель в этом случае равен 1 вследствие того, что каждое из двух спиновых состояний дает вклад 1/2.

6. О СВЯЗАННОМ СОСТОЯНИИ ЭЛЕКТРОНА В ПОТЕНЦИАЛЕ АБ

Обсудим кратко вопрос о возможности появления связанного состояния электрона в потенциале АБ при учете взаимодействия спина электрона с магнитным полем. Запишем соответствующий член гамильтониана (45) в виде

$$\frac{sB|e|\hbar}{2mc} \delta(\mathbf{r}), \quad (57)$$

где $s = \pm 1$ – проекции спина электрона в направлении магнитного поля (ось z). Волновая функция связанного состояния должна быть локализована вблизи $\mathbf{r} = 0$

и обращаться в нуль при больших r . Решения уравнения (45) с $E < 0$, удовлетворяющие этим требованиям, могут появиться, только если “потенциал” (57) является потенциалом притяжения, т.е. при $sB < 0$.

Неограниченное при $\mathbf{r} = 0$ решение уравнения (50) выражается через функцию Макдональда $K_\nu(a)$ порядка ν при $a = \sqrt{2m|E_0|/\hbar^2}$, где $E_0 < 0$ – энергия связанного состояния, поэтому для $f(r)$ получаем

$$f(r) = CK_\nu(a). \quad (58)$$

Отсюда следует, что электрон локализован в области $l_0 \sim \sqrt{\hbar^2/(2m|E_0|)}$.

Теперь нужно показать, что волновая функция $\Psi(\mathbf{r})$, радиальная часть которой определяется выражением (58), удовлетворяет уравнению

$$\left[\frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + \frac{eBy}{cr^2} \right)^2 + \frac{1}{2m} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} - \frac{eBx}{cr^2} \right)^2 - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} - E \right] \Psi(x, y) = \frac{|e|Bs\hbar}{2mc} \Psi(0) \delta(\mathbf{r}) \quad (59)$$

при $\mathbf{r} \rightarrow 0$. Векторный потенциал при $\mathbf{r} \rightarrow 0$ исчезает.

Используя известное соотношение

$$2\pi\delta(\mathbf{r}) = \Delta \ln r, \quad (60)$$

где Δ – двумерный оператор Лапласа, заключаем, что порядок функции Макдональда должен быть равен нулю. Следовательно, связанное состояние может существовать только при определенных квантованных значениях магнитного потока

$$\Phi = \frac{2\pi\hbar cl}{|e|}.$$

При малых значениях аргумента

$$K_0(a) \cong -\ln \frac{a}{2} - \gamma, \quad (61)$$

где $\gamma = 0.577\dots$ – константа Эйлера.

Наконец, используя соотношение (60) и подставляя выражение (61) в (59), а также учитывая, что при малых r векторный потенциал исчезает, уравнение (59) можно свести к уравнению

$$\Delta f(r) = -\frac{sB|e|}{2\pi c\hbar} \Psi(0) \Delta \ln r \quad (62)$$

и получить связь между константой нормировки C и “затравочной” константой $\Psi(0)$ в виде

$$C = -\frac{sB|e|}{2\pi c\hbar} \Psi(0), \quad sB < 0. \quad (63)$$

Подчеркнем, что связанное состояние может возникать, только если магнитное поле модели описывается дельта-функцией.

Связанное состояние влияет на состояния рассеяния. Действительно, рассмотрим уравнение Шредингера

$$-\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \lambda\delta(\mathbf{r})\right]\Psi(\mathbf{r}) = K\Psi(\mathbf{r}). \quad (64)$$

Здесь $\lambda = |eB|/(\hbar c)$ – положительная безразмерная константа, а $K = 2mE/\hbar^2 < 0$ для связанного состояния.

Рассмотрим фурье-образ $\Psi(\mathbf{k})$ волновой функции $\Psi(\mathbf{r})$ (мы следуем работе [2]):

$$\Psi(\mathbf{r}) = \int \frac{d^2k}{2\pi^2} e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})} \Psi(\mathbf{k}). \quad (65)$$

Применяя преобразование Фурье к уравнению (64), получим

$$(k^2 + K)\Psi(\mathbf{k}) = \lambda\Psi(0), \quad (66)$$

решение $\Psi(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\Psi(\mathbf{k}) = \frac{\lambda\Psi(0)}{k^2 + K}. \quad (67)$$

Интегрируя по $\mathbf{k}$ левую и правую части этого решения, получим

$$1 = \frac{\lambda}{4\pi^2} \int \frac{d^2k}{k^2 + K}. \quad (68)$$

Интеграл в правой части расходится на верхнем пределе. Вводя параметр (импульс) обрезания при $|\mathbf{k}| = \Lambda$, получим

$$1 = \frac{\lambda}{4\pi} \ln\left(\frac{\Lambda^2 + K}{K}\right), \quad (69)$$

откуда найдем энергию связанного состояния:

$$E_0 = -\frac{(\hbar\Lambda)^2}{2m} e^{-4\pi/\lambda}. \quad (70)$$

Подчеркнем, что константа связи λ должна зависеть от Λ так, чтобы энергия связи $-E_0$ оставалась ограниченной при $\Lambda \rightarrow \infty$. Таким образом, импульс обрезания Λ , стремящийся к бесконечности, трансмутирует в произвольную энергию связи $|E_0|$. Это нерелятивистский аналог явления размерной трансмутации, которое имеет место в безмассовых релятивистских полевых теориях [12].

Так как энергия связи фиксирует всю шкалу энергий, то появление связанного состояния приводит к модификации состояний рассеяния. Для простоты рассмотрим эту модификацию на примере свободных состояний электрона. Учитывая возникшее связанное состояние, имеем

$$\Psi(\mathbf{k}) = 4\pi^2\delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{\lambda}{4\pi^2} \frac{\Psi(0)}{k^2 - k_0^2 + i\varepsilon}. \quad (71)$$

Интегрируя по $\mathbf{k}$ обе части решения (67), получим

$$\Psi(0) = 1 + \frac{\lambda\Psi(0)}{4\pi^2} \int \frac{d^2k}{k^2 - k_0^2 + i\varepsilon}. \quad (72)$$

Вводя импульс обрезания Λ и используя выражение (69), можно найти, что

$$\Psi(0) = \frac{4\pi}{\lambda} \left(\ln \frac{-k_0^2 + i\varepsilon}{K} \right)^{-1}. \quad (73)$$

Следовательно, “перенормированное” состояние непрерывного спектра имеет вид

$$\Psi(\mathbf{k}) = 4\pi^2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) + \frac{1}{\pi(k^2 - k_0^2 + i\varepsilon)} \left(\ln \frac{-k_0^2 + i\varepsilon}{K} \right)^{-1}, \quad (74)$$

а полное сечение рассеяния будет содержать при $E = \hbar^2 k_0^2 / (2m)$ дополнительный множитель

$$\left[1 + \frac{1}{\pi^2} \left(\ln \frac{E}{|E_0|} \right)^2 \right]^{-1}. \quad (75)$$

В нерелятивистском случае $E \sim |E_0|$, и полное сечение практически не изменяется.

Если потенциал (57) положителен, связанного состояния нет. Вклад в амплитуду рассеяния, возникающий при включении потенциала (57), не зависит от угла и мал по сравнению с (12), по крайней мере, при малых углах рассеяния φ . Оценим этот вклад, рассматривая рассеяние свободных электронов в поле (57) в плоскости xy .

Амплитуда рассеяния определяется формулой (см. книгу [10])

$$f(\varphi) = \sqrt{\frac{k}{2i\pi}} \int (e^{2i\delta_{\text{ph}}(x)} - 1) e^{-2ik \sin(\varphi/2)} dx, \quad (76)$$

где

$$\delta_{\text{ph}}(x) = -\frac{eBs\delta(x)}{4\hbar kc} \quad (77)$$

– фазовый сдвиг. В частности, в первом борновском приближении амплитуду рассеяния (76) нетрудно получить в виде

$$f(\varphi) = -\frac{|eB|s}{\sqrt{-2ik\pi\hbar c}}. \quad (78)$$

Естественно, что соответствующая поправка к сечению рассеяния одинакова для потенциалов притяжения и отталкивания.

Таким образом, амплитуда рассеяния в поле (57) не зависит от угла рассеяния для любых энергий рассеиваемой частицы. Этот результат обобщает на двумерный случай известный точный результат о равенстве амплитуд прошедшей и отраженной волн в поле одномерного дельта-потенциала отталкивания для любых энергий частицы (см., например, книгу [13]).

7. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Физически измеримыми (т.е. наблюдаемыми) могут быть только калибровочно-инвариантные величины. Таковыми являются не зависящие от калибровки векторного потенциала квантово-механические фаза волновой функции или энергия связанного состояния электрона. Калибровочно-инвариантная фаза – это фаза, которую приобретает волновая функция электрона при полном обходе бесконечно тонкого соленоида (оси z) в плоскости $z = 0$, т.е. при обходе замкнутого контура

(окружности) C с центром в точке $x = y = 0$. В эксперименте квантовая волна, связанная с каждым электроном, на входе расщепляется на два волновых пакета, которые обходят соленоид с разных сторон. Пути волновых пакетов пересекаются на выходе, в результате чего в эксперименте возникает замкнутый контур. Поэтому, хотя векторный потенциал АБ всюду на плоскости, кроме начала координат, является чистой калибровкой, т.е.

$$[\nabla \cdot \mathbf{A}] = \text{rot } \mathbf{A} = 0$$

всюду, кроме точки $x = y = 0$, интеграл $\oint \mathbf{A} ds$ по контуру C определен однозначно и равен полному магнитному потоку Φ .

Так как при движении электрона в потенциале АБ классическая траектория целиком находится в области, где напряженность магнитного поля равна нулю, поток магнитного поля не влияет на классическую траекторию электрона, а значит, и на сечение рассеяния. Действительно, рассмотрим уравнение Гамильтона–Якоби в комбинации полей (1) и (2):

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial S}{\partial r} + \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \varphi} + \frac{eB}{c} \right)^2 - m^2 c^2 = 0. \quad (79)$$

Если $a = 0$, то траектория электрона с энергией E и проекцией момента импульса L_0 на ось z ($L_0 = m v \rho$, где ρ – прицельный параметр)

$$r = \frac{r_{\min}}{\cos(\varphi - \varphi_0)}, \quad r_{\min} = \frac{L_0 c + eB}{\sqrt{E^2 - m^2 c^4}} \equiv L \sqrt{K}, \quad (80)$$

является прямой. Можно также показать, что угол θ рассеяния электрона на потенциале АБ в классической теории равен нулю:

$$\theta = \pi - 2 \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{dr}{r^2 \sqrt{1/r_{\min}^2 - 1/r^2}} = 0. \quad (81)$$

В квантовом случае такая классическая картина получается, если из ряда (10) выделить только один член разложения, что, конечно, некорректно, так как в наблюдаемых величинах, выражающихся через билинейные комбинации волновой функции, возникают интерференционные члены. Классическую интерпретацию отдельной парциальной волны можно дать только в пределе $l \gg 1$, когда из-за быстрых осцилляций множителей $e^{il\varphi}$ интерференционные члены выпадают при усреднении даже по небольшому интервалу углов φ .

Используя полный интеграл уравнения (79)

$$S = -Et + L_0 \varphi + \int dr \sqrt{\frac{1}{c} \left(E + \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2 c^2}, \quad (82)$$

находим траекторию финитного при $Lc > a$, $E < mc^2$ движения электрона:

$$r = \frac{b}{c \sqrt{L^2 E^2 - m^2 c^2 b} \cos \sqrt{b}(\varphi - \varphi_0)/(Lc - aE)}, \quad b = L^2 c^2 - a^2, \quad (83)$$

и переменные действия

$$J_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{\partial S}{\partial \varphi} = L_0, \quad (84)$$

$$J_r = \frac{1}{\pi} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} dr \sqrt{\frac{1}{c} \left(E + \frac{a}{r} \right)^2 - \frac{L^2}{r^2} - m^2 c^2} = -\frac{\sqrt{b}}{c} + \frac{aEc}{\sqrt{m^2 c^4 - E^2}}. \quad (85)$$

Здесь $r_{\min}$, $r_{\max}$ – корни подкоренного выражения из формулы (85), определяющие границы области движения электрона в радиальном направлении. Отсюда получаем следующее выражение для энергии финитного движения электрона:

$$E = mc^2 \left[1 + \frac{a^2}{(cJ_r + \sqrt{(cJ_\varphi + eB)^2 - a^2})^2} \right]^{-1/2}. \quad (86)$$

Точное квантово-механическое выражение (24) можно получить из уравнения (86) при квантовании переменных действия: $J_r = \hbar n_r$, $J_\varphi = \hbar(l + 1/2)$.

Благодарности. Работа частично финансировалась Президентской программой поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5332.2006.2) и международной программой РФФИ-ННС (грант ННС-а-89500.2006.2).

Список литературы

- [1] Y. Aharonov, D. Bohm, *Phys. Rev.*, **115** (1959), 485.
- [2] К. Хуанг, *Кварки, лептоны и калибровочные поля*, Мир, М., 1985.
- [3] M. G. Alford, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989), 1071.
- [4] V. R. Khalilov, *Phys. Rev. A*, **71** (2005), 012105.
- [5] S.-L. Zhu, Z. D. Wang, *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000), 1076; J. Anandan, *Science*, **297** (2002), 1656; [quant-ph/0212102](#).
- [6] Jeng-Bang Yau, E. P. De Poortere, M. Shayegan, *Phys. Rev. Lett.*, **88** (2002), 146801.
- [7] A. A. Logunov, A. N. Tavkhelidze, *Nuovo Cimento*, **29** (1963), 380; А. А. Логунов, В. И. Саврин, Н. Е. Тюрин, О. А. Хрусталева, *ТМФ*, **6** (1971), 157; А. А. Логунов, О. А. Хрусталева, “К проблеме двух тел в квантовой теории поля”, *Проблемы теоретической физики*, (Памяти Игоря Евгеньевича Тамма), ред. Е. Л. Фейнберг, В. И. Ритус, Наука, М., 1972.
- [8] Y. Hosotani, *Phys. Lett. B*, **319** (1993), 332.
- [9] В. Б. Берестецкий, Е. М. Лифшиц, Л. П. Питаевский, *Квантовая электродинамика*, Наука, М., 1980.
- [10] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Квантовая механика*, Наука, М., 1974.
- [11] C. R. Hagen, *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990), 503.
- [12] S. Coleman, E. Weinberg, *Phys. Rev. D*, **7** (1973), 1888.
- [13] З. Флюгге, *Задачи по квантовой механике*, т. 1, Мир, М., 1974.

Поступила в редакцию 24.04.2006