Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. Грива, Существование глобального решения уравнения Уизема, *ТМФ*, 2000, том 122, номер 1, 58–71

DOI: <https://doi.org/10.4213/tmf555>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 18:37:34

© 2000 г.

Т. Грава*

СУЩЕСТВОВАНИЕ ГЛОБАЛЬНОГО РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ УИЗЕМА

Изучается задача Коши для уравнения Уизема с монотонными аналитическими начальными данными. Показано, что если начальные данные $f(u)$ удовлетворяют условиям $f^{(2N+1)}(u) < 0$ для всех $u \in \mathbb{R}$, кроме некоторого числа изолированных точек, то решение уравнения Уизема имеет род не более чем N , где $1 \leq N \in \mathbb{N}$.

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Уизема представляют собой набор квазилинейных гиперболических систем вида [1–3]

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(u_1, u_2, \dots, u_{2g+1}) \frac{\partial u_i}{\partial x} = 0, \quad x, t, u_i \in \mathbb{R},$$

$$i = 1, \dots, 2g+1, \quad g = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

где введено упорядочение $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$. Для данного значения g система (1) называется g -фазным уравнением Уизема. Нуль-фазное уравнение Уизема имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 6u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2)$$

и называется также уравнением Бюргерса. При $g > 0$ скорости $\lambda_i(u_1, u_2, \dots, u_{2g+1})$ зависят через $u_1, \dots, u_{2g+1}$ от полных гиперэллиптических интегралов рода g .

В постановку задачи с начальными значениями для уравнения Уизема при монотонно убывающих гладких начальных данных $x = f(u)|_{t=0}$ входит следующее:

1. Полуплоскость (x, t) , $t \geq 0$, разбивается на набор областей D_g , где $g \geq 0$. Во внутренней части каждой области D_g мы ищем решение $u_1(x, t) > u_2(x, t) > \dots > u_{2g+1}(x, t)$ g -фазного уравнения Уизема (1). Для любого $t \geq 0$ функции $u_1(x, t) > u_2(x, t) > \dots > u_{2g+1}(x, t)$ можно изобразить на плоскости (x, u) как ветви многозначной функции. Решения g -фазного уравнения при различных g должны быть сшиты друг с другом в C^1 -гладкую кривую на плоскости (x, u) , гладко эволюционирующую по t (рис. 1).

2. В момент времени $t = 0$ мы имеем только область D_0 при любом x . Соответствующее решение $u(x, t)$ нуль-фазного уравнения (2) должно удовлетворять начальным данным $x = f(u(x, 0))$.

*SISSA, Trieste, Italy. E-mail: grava@sissa.it

Рис. 1. Решение уравнения Уизема для некоторых $t > 0$.

Будем говорить, что решение задачи с начальными условиями глобально существует, если оно имеет ограниченный род, а именно, если оно определяется для любых x и $t > 0$, а области D_g пусты при $g > g_0$, где $g_0 < +\infty$.

Уравнения (1) были получены Уиземом [1] в однофазном случае $g = 1$, а в более общем многофазном случае – Флашкой, Форестом и Маклаfliном [2]. Уравнения Уизема были также получены в работе [3] при изучении бездисперсионного предела уравнений Кортевега–де Фриза. Гиперболическая природа этих уравнений была обнаружена Левмором [4].

Дубровин и Новиков [5] нашли геометрическую гамильтонову структуру уравнения (1). На основании этой структуры Царев [6] показал, что уравнения (1) можно проинтегрировать, используя обобщение метода характеристик. Этот результат был рассмотрен Кричевером с алгебро-геометрической точки зрения [7].

Исследования задачи с начальными значениями для уравнения Уизема были начаты Гуревичем и Питаевским [8], при $g \leq 1$ они решили задачу (1) для ступенчатых начальных данных и численно исследовали случай кубических начальных данных. Задача Коши для уравнения Уизема подробно исследовалась Тианом при $g \leq 1$ [9]. Он показал, что если монотонные гладкие начальные данные $x = f(u)$ удовлетворяют условию $f'''(u) < 0$ всюду, за исключением одной точки, то глобальное решение уравнения Уизема имеет род не более единицы.

В данной работе мы обобщим результат Тиана, а именно докажем, что если монотон-

ные аналитические начальные данные $x = f(u)$ удовлетворяют условию

$$\frac{d^{2N+1}}{du^{2N+1}} f(u) := f^{(2N+1)}(u) < 0, \quad 1 \leq N \in \mathbb{N},$$

для всех вещественных u , кроме некоторого числа изолированных точек, то глобальное решение уравнения Уизема имеет род не выше N .

2. РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ И АБЕЛЕВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ: ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть

$$\mathcal{S}_g := \left\{ P = (r, \mu), \mu^2 = \prod_{j=1}^{2g+1} (r - u_j) \right\}, \quad u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}, \quad u_i \in \mathbb{R}, \quad (3)$$

— гиперэллиптическая риманова поверхность рода $g \geq 0$. Мы будем использовать стандартное представление $\mathcal{S}_g$ как двулистного накрытия $\mathbb{CP}^1$ с разрезами вдоль интервалов

$$[u_{2k}, u_{2k-1}], \quad k = 1, \dots, g+1, \quad u_{2g+2} = -\infty, \quad (4)$$

которые мы называем зонами. Интервалы

$$[u_{2k+1}, u_{2k}], \quad k = 0, \dots, g, \quad u_0 = +\infty, \quad (5)$$

будем называть щелями. Выберем базис $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=1}^g$ группы гомологий $H_1(\Gamma_g)$ так, чтобы β_j целиком лежали на верхнем листе и обходили по часовой стрелке интервал $[u_{2j}, u_{2j-1}]$, $j = 1, \dots, g$, а α_j возникали на верхнем листе в точке u_{2j+1} , проходили к точке u_{2j} и возвращались к начальной точке u_{2j} через нижний лист.

Абелевыми дифференциалами называются 1-формы, являющиеся аналитическими на замкнутой римановой поверхности $\mathcal{S}_g$, за исключением конечного числа точек.

Определим следующие дифференциалы на $\mathcal{S}_g$ [10]:

1. Канонический базис голоморфных 1-форм, или абелевых дифференциалов первого рода $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_g$:

$$\phi_k(r) = \frac{r^{g-1}\gamma_1^k + r^{g-2}\gamma_2^k + \dots + \gamma_g^k}{\mu(r)} dr, \quad k = 1, \dots, g. \quad (6)$$

Постоянные γ_i^k единственным образом определяются из условий нормировки

$$\int_{\alpha_j} \phi_k = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, g. \quad (7)$$

2. Набор абелевых дифференциалов второго рода σ_k , $k \geq 0$, с полюсом порядка $2k+2$ на бесконечности с асимптотикой

$$\sigma_k(r) = \left[r^{k-\frac{1}{2}} + O(r^{-\frac{3}{2}}) \right] dr \quad \text{при больших } r \quad (8)$$

и с нормировкой

$$\int_{\alpha_j} \sigma_k = 0, \quad j = 1, \dots, g. \quad (9)$$

Мы используем обозначения

$$\sigma_0(r) = dp(r), \quad 12\sigma_1(r) = dq(r). \quad (10)$$

Дифференциалы $dp(r)$ и $dq(r)$ называются соответственно квазиимпульсом и квазиэнергией [5]. Явные формулы для дифференциалов σ_k , $k \geq 0$, имеют вид

$$\sigma_k(r) = \frac{Q_k(r, \vec{u})}{\mu(r)} dr, \quad Q_k(r, \vec{u}) = r^{g+k} + a_1^k r^{g+k-1} + a_2^k r^{g+k-2} + \dots + a_{g+k}^k, \quad (11)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_{2g+1})$ и коэффициенты $a_i^k = a_i^k(\vec{u})$, $i = 1, \dots, g+k$, однозначно определяются формулами (8) и (9).

3. Абелев дифференциал третьего рода $\omega_{qq_0}(r)$ с полюсами первого порядка в точках $P = (q, \mu(q))$ и $P_0 = (q_0, \mu(q_0))$ и вычетами ± 1 , соответственно. Его периоды нормированы соотношением

$$\int_{\alpha_j} \omega_{qq_0}(r) = 0, \quad j = 1, \dots, g. \quad (12)$$

Этот дифференциал удовлетворяет тождеству [11]

$$d_q[\omega_{qq_0}(p)] = d_p[\omega_{pp_0}(q)], \quad (13)$$

где d_q и d_p обозначают дифференцирование по q и p .

3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЯ УИЗЕМА

Скорости $\lambda_i(u_1, u_2, \dots, u_{2g+1})$ g -фазного уравнения Уизема (1) даются отношением [1, 2]

$$\lambda_i(\vec{u}) = \frac{dq(r)}{dp(r)} \Big|_{r=u_i}, \quad i = 1, \dots, 2g+1, \quad (14)$$

где $dp(r)$ и $dq(r)$ определены в (10). При $g = 0$ имеем

$$dp(r) = \frac{dr}{\sqrt{r-u}}, \quad dq(r) = \frac{12r-6u}{\sqrt{r-u}} dr,$$

так что получается нуль-фазное уравнение Уизема (2).

Рассмотрим монотонно убывающие аналитические начальные данные вида

$$x = f(u) = c_0 + c_1 u + \dots + c_k u^k + \dots \quad (15)$$

Для таких начальных данных решения нуль-фазного уравнения (2) получаются методом характеристик [1] и даются выражением

$$x = 6tu + f(u). \quad (16)$$

Решение нуль-фазного уравнения существует глобально только при $0 \leq t < t_c$, где

$$t_c = \frac{1}{6} \min_{u \in \mathbb{R}} [-f'(u)]$$

— время градиентной катастрофы решения (16). Это связано с тем, что начальные данные имеют точку перегиба. При $t < t_c$, таким образом, имеется только область D_0 . При $t \geq t_c$ можно ожидать существования одинарной, двойной и высших фазовых областей. Решение уравнения Уизема получается путем сшивания C^1 -гладких решений различных родов, g -фазное уравнение решается с помощью обобщения метода характеристик и имеет вид [6, 12]

$$x = \lambda_i(\vec{u}) t + w_i(\vec{u}), \quad i = 1, \dots, 2g + 1, \quad (17)$$

где $\lambda_i(\vec{u})$ определены в (14), а

$$w_i(\vec{u}) = \left. \frac{ds}{dp} \right|_{r=u_i}, \quad i = 1, \dots, 2g + 1.$$

Дифференциал ds дается выражением

$$ds = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k k!}{(2k-1)!!} c_k \sigma_k, \quad (18)$$

где дифференциалы σ_k , $k \geq 0$, определены в (11).

Решение (17) g -фазного уравнения Уизема можно также записать в эквивалентной алгебро-геометрической форме [7, 12]. Пусть

$$\Omega(r, \vec{u}) = -x dp(r) + t dq(r) + ds(r), \quad (19)$$

где dp , dq и ds определены в (10) и (18). Тогда решение g -фазного уравнения определяется уравнениями

$$\Omega(r, \vec{u})|_{r=u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2g + 1. \quad (20)$$

Решение $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$ g -фазного уравнения Уизема (1) неявно определяется как функция от x и t посредством уравнений (17) или (20). Решение определено единственным образом только для тех x и t , для которых функции $u_i(x, t)$ вещественны и производные $\partial_x u_i(x, t)$, $i = 1, \dots, 2g + 1$, не равны нулю.

Рис. 2. Границы между областями D_0 и D_1 .

Одна из задач в теории уравнения Уизема состоит в определении того, в каком случае уравнения (17) и (20) будут разрешимы при вещественных $u_1, \dots, u_{2g+1}$, рассматриваемых как функции от x и t . Мы рассмотрим эту проблему в следующем разделе. До этого нам надо определить границы фазовых переходов в областях D_g , $g \geq 0$.

3.1. Границы области D_g . Решения уравнения Уизема (1) с начальными данными (15) получаются путем сшивания C^1 -гладких решений различных родов. Из этого условия можно определить границы между областями D_g и D_{g+1} . Общей границе этих областей соответствует вырожденная риманова поверхность

$$\mu_v^2 = (r-v)^2 \prod_{j=1}^{2g+1} (r-u_j), \quad v \in \mathbb{R}, \quad u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}, \quad v \neq u_j, \quad j = 1, \dots, 2g+1.$$

Точку $v \in \mathbb{R}$ следует определить из требования, чтобы решения g -фазного и $(g+1)$ -фазного уравнений C^1 -гладко сшивались, когда две точки ветвления римановой поверхности $\mathcal{S}_{g+1}$ сливаются в точке v .

Сначала рассмотрим случай, когда v принадлежит к одной из зон (4). Мы называем соответствующую границу *ведомым краем*. В этом случае общая граница областей D_g и D_{g+1} определяется уравнением (20) и уравнениями

$$\Omega(v, \vec{u}) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}(\mu(r)\Omega(r, \vec{u}))|_{r=v} = 0, \quad (21)$$

где дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$ определен в (19). Уравнения (20) и (21) определяют систему $2g+3$ уравнений для $2g+3$ вещественных неизвестных $v, t \geq 0$ при $u_1 > u_2 > \dots$

$\dots > u_{2g+1}$. Если эта система разрешима, можно определить функцию $t = t(x)$, которая описывает в полуплоскости (x, t) ($t \geq 0$) границу между областями D_g и D_{g+1} .

Если v принадлежит одной из щелей (5), мы называем соответствующую границу *ведущим краем*. В этом случае общая граница областей D_g и D_{g+1} определяется уравнением (20) и уравнениями

$$\Omega(v, \vec{u}) = 0, \quad \int_{u_{2k+1}}^v \Omega(r, \vec{u}) = 0. \quad (22)$$

Рассмотрим также предельный случай при $v \rightarrow u_l$, $1 \leq l \leq 2g+1$, в котором решение g -фазного уравнения имеет точку градиентной катастрофы на u_l -ветви. Дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$ имеет нуль третьего порядка в точке $r = u_l$.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим границу между областями D_0 и D_1 (рис. 2). На римановой поверхности $\mathcal{S}_0 := \{\mu^2 = r - u\}$ дифференциал $\Omega(r, u)$ имеет вид [9]

$$\Omega(r, u) = \frac{-x + 6tu + f(u)}{\sqrt{r - u}} dr + \left[\int_u^r \frac{6t + f'(\xi)}{\sqrt{r - \xi}} d\xi \right] dr,$$

так что решение нуль-фазного уравнения (20) дается формулой

$$x = 6tu + f(u). \quad (23)$$

На ведомом крае, где $u_2 = u_3 = v$ и $u_1 = u$, уравнения (21) принимают вид

$$\int_u^v \frac{6t + f'(\xi)}{\sqrt{v - \xi}} d\xi = 0, \quad \int_u^v \frac{f''(\xi)}{\sqrt{v - \xi}} d\xi = 0. \quad (24)$$

На ведущем крае, где $u_1 = u_2 = v$ и $u_3 = u$, уравнения (22) имеют вид

$$\int_u^v \frac{6t + f'(\xi)}{\sqrt{v - \xi}} d\xi = 0, \quad \int_u^v (6t + f'(\xi)) \sqrt{v - \xi} d\xi = 0. \quad (25)$$

Уравнения (24) и (25) эквивалентны полученным в работе [9].

При $f(u) = -u^3$ решения уравнения Уизема имеют род не более единицы [13]. На полуплоскости (x, t) , $t \geq 0$, имеются только области D_0 и D_1 . В этом случае можно явно решить системы, получаемые из (23)–(25). На ведомом крае получаем $t = 1/(2^{1/3}6) \times (-x)^{2/3}$, $x \leq 0$, тогда как на ведущем крае $t = 3/(4\sqrt{5})^{2/3} x^{2/3}$, $x \geq 0$. Этот хорошо известный результат получен в работе [14].

4. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

В этом разделе мы покажем, что если монотонные аналитические начальные данные $f(u)$, определенные в (15), удовлетворяют условию $f^{(2N+1)}(u) < 0$ для всех $u \in \mathbb{R}$, кроме некоторого числа изолированных точек, то глобальное решение уравнения Уизема имеет род не более N . Для этого мы сначала исследуем некоторые свойства абелевых дифференциалов.

4.1. Свойства абелевых дифференциалов. Пусть ω_1 и ω_2 – два абелевых дифференциала на римановой поверхности $\mathcal{S}_g$. Предположим, что все вычеты ω_1 равны нулю. Тогда интеграл $d^{-1}\omega_1$ не имеет логарифмической сингулярности на $\mathcal{S}_g$. Мы имеем соотношения

$$\sum_{j=1}^g \left[\int_{\alpha_j} \omega_1 \int_{\beta_j} \omega_2 - \int_{\alpha_j} \omega_2 \int_{\beta_j} \omega_1 \right] = 2\pi i \sum_{\mathcal{S}_g} \text{Res}(d^{-1}\omega_1)\omega_2, \quad (26)$$

известные как билинейные соотношения Римана для периодов [10].

Пусть $\omega_z(r)$ – нормированный абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами в точках $P^\pm(z) = (z, \pm\mu(z))$ с вычетами ± 1 , соответственно. Дифференциал $\omega_z(r)$ дается выражением

$$\omega_z(r) = \frac{dr}{\mu(r)} \frac{\mu(z)}{r-z} - \sum_{k=1}^g \phi_k(r) A_k(z, \vec{u}), \quad A_k(z, \vec{u}) = \int_{\alpha_k} \frac{dt}{\mu(t)} \frac{\mu(z)}{t-z}, \quad (27)$$

где $\phi_k(r)$, $k = 1, \dots, g$, – нормированный базис (6) голоморфных дифференциалов.

Для того чтобы получить явные выражения для коэффициентов $A_k(z, \vec{u})$, мы применим билинейные соотношения Римана (26) к дифференциалам $\omega_1(r) = \sigma_m(r)$ и $\omega_2(r) = \omega_z(r)$; таким образом, получим

$$\begin{aligned} \int_{P^-(z)}^{P^+(z)} \sigma_m(\xi) &= -\text{Res}_{r=\infty} [\omega_z(r) d^{-1}\sigma_m(r)] = \\ &= -\frac{4}{2m+1} \sum_{k=1}^g \sum_{j=1}^{m+1} A_k(z, \vec{u}) \gamma_j^k \Gamma_{m+1-j}, \quad m = 0, \dots, g-1. \end{aligned} \quad (28)$$

Коэффициенты γ_j^k в этих формулах определены соотношениями (7), а Γ_l являются коэффициентами разложения при $\xi \rightarrow \infty$ функции

$$\frac{d\xi}{\mu(\xi)} = \xi^{-g-\frac{1}{2}} \left(\Gamma_0 + \frac{\Gamma_1}{\xi} + \frac{\Gamma_2}{\xi^2} + \dots + \frac{\Gamma_l}{\xi^l} + \dots \right) d\xi.$$

Обращая (28) и вводя величины

$$B_j(z, \vec{u}) = \sum_{k=1}^g A_k(z, \vec{u}) \gamma_j^k,$$

получаем

$$\begin{pmatrix} B_1(z, \vec{u}) \\ B_2(z, \vec{u}) \\ \dots \\ B_g(z, \vec{u}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\Gamma}_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \tilde{\Gamma}_1 & \tilde{\Gamma}_0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{\Gamma}_{g-1} & \tilde{\Gamma}_{g-2} & \dots & \tilde{\Gamma}_1 & \tilde{\Gamma}_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \int_{P^-(z)}^{P^+(z)} \sigma_0(\xi) \\ -\frac{3}{4} \int_{P^-(z)}^{P^+(z)} \sigma_1(\xi) \\ \dots \\ -\frac{2g-1}{4} \int_{P^-(z)}^{P^+(z)} \sigma_{g-1}(\xi) \end{pmatrix}, \quad (29)$$

где $\tilde{\Gamma}_l$ – коэффициенты разложения при $\xi \rightarrow \infty$ функции

$$\mu(\xi) d\xi = \xi^{g+\frac{1}{2}} \left(\tilde{\Gamma}_0 + \frac{\tilde{\Gamma}_1}{\xi} + \frac{\tilde{\Gamma}_2}{\xi^2} + \dots + \frac{\tilde{\Gamma}_l}{\xi^l} + \dots \right) d\xi.$$

Сформулируем важное для наших дальнейших рассуждений предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Абелевы дифференциалы второго рода $\sigma_k(r)$, $k \geq 0$, удовлетворяют соотношениям

$$\sigma_k(r) = \operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_z(r) z^{k-\frac{1}{2}} dz] = -\frac{2}{2k+1} d_r \operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_r(z) z^{k+\frac{1}{2}}], \quad (30)$$

где $\omega_r(z)$ – нормированный абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами в точках $P^\pm(r) = (r, \pm\mu(r))$ с вычетами ± 1 , соответственно, а d_r обозначает дифференцирование по r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем первое равенство в (30). Поскольку дифференциал $\omega_z(r)$ нормирован, то нормирован и дифференциал $\operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_z(r) z^{k-1/2} dz]$, более того, он имеет полюс только при $r = \infty$ и асимптотику

$$\operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_z(r) z^{k-\frac{1}{2}} dz] = [r^{k-\frac{1}{2}} + O(r^{-\frac{3}{2}})] dr \quad \text{при больших } r.$$

Следовательно, первое равенство в (30) выполняется. Для доказательства второго равенства в (30) используем следующие соображения. Величина $\omega_z(r) z^{k+1/2}$ является однозначной функцией от переменной z в окрестности $z = \infty$, где она имеет полюс. Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} d_z (\omega_z(r) z^{k+\frac{1}{2}}) &= 0 = \operatorname{Res}_{z=\infty} \left[z^{k+\frac{1}{2}} d_z \omega_z(r) + \left(k + \frac{1}{2}\right) \omega_z(r) z^{k-\frac{1}{2}} dz \right] = \\ &= \operatorname{Res}_{z=\infty} \left[z^{k+\frac{1}{2}} d_r \omega_r(z) + \left(k + \frac{1}{2}\right) \omega_z(r) z^{k-\frac{1}{2}} dz \right], \end{aligned} \quad (31)$$

где C_∞ – контур, окружающий точку в бесконечности, и последнее равенство в (31) получается из тождества $d_z \omega_z(r) = d_r \omega_r(z)$, которое следует из (13).

Пусть

$$F(u) = 6tu + f(u) - x, \quad (32)$$

где $f(u)$ – начальные данные (15). Определим преобразование Абеля функции F как

$$\mathcal{F}(z) = \int_0^z \frac{F(\xi)}{\sqrt{z-\xi}} d\xi, \quad \partial_z \mathcal{F}(z) = \frac{F(0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{F'(\xi)}{\sqrt{z-\xi}} d\xi. \quad (33)$$

Используя (30), получаем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$, определенный в (19), удовлетворяет тождеству

$$\Omega(r, \vec{u}) = \operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_z(r) d_z \mathcal{F}(z)] = -d_r \operatorname{Res}_{z=\infty} [\omega_r(z) \mathcal{F}(z)], \quad (34)$$

где $\mathcal{F}(z)$ – преобразование Абеля (33) от $F(u)$, а $\omega_z(r)$ определен в (27).

Доказательство проводится непосредственными вычислениями.

4.2. Ограничение на род решения уравнения Уизема. Мы дадим верхнюю границу для рода решения уравнения Уизема при некоторых гипотезах о начальных данных. Для этого сначала запишем решение (17) или (20) g -фазного уравнения Уизема (1) в новой эквивалентной форме.

Из соотношений (27), (29) и из второго равенства в (34) следует, что мы можем записать дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$ в виде

$$\begin{aligned}\Omega(r, \vec{u}) &= d_r[\mu(r)\Psi(r, \vec{u})] - \sum_{k=1}^g d_r B_k(r, \vec{u}) q_k(\vec{u}) = \\ &= \left[\partial_r \Psi(r, \vec{u}) + \sum_{i=1}^{2g+1} \partial_{u_i} \Psi(r, \vec{u}) \right] \mu(r) dr + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2g+1} \frac{\mu(r)}{r - u_i} \Psi(u_i, \vec{u}) - \sum_{k=1}^g d_r B_k(r, \vec{u}) q_k(\vec{u}),\end{aligned}\quad (35)$$

где

$$\begin{aligned}\Psi(r, \vec{u}) &= -\operatorname{Res}_{z=\infty} \left[\frac{\mathcal{F}(z)}{\mu(z)(z-r)} dz \right], \\ q_k(\vec{u}) &= -\operatorname{Res}_{z=\infty} \left[\frac{z^{g-k}}{\mu(z)} \mathcal{F}(z) dz \right], \quad k = 1, \dots, g.\end{aligned}\quad (36)$$

Из соотношения (29) следует, что

$$d_r B_k(r, \vec{u}) = -\frac{2k-1}{2} \sum_{l=1}^k \tilde{\Gamma}_{k-l} \sigma_{l-1}(r). \quad (37)$$

Таким образом, последняя сумма в (35) является дифференциалом второго рода с полюсом порядка $2g$ на бесконечности. Следовательно, можно записать (35) в виде

$$\Omega(r, \vec{u}) = \frac{Z(r, \vec{u})}{\mu(r)} dr = \frac{\Phi(r, \vec{u}) \prod_{j=1}^{2g+1} (r - u_j) + R_{2g}(r, \vec{u})}{\mu(r)} dr, \quad (38)$$

где

$$\Phi(r, \vec{u}) = \partial_r \Psi(r, \vec{u}) + \sum_{i=1}^{2g+1} \partial_{u_i} \Psi(r, \vec{u}), \quad (39)$$

а $R_{2g}(r, \vec{u})$ — полином степени $2g$ по переменным r , равный

$$R_{2g}(r, \vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2g+1} \Psi(u_i, \vec{u}) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{2g+1} (r - u_j) + \sum_{k=1}^g \frac{2k-1}{2} q_k(\vec{u}) \sum_{l=1}^k \tilde{\Gamma}_{k-l} Q_{l-1}(r, \vec{u}), \quad (40)$$

где $Q_{l-1}(r, \vec{u})$ определено в (11).

Решение (20) g -фазного уравнения Уизема (1) может быть записано в эквивалентной форме

$$Z(r, \vec{u})|_{r=u_i} = 0, \quad i = 1, \dots, 2g+1. \quad (41)$$

Здесь $Z(r, \vec{u})$ определяется согласно (38), откуда мы заключаем, что решение (41) g -фазного уравнения Уизема (1) эквивалентно условию

$$R_{2g}(r, \vec{u}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2g+1} \Psi(u_i, \vec{u}) \prod_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^{2g+1} (r - u_j) + \sum_{k=1}^g \frac{2k-1}{2} q_k(\vec{u}) \sum_{l=1}^k \tilde{\Gamma}_{k-l} Q_{l-1}(r, \vec{u}) \equiv 0. \quad (42)$$

Действительно, решение $R_{2g}(r, \vec{u})$ является полиномом степени $2g$, причем согласно (41) оно должно иметь $2g + 1$ нулей, откуда следует, что $R_{2g}(r, \vec{u})$ должно быть тождественно равно нулю. Условие (42) определяет систему $2g + 1$ уравнений для переменных $u_1, \dots, u_{2g+1}$ с параметрами x и t . Решение g -фазного уравнения Уизема существует, если уравнения (41) или (42) (что эквивалентно) разрешимы для вещественных $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$ как функций от x и t , а производные $\partial_x u_i(x, t)$ не равны нулю при $i = 1, \dots, 2g + 1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если уравнения Уизема (1) с начальными данными (15) допускают g -фазное решение, то функция $\Phi(r, \vec{u})$, определенная в (39), имеет не менее g вещественных нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если уравнения Уизема допускают g -фазное решение, то система, определяемая условием (42), разрешима для вещественных переменных $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$ как функций от x и t . На решении $u_1(x, t) > u_2(x, t) > \dots > u_{2g+1}(x, t)$ g -фазного уравнения Уизема (1) дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$ (38) имеет вид

$$\Omega(r, \vec{u}) = \mu(r) \Phi(r, \vec{u}) dr. \quad (43)$$

Дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$, определенный на римановой поверхности $\mathcal{S}_g$, удовлетворяет условию нормировки (9) и, следовательно, должен иметь не менее одного вещественного нуля в каждой из щелей (u_{2j+1}, u_{2j}) , $j = 1, \dots, g$. Поэтому функция $\Phi(r, \vec{u})$ должна иметь по крайней мере g вещественных нулей по r , для того чтобы дифференциал $\Omega(r, \vec{u})$ был нормирован.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. На общей границе областей D_g и D_{g+1} функция $\Phi(r, \vec{u})$ вида (39), определенная на римановой поверхности $\mathcal{S}_g$, должна иметь $g + 2$ вещественных нулей.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Области D_g и D_{g+1} имеют общую границу, если пара точек ветвления на римановой поверхности $\mathcal{S}_{g+1}$ сливается в единую точку $v \in \mathbb{R}$. Ведомый край (см. п. 3.1) общей границы областей D_g и D_{g+1} определяется из уравнения (21). Используя (43), можно записать (21) в эквивалентной форме

$$\Phi(v, \vec{u}) = 0, \quad \left. \frac{\partial \Phi(r, \vec{u})}{\partial r} \right|_{r=v} = 0. \quad (44)$$

Рассмотрим теперь ведущий край общей границы областей D_g и D_{g+1} . Пусть v принадлежит одной из щелей (5), $v \in (u_{2l+1}, u_{2l})$, $0 \leq l \leq g$, общая граница областей D_g и D_{g+1} определяется из уравнения (22). Используя (43), можно записать (22) в виде

$$\Phi(v, \vec{u}) = 0, \quad \int_{u_{2l+1}}^v \mu(r) \Phi(r, \vec{u}) dr = 0. \quad (45)$$

Уравнения (44) и (45) имеют вещественные решения, если функция $\Phi(r, \vec{u})$ имеет два вещественных нуля по переменной r . Из предложения 3 следует, что на общей границе областей D_g и D_{g+1} функция $\Phi(r, \vec{u})$ должна иметь $g + 2$ вещественных нулей. В случае общего положения эти нули попарно различны.

ТЕОРЕМА (ОСНОВНАЯ). *Если начальные данные $f(u)$ (15) удовлетворяют условию*

$$\frac{d^{2N+1}}{du^{2N+1}} f(u) < 0, \quad 1 \leq N \in \mathbb{N}, \quad (46)$$

для всех $u \in \mathbb{R}$, кроме некоторого числа изолированных точек, то решения уравнения Уизема (1) имеют род не выше N .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Решение уравнения Уизема (1) с начальными данными (15) определяет разложение полуплоскости (x, t) , $t \geq 0$, на некоторое число областей D_g , $g \geq 0$. Внутренней части каждой из областей D_g соответствует решение (20) g -фазного уравнения Уизема (1). Общие границы областей D_g и D_{g+1} определяются из уравнений (20)–(22).

Покажем, что любая область D_g , $g \leq N$, не имеет общей границы ни с одной из областей D_m , $m > N$. Поскольку множество областей $\{D_g\}_{g \leq N}$ не пусто вследствие $D_0 \neq \emptyset$, множество $\{D_g\}_{g > N}$ должно быть пустым. Действительно, в противном случае полуплоскость (x, t) , $t \geq 0$, являющаяся связным множеством, разбивалась бы на некоторое число областей, объединение которых представляет собой несвязное множество.

Из предложения 4 следует, что если области D_g и D_{g+1} имеют общую границу, функция $\Phi(r, \vec{u})$, определенная на S_g , имеет $g + 2$ вещественных нулей при некоторых значениях x и t . Легко обобщить предложение 4 с учетом общей границы областей D_g и D_m , $m > g \geq 0$. Если эти области имеют общую границу, функция $\Phi(r, \vec{u})$, определенная на S_g , должна иметь по крайней мере $2m - g$ вещественных нулей при некоторых значениях x и t .

Оценим число вещественных нулей функции $\Phi(r, \vec{u})$, определенной на S_g при $g \leq N$. Для этого нам понадобятся следующие две леммы.

ЛЕММА 1. *Функция $\Psi(r, \vec{u})$, определенная в (36), является единственным симметричным по переменным $u_1, \dots, u_{2g+1}$ решением задачи Коши для линейной переопределенной системы*

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial u_i} \Psi(r, \vec{u}) - \frac{\partial}{\partial u_j} \Psi(r, \vec{u}) = 2(u_i - u_j) \frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \Psi(r, \vec{u}), \\ \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, 2g+1, \\ \frac{\partial}{\partial r} \Psi(r, \vec{u}) - 2 \frac{\partial}{\partial u_j} \Psi(r, \vec{u}) = 2(r - u_j) \frac{\partial^2}{\partial r \partial u_j} \Psi(r, \vec{u}), \\ \quad j = 1, \dots, 2g+1, \\ \Psi(r, \underbrace{r, \dots, r}_{2g+1}) = \frac{2^{g+1}}{(2g+1)!!} F^{(g)}(r), \end{cases} \quad (47)$$

где $F^{(g)}(r)$ — g -я производная функции $F(r)$ (32). Решение $\Psi(r, \vec{u})$ задачи Коши (47) можно записать в виде

$$\Psi(r, \vec{u}) = \frac{1}{K} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{2g+1} (1 + \xi_1)^g (1 + \xi_2)^{g-\frac{1}{2}} \dots (1 + \xi_{2g})^{\frac{1}{2}} \times \\ \times \frac{F^{(g)}\left(\frac{1+\xi_1}{2} \left(\dots \left(\frac{1+\xi_{2g}}{2} \left(\frac{1+\xi_{2g+1}}{2} r + \frac{1-\xi_{2g+1}}{2} u_1 \right) + \frac{1-\xi_{2g}}{2} u_2 \right) + \dots \right) + \frac{1-\xi_1}{2} u_{2g+1} \right)}{\sqrt{(1-\xi_1)(1-\xi_2) \dots (1-\xi_{2g+1})}}, \quad (48)$$

где

$$K = \frac{(2g+1)!!}{2^{g+1}} K_1 K_2 \dots K_{2g+1}, \quad K_i = \int_{-1}^1 \frac{(1+\xi)^{\frac{2g-i+1}{2}}}{\sqrt{1-\xi}} d\xi.$$

Доказательство вытекает из леммы 3.4 работы [9].

Имеется также следующая элементарная лемма.

ЛЕММА 2. Если вещественная аналитическая функция $g(u)$ удовлетворяет условию

$$\frac{d^m}{du^m} g(u) < 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq m \in \mathbb{N},$$

то она имеет не более m вещественных нулей.

Продолжим теперь доказательство основной теоремы.

Если начальные данные $f(u)$ удовлетворяют условию (46), то $(\partial^{2N-g}/\partial r^{2N-g}) \times \Phi(r, \vec{u}) < 0$ для всех $r \in \mathbb{R}$ и для всех вещественных $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$. В самом деле, используя (32), (36), (39), (46) и (48), получаем

$$\frac{\partial^{2N-g}}{\partial r^{2N-g}} \Phi(r, \vec{u}) = \\ = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \cdots \int_{-1}^1 d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_{2g+1} \frac{(1+\xi_1)^{2N} (1+\xi_2)^{2N-\frac{1}{2}} \dots (1+\xi_{2g+1})^{2N-g}}{2^{(2g+1)(2N-g)} K} \times \\ \times \frac{F^{(2N+1)}\left(\frac{1+\xi_1}{2} \left(\dots \left(\frac{1+\xi_{2g}}{2} \left(\frac{1+\xi_{2g+1}}{2} r + \frac{1-\xi_{2g+1}}{2} u_1 \right) + \frac{1-\xi_{2g}}{2} u_2 \right) + \dots \right) + \frac{1-\xi_1}{2} u_{2g+1} \right)}{\sqrt{(1-\xi_1)(1-\xi_2) \dots (1-\xi_{2g+1})}} < 0 \quad (49)$$

для всех вещественных $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$. Учитывая (49) и лемму 2, получаем, что функция $\Phi(r, \vec{u})$ имеет не более $2N - g$ вещественных нулей по переменным r при любых вещественных $u_1 > u_2 > \dots > u_{2g+1}$ и любых x и $t \geq 0$. Если области D_g и D_m , $0 \leq g \leq N$, $m > g$, имеют общую границу, то функция $\Phi(r, \vec{u})$ имеет $2m - g$ вещественных нулей для некоторых значений x и t . Таким образом,

$$2N - g \geq 2m - g \quad \text{или} \quad m \leq N, \quad (50)$$

откуда следует, что множество областей $\{D_g\}_{0 \leq g \leq N}$ не имеет общих границ ни с какой из областей в множестве $\{D_m\}_{m > N}$. Теорема доказана.

ПРИМЕР 2. Рассмотрим начальные данные

$$x = f(u) = -\frac{1}{5!}(u^5 + cu^4 + u^3) - 2u - \sin u, \quad c^2 \leq \frac{15}{4}.$$

Функция $f(u)$ монотонно убывает, и $f^{(5)}(u) = -1 - \cos u < 0$ для всех вещественных u , кроме $u = (2k+1)\pi$, где k целое. По вышеприведенной теореме глобальное решение уравнения Уизема для начальных данных имеет род не более 2.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы доказали, что при наличии определенных условий на начальные данные уравнения Уизема имеют глобальное решение. Действительно, если монотонные аналитические начальные данные $f(u)$ удовлетворяют условию $f^{(2N+1)}(u) < 0$ для всех $u \in \mathbb{R}$, кроме некоторого числа изолированных точек, то глобальное решение уравнения Уизема имеет род не выше N . Мы ожидаем, что эти результаты будут справедливы и для гладких начальных данных.

Благодарности. Я благодарю профессора Бориса Дубровина, который поставил мне задачу, рассмотренную в данной работе, и дал много указаний по поводу того, как достичь ее решения.

Список литературы

- [1] Дж. Уизем. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977.
- [2] H. Flaschka, M. Forest, D. H. McLaughlin. Commun. Pure Appl. Math. 1980. V. 33. P. 739–784.
- [3] P. D. Lax, C. D. Levermore. Commun. Pure Appl. Math. 1983. V. 36. P. 253–290; P. 571–593; P. 809–830.
- [4] C. D. Levermore. Commun. Part. Diff. Equat. 1988. V. 13. P. 495–514.
- [5] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков. УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
- [6] С. П. Царев. ДАН СССР. 1985. Т. 282. С. 534–537.
- [7] И. М. Кричевер. Функц. анализ и его прилож. 1988. Т. 22. № 3. С. 37–52.
- [8] А. Г. Гуревич, Л. П. Питаевский. Письма в ЖЭТФ. 1973. Т. 17. № 5. С. 268–271.
- [9] Fei Ran Tian. Commun. Pure Appl. Math. 1993. V. 46. P. 1093–1129.
- [10] G. Springer. Introduction to Riemann Surfaces. Reading, MA: Addison-Wesley, 1957.
- [11] Е. И. Зверович. УМН. 1971. Т. 26. № 1. С. 252–253.
- [12] Fei Ran Tian. Duke Math. J. 1994. V. 74. P. 203–221.
- [13] В. В. Авиллов, И. М. Кричевер, С. П. Новиков. ДАН СССР. 1987. Т. 295. С. 345–349.
- [14] Г. В. Потемин. УМН. 1988. Т. 43. № 5. С. 211–212.